SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

M. KASHIWARA
P. SCHAPIRA

Systèmes micro-hyperboliques

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1976-1977), exp. n° 24, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1976-1977____A23_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 6 - 1 9 7 7

SYSTEMES MICRO-HYPERBOLIQUES

par M. KASHIWARA et P. SCHAPIRA

Exposé n° XXIV

17 Mai 1977

§ 0. INTRODUCTION

Soit M une variété analytique réelle, X un complexifié de M. Nous désignons par $\mathcal{C}_M$ le faisceau des microfonctions sur $T^*_M X$ le fibré conormal à M dans X et par $\mathcal{E}_X$ le faisceau sur T^*X, le fibré cotangent à X, des opérateurs microdifférentiels d'ordre fini (pseudo-différentiels dans l'ancienne terminologie).

Soit $\mathcal{M}$ un système (non nécessairement déterminé) d'équations microdifférentielles, c'est-à-dire un $\mathcal{E}_X$-module cohérent défini sur un ouvert de T^*X, θ un vecteur de $T(T^*X)$. On dit que θ est micro-hyperbolique pour $\mathcal{M}$ si θ n'appartient pas au cône normal à $SS(\mathcal{M})$, la variété caractéristique de $\mathcal{M}$, le long de $T^*_M X$. Les deux principaux résultats sont les suivants :

- soit Ω un ouvert conique de $T^*_M X$ dont la frontière est de classe C^1 en $x \in \partial\Omega$. Soit θ la conormale extérieure à Ω en x. Alors si θ est micro-hyperbolique pour $\mathcal{M}$ les groupes :

$$\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \Gamma_{\bar{\Omega}}(\mathcal{C}_M))_x$$

sont nuls pour tout j.

- soit N une sous-variété analytique réelle de M, Y un complexifié de N dans X, $\mathcal{M}_Y$ le système induit par la restriction de $\mathcal{M}$ à $T^*_M X$ sur Y $\bar{\omega}$ et ρ les applications naturelles de $T^*X \underset{X}{\times} Y$ dans T^*X et dans T^*Y. Alors si les directions conormales à N dans M sont micro-hyperboliques pour $\mathcal{M}$ les morphismes naturels :

$$\rho_* \bar{\omega}^{-1} \mathcal{E}xt^j_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_M) \to \mathcal{E}xt^j_{\mathcal{E}_Y}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{C}_N)$$

sont, pour tout j, des isomorphismes. Autrement dit le problème de Cauchy est bien posé sur N. Ces résultats sont en particulier vrais si on se place sur M identifié à la section nulle de $T^*_M X$, donc quand on remplace $\mathcal{E}_X$ par $\mathcal{D}_X$, l'anneau des opérateurs différentiels sur X et $\mathcal{C}_M$ par B_M, le faisceau des hyperfonctions sur M.

Dans le cas où le système est réduit à un seule équation, $\mathcal{M} = \mathcal{E}_X/\mathcal{E}_X.P$, pour un opérateur (micro-)différentiel P, on retrouve ainsi les résultats de J. M. Bony et P. Schapira [2] et M. Kashiwara et T. Kawai [6].

Nous donnons ici trois applications

1) nous retrouvons et complétons nos résultats antérieurs sur le problème de Cauchy pour deux modules cohérents [8].

2) nous étendons aux systèmes, et même dans le cas d'une seule équation, améliorons,les résultats de J. M. Bony et P. Schapira sur la propagation des singularités [3].

3) nous étendons au cas microlocal un théorème de M. Kashiwara [5] en démontrant que si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{E}_X$-module holonôme, les faisceaux $\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M},\mathcal{C}_M)$ sont localement constants le long d'une stratification de Whitney de $SS(\mathcal{M})$.

§ 1. RAPPELS

Soit W une variété différentiable (de classe C^1), TW l'espace vectoriel tangent à W. Soit V et S deux parties fermées de W.

Définition 1.1 : Le cône normal à S le long de V, $C(S:V)$ est le fibré défini par :

$$C(S:V)_x = \{\theta \in T_xW\ ;\ \exists (a_n)_n,\ (x_n)_n$$

$$(y_n)_n,\quad a_n > 0,\ x_n \in V,\ y_n \in S,\ n \in \mathbb{N},$$

$$x_n \xrightarrow[n]{} x\ ,\quad y_n \xrightarrow[n]{} x \quad \text{et} \quad \theta = \lim_n a_n(y_n - x_n)\}\,.$$

Si V est lisse on écrit, comme dans [8], $C_V(S)$ pour $C(S:V)$. Dans ce cas $C_V(S)$ est un cône fermé de TW invariant par TV : on identifie parfois $C_V(S)$ et son image dans T_VW, l'espace normal à V dans W.

Par exemple si on identifie W à la diagonale Δ de $W\times W$ par la première projection et TW au fibré normal à Δ, on a :

$$C(S:V) \simeq C_\Delta(S\times V)$$

Rappelons quelques constructions de [10].

Soit W une variété de classe C^2, V une sous-variété de classe C^2 de W. On munit $W - V \sqcup T^*_VW$ de la topologie de co-éclaté (cf. [10 chapitre 1 § 2.4] où celle-ci n'est définie que sur $W \sqcup S^*_V W$, S^*_VW désignant le fibré conormal en sphères, mais la topologie de $W - V \sqcup T^*_V W$ est l'image réciproque de la précédente par l'application qui identifie deux points de $T^*_V W$ sur la même orbite de l'action de $\mathbb{R}_+$).

Soit π la projection de $(W - V) \sqcup T^*_V W$ sur W, $\mathcal{F}$ un faisceau sur W. On a pour $(x,\xi) \in T^*_V W$:

$$\left(\mathcal{H}^k_{T^*_V W}(\pi^{-1}\mathcal{F})\right)_{(x,\xi)} = \varinjlim_{U,G} H^k_G(U,\mathcal{F})$$

où U parcourt la famille des voisinages de x dans W, et G la famille des parties fermées de W telle que le cône normal de G le long de V soit contenu dans le cône de $T_V W$ défini par $\{\theta;\ \langle\theta,\xi\rangle > 0\} \cup \{0\}$.

- $\mathcal{H}^k_{T^*_V W}(\pi^{-1}\mathcal{F})$ est un faisceau sur $T^*_V W$, localement constant sur les orbites de l'action de $\mathbb{R}_+$.
- $\mathcal{H}^k_{T^*_V W}(\pi^{-1}\mathcal{F})\ |W \simeq \mathcal{H}^k_V(\mathcal{F})$ (en identifiant W à $T^*_W W$, la section nulle de T^*W).
- On désigne par a l'application antipodale sur T^*W

$$a : (x,\xi) \to (x,-\xi) \cdot$$

- On désigne par $\omega_{V|W}$ le faisceau d'orientation relatif de V dans W.

Soit maintenant X une variété analytique complexe de dimension n, T^*X le fibré vectoriel complexe cotangent à X, ω la 1-forme canonique sur T^*X. Pour un choix de coordonnées locales $(z_1,\ldots,z_n;\zeta_1,\ldots,\zeta_n)$ sur T^*X, on a :

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \zeta_i dz_i$$

A ω est associé l'isomorphisme H de $T^*(T^*X)$ sur $T(T^*X)$ défini par

$$\langle\theta, v\rangle = \langle d\omega,\ v \wedge H(\theta)\rangle$$

pour $v \in T(T^*X)$, $\theta \in T^*(T^*X)$.

On désigne par $\mathcal{O}_X$ le faisceau des fonctions holomorphes sur X. Si Y est une sous-variété analytique complexe de X de codimension d, le faisceau $C^{\mathbb{R}}_{Y|X}$ sur $T^*_Y X$ est défini, avec les notations précédentes, par :

$$\mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{Y|X} = \mathcal{H}^{d}_{T^*_Y X}(\pi^{-1}\mathcal{O}_X)^a .$$

Identifions X à la diagonale de X × X par la première projection et T^*X à $T^*_X(X\times X)$, le fibré conormal à cette diagonale dans $X\times X$.
Le faisceau $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_X$ des opérateurs microlocaux sur T^*X est défini par

$$\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_X = \mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{X|X\times X} \otimes_{\mathcal{O}_{X\times X}} \mathcal{O}^{(o,n)}_{X\times X}$$

où $\mathcal{O}^{(o,n)}_{X\times X}$ désigne le faisceau des formes différentielles holomorphes de type (o,n) sur X × X. Le faisceau $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_X$ est naturellement muni d'une structure d'anneau (unitaire, non commutatif) et

$$\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_X \mid T^*_X X = \mathcal{D}^{\infty}_X$$

en désignant par $\mathcal{D}^{\infty}_X$ le faisceau sur X des opérateurs différentiels d'ordre infini. Les faisceaux $\mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{Y|X}$ sont des faisceaux de $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_X$-modules.
Désignons par γ la projection sur le fibré cotangent projectif :

$$\gamma : T^*X - T^*_X X \to P^*X .$$

Le faisceau d'anneaux des opérateurs microdifférentiels d'ordre infini $\mathcal{E}^{\infty}_X$, est défini par :

$$\mathcal{E}^{\infty}_X \mid T^*X - T^*_X X = \gamma^{-1}\gamma_* \mathcal{E}^{\mathbb{R}}_X$$

$$\mathcal{E}^{\infty}_X \mid T^*_X X = \mathcal{D}^{\infty}_X .$$

On désigne par $\mathcal{E}_X$ le sous-anneau de $\mathcal{E}^{\infty}_X$ des opérateurs d'ordre fini. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{E}_X$-module cohérent, on note $SS(\mathcal{M})$ son support dans T^*X, et on dit aussi que $SS(\mathcal{M})$ est la variété caractéristique de $\mathcal{M}$.

<u>Exemple</u> : Soit (P) une matrice (N,N) d'opérateurs microdifférentiels définis sur un ouvert $\mathcal{U}$ de T^*X. Soit $\mathcal{M} = \mathcal{E}^N_X/\mathcal{E}^N_X(P)$. Il existe [9] une

fonction holomorphe sur $\mathcal{U}$, homogène en ζ, notée det(P), tel que

$$SS(\mathcal{M}) = \{(z,\zeta) \in \mathcal{U} \ ; \ \det(P)(z,\zeta) = 0\} .$$

Si N = 1, det(P) coïncide avec $\sigma(P)$, le symbole principal de P.
Soit Y une variété analytique complexe, φ une application holomorphe de Y dans X. On note $\bar{\omega}$ et ρ les applications canoniques :

$$\bar{\omega} : T^*X \underset{X}{\times} Y \to T^*X$$

$$\rho : T^*X \underset{X}{\times} Y \to T^*Y .$$

Si on identifie Y avec le graphe de φ dans $Y \times X$ et $T^*_Y(Y \times X)$ avec $T^*X \underset{X}{\times} Y$, on définit le $(\rho^{-1}\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_Y, \bar{\omega}^{-1}\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_X)$ bi-module

$$\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_{Y \to X} = \mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{Y|Y\times X} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X^{(\dim X)}$$

et le $(\bar{\omega}^{-1}\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_X, \rho^{-1}\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_Y)$ bi-module

$$\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_{X \leftarrow Y} = \mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{Y|Y\times X} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_Y^{(\dim Y)}$$

et on construit les faisceaux

$$\mathcal{E}^{\infty}_{Y \to X} , \ \mathcal{E}^{\infty}_{X \leftarrow Y}, \ \mathcal{E}_{Y \to X} , \ \mathcal{E}_{X \leftarrow Y} ,$$

de manière analogue .

Si Y est défini par les équations locales réduites $z_1 = \dots = z_\ell = 0$ dans X, on a des isomorphismes (non canoniques) de $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_X$-modules :

$$\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_{Y \to X} \simeq \mathcal{E}^{\mathbb{R}}_X / z_1 \mathcal{E}^{\mathbb{R}}_X + \dots + z_\ell \mathcal{E}^{\mathbb{R}}_X$$

$$\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_{X \leftarrow Y} \simeq \mathcal{E}^{\mathbb{R}}_X / \mathcal{E}^{\mathbb{R}}_X z_1 + \dots + \mathcal{E}^{\mathbb{R}}_X z_\ell$$

(de même en remplaçant $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_X$ par $\mathcal{E}^{\infty}_X$ ou $\mathcal{E}_X$).

Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{E}_X$-module cohérent sur un ouvert $\mathcal{U}$ de T^*X on dit que φ est non caractéristique si ρ est propre (et donc finie) sur $\bar{\omega}^{-1}(SS(\mathcal{M}))$.

Le module $\mathcal{M}_Y$ induit par $\mathcal{M}$ sur Y est défini par :

$$\mathcal{M}_Y = \rho_*(\mathcal{E}_{Y \to X} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{M}) .$$

Si φ est non caractéristique, $\mathcal{M}_Y$ est un $\mathcal{E}_Y$-module cohérent.

Soit maintenant M une variété analytique réelle de dimension n, X un complexifié de M. Le faisceau $\mathcal{C}_M$ des microfonctions sur $T^*_M X$ est défini par :

$$\mathcal{C}_M = \mathcal{H}^n_{T^*_M X}(\pi^{-1}\mathcal{O}_X)^a \otimes \omega_{M|X} .$$

Ce faisceau est naturellement muni d'une structure de $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_X$-module, et à fortiori d'une structure de $\mathcal{E}_X$-module (à gauche).

§ 2. DIRECTIONS MICROCARACTERISTIQUES

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{E}_X$-module cohérent défini sur un ouvert $\mathcal{U}$ de T^*X. Soit V un fermé de $\mathcal{U}$, x un point de $\mathcal{U}$, θ un vecteur de $T_x(T^*X)$.

Définition 2.1 :

a) On dit que θ est non microcaractéristique pour $(\mathcal{M},V)$ si

$$\theta \notin C_x(SS(\mathcal{M}) : V) .$$

b) Si V est la variété caractéristique d'un $\mathcal{E}_X$-module cohérent $\mathcal{N}$ on dit dans ce cas que θ est non microcaractéristique pour $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ (cf.[8]).

c) Si $V = T^*_M X \cap \mathcal{U}$, on dit que θ est microhyperbolique pour $\mathcal{M}$ (cf. [6]).

La définition 2.1c) correspond à la notion de "partially micro-hyperbolic" de [6].

- Si V est une variété analytique complexe involutive, la définition 2.1.a. a été introduite quand $\mathcal{M}$ est réduit à une seule équation, sous une forme différente mais équivalente, par J. M. Bony [1], (cf. [8] pour une discussion plus approfondie de ces notions).

Soit maintenant φ une application holomorphe de Y dans X, $\bar{\omega}$ et ρ les applications naturelles de $T^*X \underset{X}{\times} Y$ dans T^*X et dans T^*Y associées à φ.

<u>Définition 2.2</u> :

- On dit que φ est non microcaractéristique pour $(\mathcal{M},V)$ en x si pour tout vecteur $\theta \in T^*_{\pi(x)}X$, $\theta \neq 0$, tel que $\varphi^*(\theta) = 0$, le vecteur $H(d\pi^*(\theta)) \in T_xT^*X$ est non microcaractéristique pour $(\mathcal{M},V)$.

- Si $V = SS(\mathcal{N})$ on dit que φ est non microcaractéristique pour $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$.

- Si φ est la complexifiée d'une application analytique réelle de N dans M, et si $V = T^*_M X$, on dit que φ est microhyperbolique en x.

- Si $x \in M$, la section nulle de $T^*_M X$ (auquel cas $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_X$-module cohérent) on dit seulement que φ est hyperbolique en x.

- Si N est une sous-variété de M, φ l'injection de N dans M, on dit aussi que c'est N qui est (micro)-hyperbolique pour $\mathcal{M}$.

Il est clair que si x appartient à V et si φ est non micro-caractéristique pour $(\mathcal{M},V)$ en x, φ est non microcaractéristique pour $(\mathcal{M},\{x\})$ et cette dernière assertion entraîne que φ est non caractéristique pour $\mathcal{M}$ en x (la réciproque est fausse).

§ 3. <u>ENONCE DES THEOREMES</u>

On utilise, comme dans [10], le langage des catégories dérivées.

<u>Théorème 3.1</u> : Soit Ω un ouvert de $T^*_M X$ dont la frontière est de classe C^1. Soit θ la conormale extérieure à $\bar{\Omega}$ en $x \in \partial\Omega$. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{E}_X$-module à gauche cohérent, défini au voisinage de x. On suppose $H(\theta)$ micro-hyperbolique pour $\mathcal{M}$. Alors :

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathbb{R}\Gamma_{\bar{\Omega}}(\mathcal{C}_M))_x = 0 .$$

<u>Corollaire 3.2</u> : Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module à gauche cohérent sur M. Soit Ω un ouvert de M dont la frontière est de classe C^1, et la conormale θ en $x \in \partial\Omega$ est hyperbolique pour $\mathcal{M}$. Alors

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\Gamma_{\bar{\Omega}}(B_M))_x = 0 \ .$$

Remarquons que le théorème 3.1 (et son corollaire) s'étend immédiatement, par des méthodes purement géométriques, au cas d'ouverts plus généraux, et admet des versions globales.

<u>Théorème 3.3</u> : Soit N et M deux variétés analytiques réelles, φ une application analytique de N dans M, qui se prolonge en une application holomorphe de Y dans X, les complexifiés de N et M. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{E}_X$-module à gauche cohérent défini sur un ouvert $\mathcal{U}$ de T^*X. On suppose :

(3.1) φ est micro-hyperbolique sur $\mathcal{U}$

(3.2) $\bar{\omega}^{-1}(\mathcal{U}) \cap \bar{\omega}^{-1}(SS(\mathcal{M})) \cap \rho^{-1}(T^*_N Y) \subset \bar{\omega}^{-1}(T^*_M X)$

Alors l'homomorphisme naturel

$$\rho_* \bar{\omega}^{-1} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M},\mathcal{C}_M) \to \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_Y}(\mathcal{M}_Y,\mathcal{C}_N)$$

est un isomorphisme.

Remarquons que, sous l'hypothèse (3.1) on peut toujours en diminuant $\mathcal{U}$ sans changer $\bar{\omega}^{-1}(\mathcal{U})$, supposer (3.2) satisfaite. Cette hypothèse signifie donc simplement qu'il ne faut pas compter de points de $SS(\mathcal{M})$ hors de $T^*_M X$ dans le calcul de $\mathcal{M}_Y$.

<u>Corollaire 3.4</u> : Soit φ une application analytique de N dans M. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module à gauche cohérent. On suppose φ hyperbolique pour $\mathcal{M}$. Alors l'homomorphisme naturel :

$$\varphi^{-1}(\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},B_M) \to \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y,B_N)$$

est un isomorphisme.

Ces théorèmes avaient été démontrés quand $\mathcal{M}$ est réduit à une équation, par J. M. Bony et P. Schapira [2] dans le cas différentiel, puis par M. Kashiwara et T. Kawai [6] dans le cas micro-différentiel.

§ 4. PRINCIPE DE LA DEMONSTRATION

Soit $\mathcal{U}^+$ l'ouvert de $\mathbb{C}^n$ défini dans les coordonnées $(z_1,\dots,z_n)$, $z = x+iy$, par :

$$\mathcal{U}^+ : x_n > \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2$$

Soit S la frontière de $\mathcal{U}^+$, i l'injection de $\mathcal{U}^+$ dans $\mathbb{C}^n$. On pose :

$$C_S^- = (i_* \mathcal{O}_X/\mathcal{O}_X)|_S$$

(On considère en fait C_S^- comme un faisceau sur l'ensemble $T_S^-X = \{(z,\zeta) \in T_S^*X,\ z \in S,\ \zeta = \lambda ds,\ \lambda < 0\}$ où $s(z) = x_n - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2$).

Le faisceau C_S^- est naturellement muni d'une structure de $\mathcal{E}_X$-module, et il est connu que l'on peut trouver une transformation canonique complexe Φ qui échange (localement, en dehors de T_X^*X) T_M^*X et T_S^-X et que l'on peut définir au-dessus de Φ un isomorphisme de $\mathcal{E}_X$-module, $\hat{\Phi}$, de $\mathcal{C}_M$ sur C_S^-.

On peut faire opérer les opérateurs microdifférentiels sur les classes de fonctions holomorphes de la manière suivante.
Soit G un cône convexe fermé propre de $\mathbb{C}^n$. On dit qu'un ouvert D est G-rond si

$$(D+G) \cap (D-G) = D$$

et qu'un ouvert Ω est G-ouvert si

$$\Omega + G = \Omega \ .$$

A G on associe le fermé Z de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$:

$$Z = \{(u,v) \; ; \; v - u \in G\}$$

et on pose, pour D ouvert G-rond :

$$\mathcal{E}(G,D) = H^n_Z(D \times D, \mathcal{O}^{(o,n)}_{X \times X})$$

Il est facile de voir que $\mathcal{E}(G,D)$ a une structure naturelle d'anneau, et que si Ω_o et Ω_1 sont deux ouverts de $\mathbb{C}^n$, avec

$$\Omega_o \subset \Omega_1, \; \Omega_1 - \Omega_o \subset\subset D,$$

$$(\Omega_1 + G) - (\Omega_o + G) = \Omega_1 - \Omega_o$$

les groupes $H^k_{\Omega_1 - \Omega_o}(\Omega_1, \mathcal{O}_X)$ ont une structure naturelle de $\mathcal{E}(G,D)$-module.

Enfin en désignant par G^o le polaire de G, on a un homomorphisme d'anneaux de $\mathcal{E}(G,D)$ dans $\Gamma(D \times (-G^o), \mathcal{E}^{\mathbb{R}}_X)$.

On choisit alors, dans un voisinage du point $(0;0,\dots,1)$ de $T^*(\mathbb{C}^n)$, une résolution de $\mathcal{M}$ par des modules libres de type fini sur $\mathcal{E}(G,D)$ pour un choix convenable de D et G. Soit $\mathcal{M}^{\cdot}$ cette résolution.

L'outil principal est un "théorème de prolongement " qui assure que les groupes

$$\mathrm{Ext}^j_{\mathcal{E}(G,D)}(\mathcal{M}^{\cdot}, H^k_{\Omega_1 - \Omega_o}(\Omega_1, \mathcal{O}_X))$$

sont nuls pour tout j, quand les ouverts Ω_1 et Ω_o vérifient certaines conditions, dont la principale est qu'il existe une famille croissante d'ouverts $(\Omega_t)_{t \in [0,1]}$ telle que le fibré conormal à $\partial\Omega_t$ ne rencontre pas $SS(\mathcal{M})$ au-dessus de $\overline{\Omega_1 - \Omega_o}$ pour $t < 1$. La démonstration du théorème 3.1 est alors un problème purement géométrique, pas très différent de celui de [2].

Pour la démonstration du théorème 3.3, on introduit le faisceau C^-_Σ construit comme C^-_S, mais à partir de l'ouvert

$$\mathcal{V}^+ : x_n > \sum_{i=2}^{n-1} x_i^2$$

de frontière Σ.

Le faisceau C_Σ^- correspond à un faisceau de microfonctions avec un paramètre holomorphe, et il est connu [7 proposition 3] que le problème de Cauchy est bien posé dans ce cas (il s'agit en fait plutôt du théorème de division de Weierstrass, mais "microlocalement" ces deux théorèmes ne sont pas très différents). Il suffit alors de démontrer l'isomorphisme

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, C_S^-)|S \cap \Sigma \simeq \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, C_\Sigma^-)|S \cap \Sigma\ [+1]$$

qui résulte du théorème de prolongement.

§ 5. APPLICATIONS I

Le théorème 3.3 permet de retrouver rapidement le théorème principal de [8] que nous rappelons :

Théorème 5.1 : Soit Y et X deux variétés analytiques complexes, φ une application holomorphe de Y dans X. Soit $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{E}_X$-modules à gauche cohérents définis sur un ouvert $\mathcal{U}$ de T*X. On suppose φ non microcaractéristique pour $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ sur $\mathcal{U}$. Alors l'homomorphisme naturel :

$$\bar{\omega}^{-1}\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N}^{\mathbb{R}}) \to \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{E}_{X\leftarrow Y}) \overset{L}{\otimes}_{\rho^{-1}\mathcal{E}_Y} (\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_{Y\to X} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{N})[d]$$

est un isomorphisme.

On a posé : $d = \dim_{\mathbb{C}} X - \dim_{\mathbb{C}} Y$

$$\mathcal{N}^{\mathbb{R}} = \mathcal{E}_X^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{N}$$

Enonçons un corollaire du théorème 5.1 utile dans les applications.

Corollaire 5.2 [8] : Soit X une variété analytique complexe, Y une sous-variété de X, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{D}_X$-modules à gauche cohérents. On suppose Y non caractéristique pour $\mathcal{M}$ et pour $\mathcal{N}$. Soit $\mathcal{N}'$ un $\mathcal{D}_Y$-module à gauche cohérent, ψ un homomorphisme de $\mathcal{N}_Y$ dans $\mathcal{N}'$. Soit $x_0 \in Y$. On suppose :

a) pour tout point $x^* \in (T^*_{x_0}X - \{x_0\}) \cap (SS(\mathcal{M}))$ l'homomorphisme induit par ψ :

$$\mathcal{E}_{Y \to X, x^*} \otimes_{\mathcal{D}_{X,x_o}} \mathcal{N} \to \mathcal{E}_{Y,\rho(x^*)} \otimes_{\mathcal{D}_{Y,x_o}} \mathcal{N}'$$

est un isomorphisme.

b) Y est non microcaractéristique pour $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ sur $T^*X - T^*_X X$.

c) Pour toute variété analytique complexe W, tout $w \in W$, tout j, l'application linéaire :

$$\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X\times W})_{(x_o,w)} \to \mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{O}_Y, \mathcal{N}' \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y\times W})_{(x_o,w)}$$

est un isomorphisme.

Alors l'application

$$\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N}^\infty)_{x_o} \to \mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{N}'^\infty)_{x_o}$$

est un isomorphisme.

Ce corollaire permet immédiatement de généraliser aux systèmes les résultats de [4]. (Remarquons que même si le système est réduit à une équation notre hypothèse est plus faible que celle de [4]).

Le théorème 3.1 permet de démontrer le théorème suivant que l'on n'avait pu obtenir par la méthode purement complexe de [8].

<u>Théorème 5.3</u> : Soit Ω un ouvert de T^*X dont la frontière est de classe C^1. Soit $x \in \partial\Omega$, θ la conormale à Ω en x. Soit $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{E}_X$-modules cohérents définis au voisinage de x. On suppose θ non microcaractéristique pour $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$. Alors

$$\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathbf{R}\Gamma_{\overline{\Omega}}(\mathcal{N}^{\mathbf{R}}))_x = 0$$

Remarquons que les théorèmes 5.1 et 5.3 (pour un ouvert Ω invariant par l'action de $\mathbb{C}^*$) sont encore vrais en remplaçant $\mathcal{N}^{\mathbf{R}}$ par $\mathcal{N}^\infty = \mathcal{E}^\infty_X \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{N}$.

Exemple : Soit $X = \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q$, muni des coordonnées (x,t). Soit P un opérateur différentiel d'ordre m dont la partie principale s'écrit comme un polynôme (à coefficients holomorphes sur X) en $D_{x_1},\dots,D_{x_p}$, $\varphi(t)D_{t_1},\dots,\varphi(t)D_{t_q}$, pour une fonction holomorphe $\varphi(t)$ (indépendante de x, $\varphi \not\equiv 0$). Soit S l'hypersurface (éventuellement singulière) d'équation $\varphi = 0$ dans X. Soit Y l'hypersurface $x_1 = 0$, supposée non caractéristique . On a montré dans [8] que le problème de Cauchy à données holomorphes dans $X - S$ au voisinage de Y était bien posé sur Y. On peut démontrer de la même manière, grâce au théorème 5.3 : soit Ω un ouvert pseudo-convexe dont la frontière, de classe C^1, passe par 0, et admet $(1,0\dots0)$ comme normale en 0. Alors :

si $f \in \mathcal{O}(\Omega - S \cap \Omega)$, $Pf = 0$, f se prolonge à $\mathcal{O}(X - S)$, au voisinage de 0.

si $g \in \mathcal{O}(\Omega - S \cap \Omega)$, il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de 0, et $f \in \mathcal{O}((\Omega - S \cap \Omega) \cap \mathcal{U})$ solution de $Pf = g$.

§ 6. APPLICATIONS II

Le théorème 3.3 permet d'étendre aux systèmes et d'améliorer les résultats de [3].

Soit M une variété analytique réelle, X un complexifié de M, N une sous-variété analytique réelle de X contenant M, tels que dans des coordonnées locales de X, $M \simeq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, $N \simeq \mathbb{C}^p \times \mathbb{R}^q$. On pose :

$$\tilde{\Lambda} = T^*_N X \quad , \quad \Lambda = \tilde{\Lambda} \cap T^*_M X$$

et on définit le faisceau $\mathcal{C}_{N|X}$ sur $T^*_N X$ de manière analogue au faisceau $\mathcal{C}_M$.

Théorème 6.1 : Avec les notations précédentes, soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{E}_X$-module à gauche cohérent défini sur un ouvert $\mathcal{U}$ de T^*X. On suppose que :

$$\forall\, \theta \in T_\Lambda(T^*_M X) \ , \quad \theta \neq 0$$

θ est non microcaractéristique pour $(\mathcal{M},\tilde{\Lambda})$. Alors le morphisme naturel :

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M},\mathcal{C}_{N|X}|\Lambda) \to \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M},\mathcal{C}_M|\Lambda)$$

est un isomorphisme.

Corollaire 6.2 : Soit Λ une sous-variété involutive de $T^*_M X$, $\Lambda^{\mathbb{C}}$ la complexifiée de Λ dans T^*X, $\widetilde{\Lambda}$ la réunion des bicaractéristiques de $\Lambda^{\mathbb{C}}$ issues de Λ. On suppose que :

$$\forall\ \theta \in T_\Lambda(T^*_M X)\ ,\quad \theta \neq 0$$

θ est non microcaractéristique pour $(\mathcal{M},\widetilde{\Lambda})$. Alors si u est une section de $\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M},\mathcal{C}_M|\Lambda)$, le support de u est réunion de feuilles bicaractéristiques de Λ.

Pour démontrer le théorème 6.1, on peut considérer les éléments de $\mathcal{C}_{N|X}$ comme des microfonctions sur $\mathbb{C}^p \times \mathbb{R}^q$ holomorphes en $z_1,\dots,z_p$. Il faut alors démontrer que si l'on "ajoute" au module $\mathcal{M}$ les équations de Cauchy-Riemann $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} u = 0,\dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_p} u = 0$, M est micro-hyperbolique dans $\mathbb{C}^p \times \mathbb{R}^q$ pour ce nouveau système, et appliquer le théorème 3.3. Ces résultats généralisent ceux de [3]. Remarquons cependant que le principe de la démonstration, qui consiste à montrer que les solutions du système sont holomorphes le long des bicaractéristiques, est le même que dans [3]. Montrons sur un exemple que (même dans le cas d'une seule équation) notre hypothèse est plus faible que celle de [3].

Exemple : Soit $M = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, P un opérateur différentiel du deuxième ordre dont le symbole principal s'écrit dans les coordonnées $(x,t;\xi,\tau)$: $P_2(x,t,\xi,\tau) = Q_2(x,t,\xi) + R_2(t,\xi,\tau)$ avec :

$$Q_2(x,t,\xi) \geq c\,|\xi|^2 \text{ pour une constante } c > 0$$

$$R_2(t,\xi,\tau) \geq 0$$

Soit Λ la variété de $T^*_M X$ d'équation $\xi = 0$. Il existe $h > 0$ tel que :

$$\begin{cases} |\xi| > h[\,|\Delta t| + |\Delta\xi| + |\Delta\tau|\,], \\ \Rightarrow P_2(x+iy,\ t+i\Delta t;\ \xi+i\Delta\xi,\ \tau+i\Delta\tau) \neq 0 \end{cases}$$

(dans un voisinage de Λ). Autrement dit les hypothèses du théorème 6.1 sont satisfaites. Par exemple les singularités analytiques des hyperfonctions sur $\mathbb{R}^3$ solutions de $(D_x^2 + D_{t_1}^2 + (t_1^2+t_2^2)D_{t_2}^2)u = 0$ se propagent sur la droite $t_1 = t_2 = 0$.

§ 7. APPLICATIONS III

Théorème 7.1 : Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{E}_X$-module cohérent à gauche sur un ouvert $\mathcal{U}$ de T^*X. On suppose $\mathcal{M}$ holonôme (i.e. : $SS(\mathcal{M})$ lagrangien dans T^*X). Il existe alors une stratification de $T^*_M X$, vérifiant les conditions de Whitney telle que les faisceaux

$$\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_M)$$

soient localement constants sur chaque strate.

La démonstration est analogue dans son principe à celle de [5] concernant le cas différentiel complexe ($\mathcal{O}_X$ remplaçant $\mathcal{C}_M$) les directions micro-hyperboliques jouent ici le rôle que jouaient les directions non caractéristiques dans [5]. De la même manière on déduit du théorème 5.3 :

Théorème 7.2 : Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{E}_X$-modules cohérents holonômes sur $\mathcal{U} \subset T^*X$. Il existe une stratification (complexe) de $\mathcal{U}$, satisfaisant les conditions de Whitney, telle que les faisceaux

$$\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N}^{\mathbb{R}}) \quad \text{et} \quad \mathcal{E}xt^j_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N}^{\infty})$$

soient localement constants sur chaque strate.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. M. Bony : Extension du théorème de Holmgren. Seminaire Goulaouic-Schwartz 75-76, exposé 17.

[2] J. M. Bony et P. Schapira : Solutions hyperfonctions du problème de Cauchy. Lecture Notes in Math. 287, Springer , 92-98 (1973).

[3] J. M. Bony et P. Schapira : Propagation des singularités analytiques pour les solutions des équations aux dérivées partielles. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 26,1, 81-140 (1976).

[4] Y. Hamada, J. Leray, C. Wagschal : Systèmes d'équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples : Problème de Cauchy ramifié, hyperbolicité partielle. J. Math. Pures et Appl. 55, 297-352 (1976).

[5] M. Kashiwara : On the maximally overdetermined systems of linear differential equations I. Publ. RIMS, Kyoto Univ. 10, 563-579 (1975).

[6] M. Kashiwara, T. Kawai : Micro-hyperbolic pseudo-differential operators I. J. Math. Soc. Japan, Vol. 27, n°3, 359-404 (1975).

[7] M. Kashiwara, T. Kawai : On the boundary value problem for elliptic systems of linear differential equations, II. Proc. Japan Acad. 49, 164-168 (1973).

[8] M. Kashiwara, P. Schapira : Problème de Cauchy pour les systèmes d'équations différentielles et micro-différentielles dans le domaine complexe. Seminaire Goulaouic-Schwartz 76-77, exposé XX et article à paraître.

[9] M. Sato, M. Kashiwara : The determinant of matrices of pseudo-differential operators. Proc. Japan Acad. 51, 17-19 (1975).

[10] M. Sato, M. Kashiwara, T. Kawai : Hyperfunctions and pseudo-differential equations. Lecture Notes in Math. 287, Springer 265-529 (1973).