Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

R. Beals

Opérateurs invariants hypoelliptiques sur un groupe de Lie nilpotent

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1976-1977), exp. nº 19, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1976-1977____A18_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 6 - 1 9 7 7

OPERATEURS INVARIANTS HYPOELLIPTIQUES SUR UN GROUPE DE LIE NILPOTENT

par R. BEALS

Exposé n° XIX   19 Avril 1977

Nous esquissons une généralisation et une amélioration du théorème de Rockland sur les opérateurs invariants homogènes sur le groupe de Heisenberg.

Soit G un groupe de Lie, réel, connexe, avec algèbre de Lie $\underline{G}$. Il y a une action de G sur $\mathcal{E}(G)$ par translations à gauche : $u_g(h) = u(g^{-1}h)$. Un opérateur linéaire différentiel $P : \mathcal{E}(G) \to \mathcal{E}(G)$ est dit <u>invariant</u> (à gauche) si $P(u_g) = (Pu)_g$, pour chaque $u \in \mathcal{E}(G)$ et $g \in G$. On peut identifier $\underline{G}$ avec l'algèbre de Lie de champs de vecteurs invariants sur G par

$$(Xu)(g) = \frac{d}{dt} u(g \exp(tX))\Big|_{t=o} .$$

Celle-ci étend à une identification de l'algèbre universelle enveloppante $\underline{U}$ de $\underline{G}$ avec l'algèbre de tous les opérateurs invariants.

Soit $\pi : G \to L(H)$ une représentation unitaire (fortement continue) de G dans l'algèbre d'opérateurs sur un espace hilbertien H. Celle-ci étend à $\underline{G}$: π_X est le générateur infinitésimal du groupe unitaire $(\pi_{\exp(tX)})_{t \in \mathbb{R}}$. Soit $\mathcal{S}_\pi$ le plus grand sous-espace de H contenu dans le domaine de π_X pour chaque $X \in \underline{G}$ et invariant pour π_X. $\mathcal{S}_\pi$ est un sous-espace dense dans H, et l'application $X \mapsto \pi_X$ étend à une application $P \mapsto \pi_P$ de $\underline{U}$ dans l'algèbre d'opérateurs de $\mathcal{S}_\pi$ dans $\mathcal{S}_\pi$.

Soit $(\delta_\rho)_{\rho>0}$ un groupe d'automorphismes de G tel que $\delta_\rho \delta_\sigma = \delta_{\rho\sigma}$ et tel que l'application $(\rho, g) \mapsto \delta_\rho(g)$ est continue de $\mathbb{R}_+ \times G$ dans G. Il existe alors un groupe d'automorphismes de $\underline{G}$, notés aussi par δ_ρ, tel que

$$\delta_\rho(\exp X) = \exp(\delta_\rho X).$$

On dit que $(\delta_\rho)_{\rho>0}$ est un groupe de <u>dilatations</u> sur G si le générateur de ce groupe est diagonalisable avec spectre positif ; autrement dit, il existe une base (X_j) pour $\underline{G}$ tel que $\delta_\rho(X_j) = \rho^{\delta_j} X_j$, avec $\delta_j > 0$. Si G admet un groupe de dilatations, alors G est nilpotent et l'application exponentielle est un difféomorphisme de $\underline{G}$ sur G. On va appeler l'ensemble des δ_j les <u>poids</u> du groupe (δ_ρ) ; après un changement d'échelle on peut toujours supposer que le poids minimal soit 1.

Les automorphismes δ_ρ de $\underline{G}$ étendent à $\underline{U}$. On dit que $P \in \underline{U}$ est <u>homogène</u> de degré m si

$$\delta_\rho(P) = \rho^m P \ , \quad \forall \rho > 0.$$

Ceci équivaut à

$$P(u \circ \delta_\rho) = \rho^m (Pu).\delta_\rho \ , \ u \in \mathcal{E}(G).$$

<u>Exemple</u> : $G = N_{2n+1}$, le groupe de Heisenberg. C'est le groupe de matrices $(2n+2) \times (2n+2)$ de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n & z \\ & 1 & & 0 & & y_n \\ & & \ddots & & & \vdots \\ & & & 1 & & \vdots \\ & & & & \ddots & y_1 \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow (x,y,z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

Alors $\underline{G}$ a une base $(X_1,\ldots,X_n, Y_1,\ldots,Y_n,Z)$ avec

$$[X_i,Y_i] = -[Y_i,X_i] = Z$$

et les autres crochets de Lie = 0. G a un groupe de dilatations avec poids $\{1,2\}$:

$$\delta_\rho(x,y,z) = (\rho x,\rho y,\rho^2 z) \tag{1}$$

Chaque $P \in \underline{U}$ est de la forme

$$P = \Sigma \, a_{\alpha\beta k} X^\alpha Y^\beta Z^k \ , \ a_{\alpha\beta k} \in \mathbb{C} .$$

Cet opérateur est homogène de degré $m \Leftrightarrow a_{\alpha\beta k} = 0$ sauf pour $|\alpha|+|\beta| + 2k = m$. Pour cet exemple on a le théorème suivant, de Rockland [2].

<u>Théorème</u> : Soit $G = N_{2n+1}$ avec les dilatations (1), et soit $P \in \underline{U}$ homogène de degré m. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) P et ${}^tP$ sont hypoelliptiques ;

b) pour chaque représentation unitaire irréductible non triviale π de G, π_P et $\pi_{{}^tP}$ sont injectifs dans $\mathcal{S}_\pi$.

Nous donnons une généralisation très simple de l'implication (a) $\Rightarrow$ (b), et une généralisation et amélioration assez spéciale et assez simple de l'implication (b) $\Rightarrow$ (a).

<u>Théorème 1</u> : Soit G un groupe de Lie avec groupe de dilatations, et soit $P \in \underline{U}$ homogène de degré $m > 0$ et hypoelliptique. Alors pour chaque représentation unitaire irréductible non triviale π de G, π_P est injectif dans $\mathcal{S}_\pi$.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, posons $\underline{G}_\alpha = \{X \in \underline{G} : \delta_\rho(X) = \rho^\alpha X, \forall \rho\}$. Puisque les δ_ρ sont automorphismes de l'algèbre de Lie, on a

$$[\underline{G}_\alpha, \underline{G}_\beta] \subset \underline{G}_{\alpha+\beta} .$$

En particulier, si l'ensemble des poids est $\{1,\beta\}$ avec $\beta \neq 2$, alors G est abélien. Donc le premier cas intéressant et le cas de poids $\{1,2\}$. Dans ce cas

$$\underline{G} = \underline{G}_1 \oplus \underline{G}_2 \quad , \quad \underline{G}_2 \supset [G,G] ,$$

et $\underline{G}_2 \subset \underline{Z}$ (le centre). On va supposer aussi que $\dim[\underline{G},\underline{G}] = 1$; alors $G = \mathbb{N}_{2n+1} \times \mathbb{R}^k$ pour quelques n, k.

<u>Théorème 2</u> : Soit G un groupe de Lie avec groupe de dilatations ayant poids $\{1,2\}$, tel que $\dim[\underline{G},\underline{G}] = 1$. Soit $P \in \underline{U}$ homogène de degré m, tel que π_P est injectif dans $\mathcal{S}_\pi$ pour chaque représentation unitaire irréductible non triviale π. Alors P est hypoelliptique. De plus, si $Q \in \underline{U}$ est une somme d'opérateurs homogène de degré $< m$, alors $P + Q$ est hypoelliptique avec paramétrix à gauche appartenant à $S^{-m/2}_{1/2,1/2}$.

Preuve du théorème 1 : On va utiliser, au lieu de l'hypoellipticité de P, la propriété plus faible : si $u \in C_b(G)$, l'espace de fonctions continues et bornées sur G, et $Pu = 0$, alors $u \in C^1(G)$. Comme d'habitude, on déduit de cette propriété que pour chaque $X \in \underline{G}$, il existe une constante C telle que si $u \in C_b(G)$ et $Pu = 0$, alors

$$(2) \qquad |(Xu)(e)| \le C_X \sup_G |u| .$$

Supposons π une représentation unitaire et $v \in \mathcal{S}_\pi$ tel que $\pi_P v = 0$. Posons $u(g) = (\pi_g v, v)$. Alors $u \in C_b(G)$. Soit $X \in \underline{G}$. Alors $v \in \mathrm{dom}(\pi_X)$, donc on voit que

$$Xu(g) = \frac{d}{dt}(\pi_{g\ \exp(tX)} v, v)|_{t=o} = (\pi_g \pi_X v, v).$$

Donc $u \in C^1(G)$. Par récurrence, $u \in \mathcal{E}(G)$ et

$$Qu(g) = (\pi_g \pi_Q v, v), \quad Q \in \underline{U} .$$

En particulier, $Pu = 0$. Grâce à l'homogénéité, on a aussi $Pu_\rho = 0$, $u_\rho = u \circ \delta_\rho$. Pour $X \in \underline{G}$, tel que $\delta_\rho X = \rho^\delta X$ avec $\delta > 0$, on a

$$\rho^\delta |(Xu)(e)| = |(Xu_\rho)(e)| \le C_X \sup_G |u_\rho| = C_X \sup_G |u| .$$

Prenant $\rho \to +\infty$ on obtient $(Xu)(e) = 0$. On peut construire une base de $\underline{G}$ avec des éléments tels que X, et le même raisonnement s'applique aux translatés de u, donc $Xu \equiv 0$, $X \in \underline{G}$, donc u est constante. Alors

$$\|v\|^2 \ge |(\pi_g v, v)| \equiv |(\pi_e v, v)| = \|v\|^2 .$$

Donc $\pi_g v \equiv v$ et si π est irréductible et non triviale, ceci implique $v = 0$.

Preuve du théorème 2 : Considérons d'abord le cas $G = N_{2n+1}$ avec les dilatations et la coordination ci-dessus. Pour $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ on a une représentation unitaire scalaire

$$\pi^{\xi,\eta}_{(x,y,z)} = \exp i(x.\xi + y.\eta).$$

Si

$$Q = q(X,Y,Z) = \sum_{|\alpha+\beta|+2k=m} b_{\alpha\beta k} X^{\alpha} Y^{\beta} Z^{k} ,$$

alors

$$\pi_Q^{\xi,\eta} = q(i\xi, i\eta, 0),$$

un polynôme homogène de degré m. En particulier, puisque $\pi_P^{\xi,\eta} \neq 0$ pour $(\xi,\eta) \neq (0,0)$, on a

$$(3) \qquad |\xi|^m + |\eta|^m \leq C|P(i\xi, i\eta, 0)| .$$

En remplaçant P par P^2 ou P^*P, on peut supposer que m soit pair. Il suffit à démontrer que pour chaque $Q \in \underline{U}$, homogène de degré $\leq m$, on a

$$\|Qu\| \leq C_Q(\|Pu\| + \|u\|), \quad u \in \mathcal{D}(G).$$

(En effet, on utilise le calcul d'opérateurs pseudodifférentiels avec les fonctions poids

$$\Phi = |\xi| + |\eta + \zeta x| + |\zeta|^{1/2} + 1, \quad \varphi = \Phi(\Phi + |\zeta|)^{-1}).$$

En effet, il suffit à montrer pour Q de degré m justement,

$$(4) \qquad \|Qu\| \leq C_Q\|Pu\|, \quad u \in \mathcal{D}(G) ;$$

les normes sont toujours les normes L^2 (mesure de Haar).

Prenons les transformées de Fourier par rapport aux variables y, z. Alors

$$(Qu)^{\Lambda}(x,\eta,\zeta) = (Q_{\eta,\zeta}\hat{u})(x,\eta,\zeta),$$

où

$$Q_{\eta,\zeta}v(x) = q(\partial/\partial x, \ i\eta + i\zeta x, \ i\zeta)v(x).$$

Donc il suffit de montrer

$$(5) \qquad \|Q_{\eta,\zeta}v\| \leq C_Q\|P_{\eta,\zeta}v\| , \qquad v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_x),$$

pour p.t. $(\eta,\zeta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. On peut supposer $\zeta \neq 0$. Mettons $V_a v(x) = a^{n/2}v(ax)$, $a > 0$. Alors V_a est unitaire dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, et grâce à l'homogénéité de Q,

$$V_a^{-1}Q_{\eta,\zeta}V_a = a^m Q_{a^{-1}\eta,\, a^{-2}\zeta} .$$

On peut donc supposer $\zeta = \pm 1$. Mettons $T_s v(x) = v(x-s)$, $x, s \in \mathbb{R}^n$. Alors

$$T_s^{-1}Q_{\eta,\pm 1}T_s = Q_{\eta \pm s,\, \pm 1}$$

et on peut supposer $\eta = 0$, $\zeta = \pm 1$ dans (5).

Dans ces cas, on prend les fonctions poids dans $T^*(\mathbb{R}^n)$,

$$\Psi(x,\xi) = |\xi| + |x| + 1 \ , \ \Psi(x,\xi) = 1.$$

Grâce à (3), le symbole de $P_\pm = P_{0,\pm 1}$ satisfait à

$$|P_\pm(x,\xi)| \geq C_o(|\xi|^m + |x|^m + 1) \text{ si } |\xi| + |x| \geq C_1 \ ,$$

où $C_o > 0$. En revanche, le symbole de $Q_\pm = Q_{o,\pm 1}$ satisfait à

$$|q_\pm(x,\xi)| \leq C(|\xi|^m + |x|^m + 1).$$

Donc (voir e.g., [3], § 7), l'inéqualité (5) est satisfaite si $P_\pm$ est injectif dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n_x)$. Mais ceci est vrai par hypothèse, parce que on peut considérer la représentation de G dans $L^2(\mathbb{R}^n_x)$:

$$\pi^\pm_{(x,y,z)}v(s) = \exp i(\pm s.y \pm z)\, v(s+x).$$

Parmi les opérateurs $\pi^\pm_g$ sont toutes les translations et les multiplications par caractères, donc $\pi^\pm$ est irréductible. Aussi

$$\pi^\pm_{X_j} = \partial/\partial X_j \ , \ \pi^\pm_{Y_j} = \pm iX_j \ , \ \pi^\pm_Z = \pm i \ ,$$

donc $\mathcal{S}_\pi = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n_x)$, et $\pi^\pm_P = P_\pm$.

Enfin, considérons le cas général avec $\dim[\underline{G},\underline{G}] = 1$. Alors $G \approx N_{2n+1} \times \mathbb{R}^k$ et on peut prendre les coordonnées (x,y,z,t), $t = (t',t'') \in \mathbb{R}^k$, tel que

$$\delta_\rho(x,y,z,t) = (\rho x, \rho y, \rho^2 z, \rho t', \rho^2 t'').$$

Comme ci-dessus, on peut montrer que

$$(6) \qquad \|Q_{\eta,\zeta,\tau} v\| \le C_Q \|P_{\eta,\zeta,\tau} v\|, \quad v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_x),$$

où Q est homogène de degré m (pair) et

$$Q_{\eta,\zeta,\tau} = q(\partial/\partial x, i(\xi + \zeta x), i\zeta, i\tau).$$

Avec homothéties et translations on réduit le problème au cas $\eta = 0$, $\zeta = \pm 1$, et on peut supposer $\zeta = +1$. Pour chaque $\tau \in \mathbb{R}^k$, fixé, il existe une représentation unitaire de G dans $L^2(\mathbb{R}^n_x)$,

$$\pi^\tau_{(x,y,z,t)} v(s) = \exp i(z + s{\cdot}y + \tau{\cdot}t)\, v(s+x),$$

telle que

$$\pi^\tau_Q = Q_\tau = Q_{0,1,\tau}.$$

Alors comme ci-dessus il existe pour chaque τ fixé une constante $C_Q(\tau)$ telle que (6) est vrai pour $(\eta,\zeta,\tau) = (0,1,\tau)$. On voit sans peine que cette constante peut être choisie à varier continuement avec τ. Donc il reste à montrer (6) pour $\eta = 0$, $\zeta = 1$, $|\tau|$ grand. Mais le symbole de P_τ satisfait à

$$|P_\tau(x,\in)| \ge C_o(|x|^m + |\xi|^m + |\tau'|^m + |\tau''|^{m/2} + 1)$$

pour

$$\Psi_\tau = |X| + |\xi| + |\tau'| + |\tau''|^{1/2} + 1 \ge C_1.$$

Alors la construction standard d'une paramétrix pour P_τ dans le cadre des fonctions poids Ψ_τ, $\Psi_\tau = 1$ montre l'inégalité désirée.

Remarques

1. La question d'existence d'une solution fondamentale invariante pour un opérateur sur $N_{2n+1} \times \mathbb{R}^k$, pas forcément hypoelliptique ou homogène a été abordée par Gérard Lion [1].

2. Parmi les nombreuses questions ouvertes est de caractériser les opérateurs hypoelliptiques non homogènes, en généralisant le théorème d'Hörmander pour le cas abélien (coefficients constants), s'agit-il de regarder les prolongements analytiques non unitaires des représentations unitaires ? Un exemple sur N_3 : $P = X + Y^2 - YZ$ n'est pas hypoelliptique, mais c'est injectif sur $\mathcal{S}_\pi$ pour tous ces prolongements non triviaux.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. Lion : Solutions élémentaires d'opérateurs différentiels invariants sur certains groupes nilpotents-Résolubilité de l'équation des ondes sur le groupe de Heisenberg, Preprint.

[2] C. Rockland : Hypoelliptic operators on the Heisenberg group - Representation theoretic criteria, Preprint.

[3] R. Beals : A general calculus of pseudodifferential operators, Duke Math. J. 42 (1975), 1-42.
