Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

R. Beals

Équations d'évolution du type hyperbolique non strict

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1976-1977), exp. n° 2, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1976-1977____A2_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 6 - 1 9 7 7

EQUATIONS D'EVOLUTION DU TYPE HYPERBOLIQUE NON STRICT

par R. BEALS

19 Octobre 1976

Exposé N° II

Dans cet exposé nous esquissons une théorie abstraite pour des équations linéaires d'évolution du type "hyperbolique non strict" abstrait, avec une application aux équations aux dérivées partielles de ce type.

§ 1. UNE EQUATION ABSTRAITE INDEPENDANTE DU TEMPS

On cherche u(.), à valeurs dans un espace de Banach X, tel que

(1) $$u'(t) = -Au(t)\ ,\ t \geq 0;\ u(0) = u_o\ .$$

L'opérateur A est supposé fermé, avec domaine D(A) dense dans X. On considère formellement

(2) $$U(t) = \exp(-tA) = (2\pi i)^{-1}\int_\Gamma e^{-\lambda t} R_\lambda d\lambda\ ;$$

ici $R_\lambda = (\lambda I - A)^{-1}$ est la résolvante et Γ est une courbe convenable qui entoure le spectre de A. Pour une classe de problèmes hyperboliques on obtient le problème (1) avec A tel que

(3) R_λ existe et satisfait $\|R_\lambda\| \leq C_o(1+|\lambda|)^{\eta-1}$ quand $\lambda \in \Omega = \{\lambda : \mathrm{Re}\,\lambda \leq -C_1|\mathrm{Im}\,\lambda|^a\}$; les constantes a, η sont dans $[0,1[$.

(4) On a $\|R_\lambda\| \leq C_2(1-\lambda)^{-1}$ quand $\lambda \leq 0$.

Dans un tel cas on prend Γ = frontière d'Ω, et on voit tout de suite que la formule (2) n'a aucun sens. Cependant, on peut introduire un facteur de convergence. Prenons $b \in]a,1[$, et posons $h_\delta(\lambda) = \exp(-\delta\lambda^b)$, $\delta > 0$, $\lambda \in \Omega \cup \Gamma$. Alors les opérateurs $U_\delta(t)$ existent :

$(2)_\delta$ $$U_\delta(t) = (2\pi i)^{-1}\int_\Gamma h_\delta(\lambda)\, e^{-\lambda t} R_\lambda\, d\lambda,\ t \geq 0\ .$$

D'ailleurs, $U_\delta'(t) = AU_\delta(t)$. Donc on peut résoudre (1) pour chaque

$u_o \in Y$, (avec $f \equiv 0$), où

$$Y = \cup_\delta J_\delta(X), \quad J_\delta = U_\delta(0).$$

Y est dense dans X ; en effet $J_\delta u \to u$ comme $\delta \to 0$ si $u \in D(A)$.

L'espace Y est du type LF, muni de la topologie évidente (les J_δ étant injectifs), et A engendre un semi groupe dans Y. On dispose aussi d'une caractérisation intrinsèque : soit

$$\beta = b^{-1} \text{ (donc } \beta \in]1, a^{-1}[, \; M_k = \Gamma(\beta k + 1) \; ;$$

$$\|u\|_\sigma = \sup \sigma^k M_k^{-1} \|A^k u\|, \quad k = 0,1,2,\dots,$$

$$X_\sigma = \{u : \|u\|_\sigma < \infty\}.$$

Alors $Y = \cup_{\sigma > 0} X_\sigma$ est la limite inductive.

Tous ces résultats sont connus [1], mais pour le cas ci-dessous il faut avoir des estimations plus précises. Pour cela nous construisons le semi groupe $(U(t))$ dans Y directement, à partir d'un calcul formel. Parce que $a < 1$, il y a $M > 0$ tel que

$$M.\,\mathrm{Re}(\lambda^a) \geq -\mathrm{Re}\,\lambda + |\lambda|^a + \log C_3, \; \lambda \in \Omega \cup \Gamma.$$

Posons $g(\lambda,t) = (2\pi i)^{-1} \exp(-t\lambda - Mt\lambda^a)$, $\lambda \in \Omega \cup \Gamma$.
Donc

$$2\pi|g(\lambda,t)| \leq C_3 \exp(-t|\lambda|^a), \; \lambda \in \Omega \cup \Gamma.$$

Formellement,

$$\begin{aligned} U(t) &= \int_\Gamma g(\lambda,t)\exp(Mt\lambda^a)R_\lambda d\lambda \\ &= \Sigma\,(n!)^{-1} \int_\Gamma g(\lambda,t)(Mt\lambda^a)^n R_\lambda d\lambda \\ &= \Sigma\, U_n(t). \end{aligned}$$

Les opérateurs $U_n(t)$ sont bien définis sur Y, quelque soit $t > 0$. D'ailleurs on a

$$(5) \qquad U_n(t) = (n!)^{-1} \int_\Gamma g(\lambda,t)(Mt\,\lambda^a)^n \lambda^{-m} R_\lambda A^m d\lambda$$

avec $m = m(n)$ une puissance quelconque -même fractionnelle-. Choisissons $m(n) = an + \eta + \varepsilon$, avec $\varepsilon > 0$ quelconque. Alors (5) définit $U_n(t)$ sur Y aussi quand $t = 0$, et on a

$$(6) \qquad \|A^k U_n(t)u\| \leq C(n!)^{-1}(M_t)^n \|A^{m+k} u\| .$$

On peut montrer (par convexité) que pour tout $m \geq 0$, $\sigma > 0$, $\varepsilon > 0$, on a

$$(7) \qquad \|A^m u\| \leq K_\varepsilon\, \sigma^{-m-\varepsilon} M_{m+\varepsilon} \|u\|_\sigma .$$

(Bien sûr, c'est vrai avec $\varepsilon = 0$, $K_\varepsilon = 1$ quand $m \in \mathbb{Z}_+$). Après du travail, on déduit de (6), (7) l'estimation

$$(8) \qquad \|U(t)u\|_\tau \leq C_{T,\varepsilon}\, \sigma^{-\eta-2\varepsilon}(\log(\sigma/\tau)^{-\gamma})\|u\|_\sigma ,$$

où $\gamma = \beta(\eta + \varepsilon)$, quand $0 < \tau < \sigma$ et

$$(9) \qquad 0 \leq t \leq \max\{T, c\sigma^a \log(\sigma/\tau)\} .$$

Donc on a $U(t) : Y \to Y$ continue. On montre aussi que $U'(t) = AU(t)$. Ecrivons $U(t) = \exp(-tA)$.

§ 2. UNE EQUATION D'EVOLUTION

On considère ici l'équation

$$(10) \qquad u'(t) = -A_t u(t) + f(t),\ t \geq 0 \ ;\ u(0) = u_o .$$

On cherche des opérateurs $U(t,s)$, $t \geq s$, tels que

$$(11) \qquad \frac{\partial}{\partial t} U(t,s) = -A_t U(t,s),\ U(s,s) = I .$$

Rappelons la méthode de Sobolevskii et Tanabe (voir [8]). Le point de départ est la paramétrix

$$U_o(t,s) = \exp(-(t-s)A_s).$$

On cherche U(t,s) dans la forme

$$(12) \qquad U(t,s) = U_o(t,s) + \int_s^t U_o(t,r)\,\Phi(r,s)dr\ .$$

Alors (calcul formel)

$$(13) \qquad 0 = \left(\frac{\partial}{\partial t} + A_t\right)U = \\ = -\Phi_1(t,s) + \Phi(t,s) - \int_s^t \Phi_1(t,r)\,\Phi(r,s)dr,$$

où $\Phi_1(t,s) = -(\frac{\partial}{\partial t} + A_t)U_o = (A_s - A_t)U_o(t,s)$.

L'équation (13) a une solution formelle obtenue par récurrence :

$$(14) \qquad \Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n\ , \qquad \Phi_{n+1}(t,s) = \int_s^t \Phi_1(t,r)\Phi_n(r,s)\,dr.$$

Pour résoudre (11) dans le cadre ici, on suppose que $(A_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est une famille d'opérateurs fermés dans X, qui satisfont uniformément les conditions (3), (4) ci-dessus. On suppose d'ailleurs que

$$D((A_t)^k) = D((A_s)^k), \quad k \in \mathbb{Z}_+\ , \quad s,t \in \mathbb{R}\ .$$

Posons $D = D(A_t)$. On suppose que

$$(15) \qquad C^{-1}\|u\|_D \le \|A_s u\| \le C\|u\|_D, \quad u\in D, \quad s\in\mathbb{R}\ ;$$

$$(16) \qquad \|(A_t - A_s)u\| \le C|t-s|\,\|u\|_D, \quad u\in D, \quad s,t \in \mathbb{R}\ ,$$

où $\|\ \ \|_D$ est une norme sur D. Posons $L_s = [A_s, .\,]$, c'est à dire

$$L_s(B) = [A_s, B] = A_sB - BA_s\ .$$

On suppose que

$$(17) \qquad \|L_s^k(A_t)u\| \leq C\,S^{-k}|t-s|\,M_k\,\|u\|_D\,, \quad u \in D(A_s^{k+1}),$$

où encore $M_k = \Gamma(\beta k+1)$. Enfin, on suppose que les constantes a, β, η ci-dessus satisfont

$$(18) \qquad 1 < \beta < \min\{a^{-1},\ 2(\eta+1)^{-1}\}.$$

Posons

$$\|u\|_{\sigma,s} = \sup\ \sigma^k M_k^{-1}\|\ A_s^k u\|\ ,$$

et soit $X_{\sigma,s}$ l'espace correspondant. Les conditions (15) - (17) entraînent

$$(19) \qquad \|u\|_{\tau,t} \leq \|u\|_{\sigma,s}$$

si

$$(20) \qquad 0<\tau<\sigma \leq \sigma_o < S\ ,\quad |t-s| \leq C_o \log(\sigma/\tau)\ .$$

Nous pouvons supposer que $C_o \leq 1$. D'après (19), on a

$$Y = \cup_{\sigma>0}\ X_{\sigma,s} = \cup_{\tau>0}\ X_{\tau,t}\ ,\quad s,t \in \mathbb{R}\,.$$

Soit Φ_1 comme ci-dessus. Les estimations (8) (15)-(19) impliquent que

$$(21) \qquad \|\Phi_1(t,s)u\|_{\tau,t} \leq K_o|t-s|\ \sigma^{-\eta'}\ \log(\sigma/\tau)^{\delta-2}\,\|u\|_{\sigma,s}\quad ,$$

si (20) est satisfait, où $\eta' = \eta+2\varepsilon$ et $\delta = 2-\beta(\eta+1+\varepsilon)$. Grâce à (18) on peut choisir $\varepsilon>0$ tel que $\delta>0$.

On peut montrer que l'application $(t,s)\mapsto\Phi_1(t,s)$ est continue de $\{t\geq s\geq 0\}$ dans $\mathcal{L}(Y)$, munie de la topologie de la convergence bornée. Donc on peut définir Φ_n par récurrence, comme (14). On obtient des estimations sur les Φ_n par récurrence, à partir de (21) :

$$(22) \qquad \|\Phi_{n+1}(t,s)u\|_{\tau,t} \leq K_\tau^{n+1}\ \Gamma((n+1)\delta)^{-1}(t-s)^{n\delta+1}\log(\sigma/\tau)^{2-\delta},$$

si (20) est satisfait. En effet, on prend $\rho = \rho(r)$ tel que

$$\log(\sigma/\rho)\log(\rho/\tau)^{-1} = (t-r)(r-s)^{-1} ,$$

et on considère

$$\Phi_n(t,r)\,\Phi_1(r,s) : X_{\sigma,s} \to X_{\rho,r} \to X_{\sigma,\tau}$$

en utilisant les estimations pour Φ_1, Φ_n .

On déduit immédiatement de (22) la convergence de la suite (14) qui définit Φ, et on voit que $(t,s) \mapsto \Phi(t,s)$ est continue à $\mathcal{L}(Y)$. Donc on peut définir $U(t,s)$ par (12), et on a la continuité de $(t,s) \mapsto U(t,s)$ et aussi la condition $U(s,s) = I$. Enfin, on voit sans peine que $(\partial/\partial t)U(t,s) = A_t U(t,s)$.

Il en résulte que le problème (10) a une solution.

$$u(t) = U(t,0)u_o + \int_o^t U(t,r)f(r)dr$$

pour quelconque $u_o \in Y$ et quelconque $f \in C([0,\infty[;Y)$.

§ 3. EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES DU TYPE HYPERBOLIQUE

Considérons dans $\mathbf{R}^{n+1} = \{(x,t)\}$ un opérateur

$$P = p(x,t,D_x,D_t) = \sum_{k+|\alpha|\leq m} P_{\alpha k}(x,t)D_x^\alpha D_t^k ,$$

ayant pour symbole principal la fonction p_m. On suppose que $p_{om} \equiv 1$, que p_m est hyperbolique par rapport à t et elliptique uniformément par rapport à x :

$$(x,t,\xi) \in \mathbf{R}^{2n+1} , \ p_m(x,t,\xi,\tau) = 0 \Rightarrow \tau \in \mathbf{R} ;$$

$$|p_m(x,t,\xi,0)| \geq C|\xi|^m, \ (x,t,\xi) \in \mathbf{R}^{2n+1} ,$$

où $C > 0$. On suppose d'ailleurs que les coefficients appartiennent à une classe de Gevrey en x, avec une condition lipschitzienne en t :

$$(23) \qquad \sup_{x,t} |D_x^\gamma p_{\alpha k}| \le C\, S^{-|\gamma|} M_{|\gamma|} \quad , \quad M_k = \Gamma(\beta k + 1) \quad ;$$

$$\sup_x |D_x^\gamma p_{\alpha k}(x,t) - D_x^\gamma p_{\alpha k}(x,s)| \le C|t-s|\, S^{-|\gamma|} M_{|\gamma|} \; .$$

On réduit le problème

$$(24) \qquad Pv = f, \; t > 0 \quad ; \quad D_t^k v(x,0) = g_k(x), \; 0 \le k < m \; ,$$

à un système du premier ordre en t de la forme (10) par la méthode usuelle. On prend pour X l'espace $H^{m-1} \times H^{m-2} \times \ldots \times H^o$. Alors les conditions (3),(4) sont satisfaites (peut être après avoir remplacé A par $A + \lambda_o I$), avec $\eta = 1/2$ et $a = 1 - (2k)^{-1}$, [2]. D'ailleurs (23), (24) et l'ellipticité impliquent (15), (17). Donc si

$$1 < \beta < \max\{4/3 \; , \; 2k(2k-1)^{-1}\} \; ,$$

il y a une (seule) solution de (24) pour chaque (g_k) et f suffisamment réguliers. Dans ce cas l'espace $Y = (G_\beta)^m$, où $G_\beta = G_\beta(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Gevrey des fonctions qui satisfont des inégalités comme (23).

§ 4. REMARQUES

Signalons que des résultats analogues pour les équations hyperbolique non strictes sont dûs à Ohya [6], Leray et Ohya [5], et Steinberg [7], avec des restrictions sur la multiplicité ou la régularité des racines caractéristiques, mais sans la condition gênante d'ellipticité. (On voit par exemple que la condition d'ellipticité n'est pas nécessaire pour les estimations (3), (4) mais le problème est assez délicat). Ivrii a annoncé [3] un résultat plus précis, au moins dans le cas de la régularité de Gevrey par rapport à t, sans aucune condition sur les caractéristiques. Il a annoncé aussi que la résolubilité dans les espaces G_β avec β grand entraîne des conditions du type de Levi sur les termes d'ordre $< m$; [3], [4].

La méthode exposée ici est assez brutale ; elle utilise seulement des estimations pour les résolvantes. En revanche, au moins dans le cas $A_t \equiv A$, elle permet aussi d'obtenir des résultats pour des problèmes mixtes très généraux ; [2].

BIBLIOGRAPHIE

[1] Beals, R., Semigroups and abstract Gevrey spaces, J. Functional Analysis 10 (1972), 300-308.

[2] Beals, R., Hyperbolic equations and systems with multiple characteristics, Arch. Rational Mech. Anal. 48 (1972), 123-152.

[3] Ivrii, V. Ja., Conditions for the correctness in Gevrey classes of the Cauchy problem for nonstrictly hyperbolic operators, Dokl. Akad. Nauk SSSR 221 (1975), 775-777 , Soviet Math. Dokl. 16 (1975), 415-417.

[4] Ivrii, V. Ja., Conditions that the Cauchy problem for hyperbolic operators with characteristics of variable multiplicity be well posed, Dokl. Akad. Nauk SSSR 221 (1975), 1253-1255 : Soviet Math. Dokl.21 (1975), 501-503.

[5] Leray, J., et Ohya, V., Systèmes linéaires hyperboliques non stricts, Deuxième colloque l'Anal. Fonct. Centre Belge Rech. Math., Louvain 1964.

[6] Ohya, V., Le problème de Cauchy pour les équations hyperboliques à caractéristiques multiples, J. Math. Soc. Japan 16 (1964), 268-286.

[7] Steinberg, S., Existence and uniqueness of solutions of hyperbolic equations which are not necessarily strictly hyperbolic, J. Diff. Equations,

[8] Yosida, K., Functional Analysis, 2nd Ed., Springer Verlag, Berlin 1968.