SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

J. FARAUT

Distributions sphériques et équations différentielles singulières

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1976-1977), exp. nº 4, p. 1-19

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1976-1977____A4_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 6 - 1 9 7 7

DISTRIBUTIONS SPHERIQUES ET EQUATIONS DIFFERENTIELLES SINGULIERES

par J. FARAUT

Exposé n° IV

16 Novembre 1976

§ 1. INTRODUCTION

Soit G un groupe de Lie, H un sous-groupe fermé de G et $X = G/H$ l'espace homogène. Un opérateur différentiel sur X est dit invariant s'il commute à l'action de G. Une distribution T sur X est appelée distribution sphérique si

1) T est distribution propre de tout opérateur différentiel invariant
2) T est invariante par H.

La monographie [3] de Helgason est consacrée à l'étude de ces distributions. Nous nous proposons de déterminer ces distributions dans les cas suivants :

1) Les espaces pseudo-euclidiens . Soit $O(p,q)$ le groupe orthogonal de la forme quadratique :

$$x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2 .$$

Les espaces pseudo-euclidiens sont les espaces homogènes

$$X = O(p,q) \circledS \mathbb{R}^{p+q}/O(p,q) \simeq \mathbb{R}^{p+q}$$

(le groupe G est le produit semi-direct $O(p,q) \circledS \mathbb{R}^{p+q}$).

2) Les hyperboloïdes. Ce sont les espaces homogènes

$$X = O(p+1,q)/O(p,q)$$

qui s'identifient aux ensembles suivants

$$X = \{x \in \mathbb{R}^{p+q+1} \mid x_o^2 + x_1^2 + \dots x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2 = 1\}$$

Dans la suite X désigne soit un espace pseudo-euclidien, soit un hyperboloïde. Nous supposons p et $q \geq 1$. Il existe sur X une structure pseudo-riemannienne invariante de signature (p,q) et par suite une mesure invariante dx et un opérateur différentiel invariant du second ordre, le pseudo- laplacien, noté $\square$. Pour un espace pseudo-euclidien

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2} - \dots - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+q}^2}$$

Tout opérateur différentiel invariant sur X est de la forme $P(\Box)$ où P est un polynôme, si bien qu'une distribution sphérique sur X est une distribution T invariante par H et telle que

$$\Box T = \lambda T$$

D'autre part il existe sur X une fonction analytique réelle Q telle que

1) Q est invariante par H

2) Si x_o est un point de X invariant par H, x_o est un point critique de Q, et en ce point le hessien de Q a pour signature (p,q).

Si X est un espace pseudo-euclidien nous pouvons prendre

$$Q(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2$$

l'origine est le seul point critique, et si X est un hyperboloïde

$$Q(x) = x_o$$

la fonction Q a alors deux points critiques : (1,0,...,0) et (-1,0,...,0).

Soit F une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Considérons la distribution T sur X définie par

$$T(f) = \int F[Q(x)]\, f(x) dx, \; f \in \mathcal{D}(X)$$

($\mathcal{D}(X)$ est l'espace des fonctions sur X de classe C^∞ et à support compact). La distribution T est invariante par H. Si F est de classe C^2

$$\Box(F \circ Q) = LF \circ Q$$

où L est un opérateur différentiel en une variable

$$L = a(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^2 + b(t)\,\frac{d}{dt}$$

Si X est un espace pseudo-euclidien, L est l'opérateur de Bessel :

$$L = 4t\left(\frac{d}{dt}\right)^2 + 2(p+q)\frac{d}{dt}$$

et si X est un hyperboloïde, L est l'opérateur de Legendre

$$L = (t^2 - 1)\left(\frac{d}{dt}\right)^2 + (p+q)\,t\frac{d}{dt}$$

Remarquons que si t_o est une valeur critique de Q alors t_o est un zéro simple du coefficient a(t).

Si la fonction F est solution de $LF = \lambda F$, alors la distribution T est solution de $\square T = \lambda T$. Nous obtiendrons les distributions sphériques en remplaçant la fonction F par une distribution sur $\mathbb{R}$ d'un type que nous préciserons. Cette méthode a été utilisée par Méthée [8], De Rham [2], Tengstrand [11], elle a été étudiée dans une situation générale par Maire [6] et [7].

§ 2 APPLICATIONS "MOYENNE". ESPACES DE FONCTIONS TEST SINGULIERES.

Soit f une fonction de $\mathcal{D}(X)$, il existe une fonction intégrable Mf sur $\mathbb{R}$, telle que pour toute fonction F continue sur $\mathbb{R}$

$$\int_X F[Q(x)]f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} F(t)Mf(t)dt$$

La fonction Mf admet des singularités aux valeurs critiques de Q. Si t n'est pas une valeur critique de Q, le nombre Mf(t) est l'intégrale de f sur l'ensemble $\{x | Q(x) = t\}$, qui est une orbite de H, par rapport à une mesure invariante par H. Avec la notation de Gelfand, Mf(t), la "moyenne" de f sur cette orbite, est égale à

$$Mf(t) = \int_X f(x)\delta(Q(x) - t)dx$$

Pour décrire l'image de l'application M, Tengstrand [11] a défini des espaces de fonctions singulières. Leur description utilise une "fonction "singularité" qui dépend de l'espace X considéré :

	espaces pseudo-euclidiens	hyperboloïdes
q pair	$Y(t)t^{\mu}$	$Y(1-t^2)(1-t^2)^{\mu}$
p pair q impair	$Y(-t)(-t)^{\mu}$	$Y(t^2-1)(t^2-1)^{\mu}$
p et q impairs	$t^{\mu}\mathrm{Log}\vert t\vert$	$(1-t^2)^{\mu}\mathrm{Log}\vert 1-t^2\vert$

$\mu = \frac{p+q}{2} - 1$.

Y est la fonction d'Heaviside : $Y(t) = 0$ si $t < 0$, $Y(t) = 1$ si $t \geq 0$.

<u>Définition</u> : <u>L'espace</u> $\mathcal{H}$ <u>est l'espace des fonctions</u> φ <u>définies sur</u> $\mathbb{R}$ <u>de la forme</u>

$$\varphi(t) = \varphi_o(t) + \gamma(t)\,\varphi_1(t)$$

<u>où</u> φ_o <u>et</u> φ_1 <u>sont deux fonctions de</u> $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Pour décrire la topologie de $\mathcal{H}$ nous nous limitons aux fonctions "singularité" suivantes :

$$\gamma(t) = Y(t)t^{\mu}\ ,\ \mu \geq 0$$

ou

$$\gamma(t) = t^{\mu}\mathrm{Log}|t|,\ \mu \text{ entier } \geq 0\ .$$

Une fonction φ de $\mathcal{H}$ est de classe C^{∞} pour $t \neq 0$, et admet en 0 un développement asymptotique :

$$\varphi(t) \sim \sum_{k=o}^{\infty} A_k t^k + \gamma(t)\sum_{k=o}^{\infty} B_k t^k$$

si bien que, pour tout entier $m \leq n+\mu$ la fonction

$$t \mapsto \varphi(t) - \gamma(t)\sum_{k=o}^{n} B_k t^k$$

est de classe C^m. Soit χ une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ égale à 1 au voisinage de 0. Sur l'espace

$$\mathcal{H}_{\tau} = \{\varphi \in \mathcal{H} \mid \mathrm{supp}(\varphi) \subset [-\tau,\tau]\}$$

Considérons, pour tout entier n et tout entier $m \leq n+\mu$, la semi-norme

$$\varphi \mapsto \sup_t \left| \left(\frac{d}{dt}\right)^m \left[\varphi(t) - \chi(t)\gamma(t) \sum_{k=o}^{n} B_k\, t^k\right] \right|$$

et également, pour tout entier $k \geq 0$, la semi-norme

$$\varphi \mapsto |B_k|$$

Ces semi-normes définissent sur $\mathcal{H}_\tau$ une topologie d'espace de Fréchet, et $\mathcal{H}$ est muni de la topologie limite-inductive (voir Tengstrand [11], et aussi Jeanquartier [4]).

Théorème 1 : Pour toute fonction f de $\mathcal{D}(X)$ la fonction Mf appartient à $\mathcal{H}$. L'application M de $\mathcal{D}(X)$ dans $\mathcal{H}$ est continue et surjective.

Théorème 2 : L'application transposée M', du dual $\mathcal{H}'$ de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{D}'(X)$ a pour image l'espace des distributions sur X invariantes par H. De plus

$$\square M' = M'L$$

Ces deux théorèmes ont été démontrés par Tengstrand dans le cas des espaces pseudo-euclidiens ([11], lemma 4.3 et theorem 5.1). Les developpements asymptotiques des fonctions Mf avaient été établis par Méthée [8] pour $p = 1$ et par de Rham [2]. Les démonstrations de Tengstrand s'adaptent sans difficulté au cas des hyperboloïdes.

Dans le cas où X est un espace pseudo-euclidien, si φ est une fonction de $\mathcal{H}$, elle admet en 0 un développement asymptotique

$$\varphi(t) \sim \sum_{k=o}^{\infty} t^k A_k(\varphi) + \gamma(t) \sum_{k=o}^{\infty} t^k B_k(\varphi)$$

Les formes linéaires A_k et B_k sont des éléments de $\mathcal{H}'$, leurs supports sont réduits à $\{0\}$. On démontre que tout élément S de $\mathcal{H}'$ de support $\{0\}$ est de la forme

$$S(\varphi) = \sum_{k=o}^{m} A_k(\varphi) + \sum_{k=o}^{n} B_k(\varphi)$$

Dans [11] (p.213) on montre que

$$M'B_o = c\delta$$

où δ est la masse de Dirac en 0 et c est une constante ne dépendant que de p et q. De plus la restriction au complémentaire de l'origine de la distribution $M'A_o$ est une mesure portée par le cône isotrope de Q invariante par H.

Corollaire 3 : Les distributions sphériques sont de la forme

$$T = M'S$$

où S est un élement de $\mathscr{H}'$ solution de l'équation différentielle

$$LS = a(t)S'' + b(t)S' = \lambda S$$

Le paragraphe suivant concerne l'étude de ces solutions.

Si $\gamma(t) = Y(t)t^{\mu}$, $\mu \geq 0$ nous noterons $\mathscr{H} = \mathscr{H}_{\mu,Y}$, et si $\gamma(t) = t^{\mu}\mathrm{Log}|t|$, μ entier ≥ 0, nous noterons $\mathscr{H} = \mathscr{H}_{\mu,L}$. Si $\mu \geq 1$ la dérivation est une application linéaire continue de $\mathscr{H}_{\mu,s}$ dans $\mathscr{H}_{\mu-1,s}$ ($s = Y$ ou L). Elle est injective et le noyau de sa transposée

$$\frac{d}{dt} : \mathscr{H}'_{\mu-1,s} \to \mathscr{H}'_{\mu,s}$$

est réduit aux constantes.

§ 3. SOLUTIONS DANS L'ESPACE $\mathscr{H}'$ D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE SINGULIERE.

Nous allons étudier les solutions de l'équation

(E) $$Ly - \lambda y \equiv a(t)y'' + b(t)y' - \lambda y = 0$$

dans l'espace $\mathscr{H}' = \mathscr{H}'_{\mu,s}(]-T,T[)$. Nous supposons que les fonctions a et b sont analytiques sur $]-T,T[$, $a(t) = t\,a_o(t)$, a_o ne s'annulant pas sur $]-T,T[$, et de plus, ce qui est essentiel, que

$$\frac{b(0)}{a_o(0)} = \mu + 1$$

L'équation (E) est du type de Fuchs en 0, les racines de l'équation caractéristique sont 0 et $-\mu$. L'opérateur adjoint L^*

$$L^*\varphi = (a(t)\varphi)'' - (b(t)\varphi)'$$

opère dans $\mathcal{H}$, et par suite L opère dans $\mathcal{H}'$. En effet soit φ une fonction de $\mathcal{H}$ de la forme

$$\varphi(t) = \gamma(t)\varphi_1(t), \quad \varphi_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

nous avons, si $\gamma(t) = Y(t)t^\mu$

$$L^*\varphi = \mu[(\mu+1)a_o(0) - b(0)]\varphi_1(0)Y(t)t^{\mu-1}$$
$$+ Y(t)\,t^\mu\varphi_2(t)$$

où φ_2 est une fonction de classe C^∞, et si $\gamma(t) = t^\mu \mathrm{Log}|t|$,

$$L^*\varphi(t) = \mu[(\mu+1)\,a_o(0) - b(0)]\varphi_1(0)t^{\mu-1}\mathrm{Log}|t|$$
$$+ \varphi_2(t) + t^\mu \mathrm{Log}|t|\varphi_3(t)$$

où φ_2 et φ_3 sont des fonctions de classe C^∞ .

1) Réduction au premier ordre

L'équation (E) admet une solution analytique Φ sur $]-T,T[$ telle que $\Phi(0) = 1$. En réduisant s'il le faut l'intervalle $]-T,T[$ on peut supposer que Φ ne s'annule pas sur $]-T,T[$. En changeant de fonction

$$y = \Phi(t)u$$

l'équation différentielle (E) devient

$$tu'' + \alpha(t)u' = 0$$

avec

$$\alpha(t) = \frac{b(t)}{a_o(t)} + 2t \frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)}$$

et pour t assez petit

$$\alpha(t) = \sum_{k=o}^{\infty} \alpha_k t^k, \quad \alpha_o = \mu + 1$$

Posons

$$Dv = tv' + \alpha(t)v$$

La dérivation applique $\mathcal{H}'_{\mu,s}$ dans $\mathcal{H}'_{\mu+1,s}$, et l'application D envoie $\mathcal{H}'_{\mu+1,s}$ dans $\mathcal{H}'_{\mu,s}$.

Nous sommes ainsi conduits à la suite des opérations suivantes

$$y \mapsto u = [\Phi(t)]^{-1} y \mapsto v = u' \mapsto Dv$$

$$\mathcal{H}'_{\mu,s} \to \mathcal{H}'_{\mu,s} \to \mathcal{H}'_{\mu+1,s} \to \mathcal{H}'_{\mu,s}$$

2) <u>Solutions distributions de</u> $Dv = 0$

L'équation différentielle

$$Dv = tv' + \alpha(t)v = 0$$

admet pour $t \neq 0$ une solution ordinaire de la forme

$$|t|^{-\mu-1} f(t)$$

où f est une fonction analytique sur $]-T,T[$, $f(0) = 1$. Soient S^+ et S^- les distributions sur $]-T,T[$ définies par

$$S^+(\varphi) = \underset{\varepsilon\to o}{\mathrm{Pf}} \left[\int_{\varepsilon}^{T} t^{-\mu-1} f(t)\varphi(t)dt\right]$$

$$S^-(\varphi) = \underset{\varepsilon\to o}{\mathrm{Pf}} \left[\int_{-T}^{-\varepsilon} (-t)^{-\mu-1} f(t)\varphi(t)dt\right]$$

(le symbole Pf signifie partie finie au sens de Hadamard).

Rappelons le résultat de Méthée [9] :

Théorème 4 : Les solutions distributions de l'équation différentielle

$$Dv \equiv tv' + \alpha(t)v = 0$$

constituent un espace vectoriel de dimension 2. Si μ n'est pas entier, toute solution distribution v est de la forme

$$v = c\,S^+ + dS^-$$

et si μ est un entier

$$v = c(S^+ + (-1)^{\mu+1}S^-) + dV_o$$

où V_o est une distribution de support $\{0\}$ de la forme

$$V_o = \sum_{k=o}^{\mu} c_k A_k \ , c_\mu = 1$$

(Voir aussi Komatsu [5], p.18).

3) Solutions de $Dv = 0$ dans l'espace $\mathcal{H}'_{\mu+1,s}$.

Nous allons montrer, par une méthode semblable à celle de Méthée, que, dans l'espace $\mathcal{H}'_{\mu+1,s}$, les solutions de $Dv = 0$ constituent un espace vectoriel de dimension 1.

Les formules du paragraphe précédent définissant les distributions S^+ et S^- définissent, lorsque la fonction φ est dans $\mathcal{H}_{\mu+1,s}$ des éléments de $\mathcal{H}'_{\mu+1,s}$ que nous notons encore S^+ et S^-. Si un élément v de $\mathcal{H}'_{\mu+1,s}$ est solution de $Dv = 0$, ses restrictions aux intervalles $]-T,0[$ et $]0,T[$ sont des solutions ordinaires de $Dv = 0$, si bien que

$$v = c\,S^+ + d\,S^- + V$$

où V est un élément de $\mathcal{H}'_{\mu+1,s}$ de support $\{0\}$,

$$Dv = cDS^+ + dDS^- + DV$$

Commençons par déterminer DS^+ et DS^- : soit φ une fonction de $\mathcal{H}_{\mu,s}$

$$<DS^+,\varphi> = <S^+,D^*\varphi>$$

où $D^*\varphi$ est une fonction de $\mathcal{H}_{\mu+1,s}$ définie par

$$D^*\varphi = -(t\varphi)' + \alpha(t)\varphi$$

en effectuant une intégration par partie nous obtenons

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} t^{-\mu-1}f(t)D^*\varphi(t)dt = \varepsilon^{-\mu}f(\varepsilon)\varphi(\varepsilon)$$

si bien que

$$<DS^+,\varphi> = \underset{\varepsilon\to o}{\mathrm{Pf}}\left[\varepsilon^{-\mu}f(\varepsilon)\varphi(\varepsilon)\right]$$

Nous devons distinguer trois cas

<u>1er cas</u>, $\gamma(t) = Y(t)t^{\mu}$, μ non entier

$$DS^+ = B_o \ , \ DS^- = 0$$

<u>2e cas</u>, $\gamma(t) = Y(t)\,t^{\mu}$, μ entier

$$DS^+ = \sum_{k=o}^{\mu} f_{\mu-k}\,A_k = B_o$$

$$DS^- = (-1)^{\mu}\sum_{k=o}^{\mu} f_{\mu-k}\,A_k$$

où les nombres f_k sont les coefficients de la série de Taylor de f en 0 :

$$f(t) = \sum_{k=o}^{\infty} f_k\,t^k$$

<u>3e cas</u>, $\gamma(t) = t^{\mu}\mathrm{Log}\,|t|$, μ entier

$$DS^+ = \sum_{k=o}^{\mu} f_{\mu-k}A_k$$

$$DS^- = (-1)^{\mu}\sum_{k=o}^{\mu} f_{\mu-k}A_k$$

Ainsi pour que v soit solution de $Dv = 0$ il faut et il suffit que V soit solution de

$$DV = U$$

où U est l'élement de $\mathcal{K}'_{\mu,s}$, de support $\{0\}$

$$U = -c\,DS^{+} - d\,DS^{-}$$

Nous sommes conduits à la question suivante : soit U un élément de $\mathcal{K}'_{\mu,s}$ de support $\{0\}$:

$$U = \sum_{k=o}^{m} a_k A_k + \sum_{k=o}^{m} b_k B_k$$

quels sont les éléments de V de $\mathcal{K}'_{\mu+1,s}$ de support $\{0\}$:

$$V = \sum_{k=o}^{m'} x_k A_k + \sum_{k=o}^{n'} y_k B_k$$

vérifiant

$$DV = U \qquad ?$$

Théorème 5 : 1er cas, $\gamma(t) = Y(t)t^{\mu}$, μ non entier : l'équation $DV = U$ n'admet de solution que si $b_o = 0$, la solution est alors unique.

2e cas, $\gamma(t) = Y(t)t^{\mu}$, μ entier : l'équation $DV = 0$ admet une solution V_o de la forme

$$V_o = \sum_{k=o}^{\mu} c_k A_k, \quad c_{\mu} = 1$$

toute autre solution de $DV = 0$ est proportionnelle à V_o. S'il existe une solution V de $DV = U$, alors $b_o = 0$. Si U est de la forme

$$U = \sum_{k=o}^{\mu} a_k A_k, \qquad a_{\mu} \neq 0$$

l'équation $DV = U$ n'a pas de solution.

3e cas, $\gamma(t) = t^{\mu}\mathrm{Log}|t|$, μ entier : l'équation $DV = 0$ n'admet que la solution nulle. Si U est de la forme

$$U = \sum_{k=o}^{\mu} a_k A_k \,, \quad a_\mu \neq 0$$

l'équation $DV = U$ n'a pas de solution.

Dans le premier et le deuxième cas une fonction φ de $\mathcal{H}_{\mu,y}$ admet en 0 le développement asymptotique

$$\varphi(t) \sim \sum_{k=o}^{\infty} A_k(\varphi)t^k + Y(t)t^\mu \sum_{k=o}^{\infty} B_k(\varphi)t^k$$

la fonction $\Psi = D^*\varphi$ de $\mathcal{H}_{\mu+1,Y}$ admet le développement

$$\Psi(t) = D^*\varphi(t) = -(t\varphi)' + \alpha(t)\varphi$$

$$\sim \sum_{k=o}^{\infty} \left[-(k+1)A_k(\varphi)t^k + \sum_{p=o}^{\infty} \alpha_p A_k(\varphi)t^{p+k}\right]$$

$$+ Y(t)t^\mu \sum_{k=o}^{\infty} \left[-(\mu+k+1)B_k(\varphi)t^k + \sum_{p=o}^{\infty} \alpha_p B_k(\varphi)t^{k+p}\right]$$

Le terme constant dans le dernier crochet est nul car $\alpha_o = \mu + 1$ la fonction Ψ appartient bien à $\mathcal{H}_{\mu+1,y}$ et

$$A_k(\Psi) = -(k+1)A_k(\varphi) + \sum_{j=o}^{k} \alpha_{k-j} A_j(\varphi)$$

$$B_k(\Psi) = -(k+\mu+1)B_k(\varphi) + \sum_{j=o}^{k} \alpha_{k-j} B_j(\varphi)$$

si bien que

$$\langle DV, \varphi\rangle = \sum_{k=o}^{m'} \left[-(k+1)x_k + \sum_{p=k}^{m'} \alpha_{p-k}x_k\right] A_k(\varphi)$$

$$+ \sum_{k=1}^{n'+1} \left[-(k+\mu+1)y_{k-1} + \sum_{p=k}^{n'+1} \alpha_{p-k}y_{p-1}\right] B_k(\varphi)$$

par suite $m = m'$, $n = n' + 1$ et l'équation $DV = U$ est équivalente au système

$$\begin{cases} \text{(I)} \quad -(k+1)x_k + \sum\limits_{p=k}^{m} \alpha_{p-k}\, x_p = a_k, \quad (k=0,1,\dots,m) \\ \qquad\qquad 0 = b_o \\ \text{(II)} \quad -(k+\mu+1)y_{k-1} + \sum\limits_{p=k}^{n} \alpha_{p-k}\, y_{p-1} = b_k\ , \quad (k=1,\dots,n) \end{cases}$$

La matrice du système (I) est triangulaire supérieure avec les nombres suivants sur la diagonale

$$\mu, \mu-1, \dots, \mu-m$$

La matrice du système (II) est également triangulaire supérieure avec les nombres suivants sur la diagonale

$$-1,\ -2, \dots, -n$$

Dans le premier cas, μ n'est pas un entier, les matrices des systèmes (I) et (II) sont inversibles.

Dans le deuxième cas, μ est entier et si $m \geq \mu$ le μ-ième élément diagonal de la matrice du système (I) est nul. La matrice du système II est inversible. Par suite il existe une solution V_o de $DV = 0$

$$V_o = \sum_{k=o}^{\mu} c_k A_k\ , \quad c_\mu = 1$$

où les nombres c_k sont solutions du système

$$-(k+1)c_k + \sum_{p=k}^{\mu} \alpha_{p-k}\, c_p = 0, \quad k=0,1,\dots,\mu$$

et toute autre solution de $DV=0$ est proportionnelle à V_o. Si V est solution de $DV = U$ avec

$$U = \sum_{k=o}^{\mu} a_k\, A_k$$

alors nécessairement les nombres y_k sont nuls, les nombres $x_{\mu+1}, \dots, x_m$ sont également nuls et la μ-ième équation du système (I) s'écrit : $0x_\mu = a_\mu$, donc l'équation $DV=U$ n'admet de solution que si $a_\mu = 0$.

Considérons maintenant le troisième cas. Une fonction φ de $\mathcal{H}_{\mu,L}$ admet le développement asymptotique

$$\varphi(t) \backsim \sum_{k=o}^{\infty} A_k(\varphi)t^k + t^{\mu}\mathrm{Log}|t| \sum_{k=o}^{\infty} B_k(\varphi)t^k$$

La fonction $\Psi = D^{*}\varphi$ de $\mathcal{H}_{\mu+1,L}$ admet le développement

$$\Psi(t) \backsim \sum_{k=o}^{\mu-1} \Big[-(k+1)A_k(\varphi) + \sum_{j=o}^{k} \alpha_{k-j}\, A_j(\varphi)\Big]t^k$$
$$+ \sum_{k=\mu}^{\infty} \Big[-(k+1)A_k(\varphi) + \sum_{j=o}^{k} \alpha_{k-j}A_j(\varphi) - B_{k-\mu}(\varphi)\Big]t^k$$
$$+ t^{\mu}\mathrm{Log}|t| \sum_{k=o}^{\infty} \Big[-(k+\mu+1)B_k(\varphi) + \sum_{j=o}^{k} \alpha_{k-j}\, B_j(\varphi)\Big]t^k$$

On remarque que dans la deuxième somme le terme constant est nul. L'équation $DV = U$ est équivalente au système

$$-(k+1)x_k + \sum_{p=k}^{m} \alpha_{p-k}\, x_p = a_k\ , \qquad k = 0,\ldots,m$$

$$-\ x_{\mu} = b_o$$

$$-x_{k+\mu} - (k+\mu+1)y_{k-1} + \sum_{p=k}^{m} \alpha_{p-k}y_{p-1} = b_k\ ,\ k = 1,\ldots,n$$

La démonstration est analogue à celles que nous avons données dans les deux premiers cas. Nous arrivons maintenant au principal résultat de ce paragraphe.

<u>Théorème 6</u> : <u>Les solutions de l'équation différentielle</u> $DS = 0$ <u>dans l'espace</u> $\mathcal{H}'_{\mu+1,s}$ <u>constituent un espace vectoriel de dimension</u> 1.

<u>1er cas</u> : $\gamma(t) = t^{\mu}Y(t)$, μ <u>non entier</u>. <u>Les solutions sont proportionnelles à</u> S^-.

<u>2e cas</u> : $\gamma(t) = t^{\mu}\,Y(t)$, μ <u>entier</u>. <u>Les solutions sont proportionnelles à</u> V_o.

<u>3e cas</u> : $\gamma(t) = t^{\mu}\,\mathrm{Log}\,|t|$, μ entier. Les solutions sont proportionnelles à $S^+ + (-1)^{\mu+1}\,S^-$.

Un système fondamental des solutions ordinaires de l'équation

$$\text{(E)} \qquad Ly - \lambda y \equiv a(t)y'' + b(t)y' - \lambda y = 0$$

est constitué par la fonction Φ et une fonction W de la forme, si μ n'est pas entier

$$W(t) = |t|^{-\mu}\, W_1(t)$$

et si μ est entier

$$W(t) = \Phi(t)\mathrm{Log}|t| + t^{-\mu}W_1(t)$$

où W_1 est une fonction analytique sur $]-T,T[$.

Théorème 7 : Les solutions dans $\mathcal{H}'_{\mu,s}$ de l'équation

$$\text{(E)} \qquad LS - \lambda S \equiv a(t)S'' + b(t)S' - \lambda S = 0$$

constituent un espace vectoriel de dimension deux. Une base de cet espace est constituée par les élements S_1 et S_2 qui sont

$$S_1(\varphi) = \int_{-T}^{T} \Phi(t)\varphi(t)dt$$

et, dans le 1er cas : $\gamma(t) = t^{\mu}Y(t)$, μ non entier

$$S_2(\varphi) = \underset{\varepsilon \to 0}{\mathrm{Pf}} \left[\int_{-T}^{-\varepsilon} W(t)\varphi(t)dt\right]$$

dans le 2e cas : $\gamma(t) = t^{\mu}Y(t)$, μ entier

$$S_2(\varphi) = \sum_{k=0}^{\mu-1} C_k A_k(\varphi) + D\int_{0}^{T} \Phi(t)\varphi(t)dt$$

où C_k et D sont des constantes, $C_{\mu-1} = 1$,

dans le 3e cas : $\gamma(t) = t^{\mu}\mathrm{Log}|t|$, μ entier

$$S_2(\varphi) = \underset{\varepsilon \to 0}{\mathrm{Pf}} \left[\int_{-T}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{T} W(t)\,\varphi(t)dt\right]$$

Pour que S soit solution de $LS = \lambda S$ il faut et il suffit que $\tilde{S} = [\Phi(t)^{-1}S]'$ soit solution de $D\tilde{S} = 0$, ainsi, du théorème 6, il résulte par intégration que l'espace des solutions (E) dans $\mathcal{H}'_{\mu,s}$ est de dimension 2 et en utilisant la formule d'intégration par partie

$$\int_\alpha^\beta [u\,L^*\varphi - \varphi\,Lu]\,dt = [\varphi,u](\beta) - [\varphi,u](\alpha)$$

avec

$$[\varphi,u] = a(t)(\varphi'u - \varphi u') + [a'(t) - b(t)]\varphi u$$

que S_1 et S_2 constituent une base de l'espace des solutions de l'équation (E).

§ IV. DISTRIBUTIONS SPHERIQUES DES ESPACES PSEUDO-EUCLIDIENS ET DES HYPERBOLOÏDES

1) Dans le cas des espaces pseudo-euclidiens, la fonction Q a une seule valeur critique : 0. L'équation différentielle $LS = \lambda S$ est l'équation de Bessel

$$4t\,S'' + 4(\mu+1)S' - \lambda S = 0$$

Théorème 8 : Pour tout λ l'espace des distributions sphériques sur un espace pseudo-euclidien, relativement à la valeur propre λ est de dimension 2.

C'est une conséquence directe du théorème 7. Un résultat analogue a été démontré par Méthée [8] pour $p = 1$ (théorèmes 5 et 6). Dans [1] Cérézo démontre que les hyperfonctions u sur $\mathbb{R}^{p+q}$ solutions de $\Box u = \lambda u$, invariantes par $O(p,q)$ constituent aussi un espace de dimension 2 (théorème 32). Ainsi toute hyperfonction sphérique est une distribution sphérique, ce qui, d'après Cérézo (communication privée) peut être établi directement.

2) Dans le cas des hyperboloïdes la situation est moins simple car la fonction Q possède deux valeurs critiques : -1 et +1. Si S est un élément de $\mathcal{K}'$ solution de

$$LS - \lambda S \equiv (t^2 - 1)S'' + 2(\mu+1)tS' - \lambda S = 0$$

la restriction de S à chacun des trois intervalles $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ et $]1,\infty[$ est une solution ordinaire, et le théorème 7 implique certaines conditions de raccordement de ces solutions en -1 et en 1, qui conduisent à un problème aux valeurs propres du type de Sturm-Liouville.

Théorème 9 : Soit d la dimension de l'espace des distributions sphérique sur l'hyperboloïde $O(p+1,q)/O(p,q)$, relativement à la valeur propre λ.

a) Si q est impair, alors, pour tout λ, $d = 2$.

b) Si q est pair, alors, pour $\lambda \neq m(m+p+q-1)$ $(m = 0,1,2,\ldots)$, $d = 2$, et pour $\lambda = m(m+p+q-1)$ $(m = 0,1,2,\ldots)$, $d = 3$.

Notons $\mathcal{H}'_\lambda$ le sous-espace des éléments de $\mathcal{H}'$ solutions de $LS = \lambda S$, et $\mathcal{E}_\lambda$ l'espace des solutions ordinaires de $Lu = \lambda u$ sur $]-1,1[$.

Si S est un élément de $\mathcal{H}'_\lambda$ sa restriction à $]-1,1[$ est une solution ordinaire, notons ρ cette application restriction

$$\rho : \mathcal{H}'_\lambda \to \mathcal{E}_\lambda .$$

Du théorème 7 nous déduisons

a) Si q est impair, il n'existe pas d'élément de $\mathcal{H}'_\lambda$ nul sur $]-1,1[$ donc ρ est injective. De plus, toute fonction de $\mathcal{E}_\lambda$ se prolonge en un élément de $\mathcal{H}'_\lambda$, c'est à dire que ρ est surjective. Ainsi ρ est un isomorphisme

$$d = \dim \mathcal{H}'_\lambda = \dim \mathcal{E}_\lambda = 2$$

b) Si q est pair, l'espace des éléments de $\mathcal{H}'_\lambda$ nuls sur $]-1,1[$ est de dimension 2 :

$$\dim \ker(\rho) = 2$$

De plus pour qu'une fonction u de $\mathcal{E}_\lambda$ se prolonge en un élément de $\mathcal{H}'_\lambda$ il faut et il suffit que u soit régulière en 1 et -1, par suite, si u n'est pas identiquement nulle, u est un polynôme ultrasphérique. Si m est son degré, $\lambda = m(m+p+q-1)$, donc, si $\lambda \neq m(m+p+q-1)$ $(m=0,1,2...)$ $\dim \operatorname{Im}(\rho) = 0$ et

$$\dim \mathcal{H}'_\lambda = \dim \ker(\rho) + \dim \operatorname{Im}(\rho) = 2$$

si $\lambda = m(m+p+q-1)$ $(m=0,1,2,...)$ $\dim \operatorname{Im}(\rho) = 1$ et

$$\dim \mathcal{H}'_\lambda = \dim \ker(\rho) + \dim \operatorname{Im}(\rho) = 3$$

($\operatorname{Im}(\rho)$ désigne l'espace image de l'application ρ).

Dans [10] Molcanov explicite pour q impair une base de l'espace des distributions sphériques.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Cerezo : Equations with constant coefficients invariant under a group of linear transformations. Trans. A. M. S. 204 (1975) 267-298.

[2] G. De Rham : Solution élémentaire d'opérateurs différentiels du second ordre. Ann. Inst. Fourier 8 (1958) 337-366.

[3] S. Helgason : Analysis on Lie groups and homogeneous spaces. Regional conference series, AMS n° 14 (1972).

[4] P. Jeanquartier : Développement asymptotique de la distribution de Dirac attachée à une fonction analytique. C. R. Acad. Sc. Paris 271 (9/12/70) 1159-1161 (série A).

[5] H. Komatsu : An introduction to the theory of hyperfunctions. Hyperfunctions and Pseudo-differential equations, Lecture notes in Math., vol. 287, Springer 1973.

[6] H. M. Maire : Sur les distributions images réciproques par une fonction analytique. C. R. Acad. Sc. 281 (22/9/75) 427-430 (série A)

[7] H. M. Maire : Sur les distributions images réciproques par une fonction analytique. Thèse, Genève 1975.

[8] P. D. Méthée : Sur les distributions invariantes dans le groupe des rotations de Lorentz. Commentarii Mathematici Helvetici 28 (1954) 225-269.

[9] P. D. Méthée : Systèmes différentiels du type de Fuchs en théorie des distributions. Commentarii Mathematici Helvetici 33 (1959) 38-46.

[10] V. F. Molcanov : Analogue of the Plancherel formula for hyperboloïds. Soviet Math. Dokl. 9 (1968) 1382-1385.

[11] A. Tengstrand : Distributions invariant under an orthogonal group of arbitrary signature. Math. Scand. 8 (1960) 201-218.