Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

S. ALINHAC

Solution explicite du problème de Cauchy pour un opérateur hyperbolique à caractéristiques non régulières

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1976-1977), exp. nº 17, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1976-1977____A16_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE GOULAOUIC-SCHWARTZ 1976-1977

SOLUTION EXPLICITE DU PROBLEME DE CAUCHY POUR UN OPERATEUR HYPERBOLIQUE A CARACTERISTIQUES NON REGULIERES

par S. ALINHAC

Exposé N° XVII 8 Mars 1977

§ 0. INTRODUCTION

Il s'agit d'écrire, modulo C^∞, la solution du problème de Cauchy pour l'opérateur (dans $\mathbb{R}^3$)

$$P = \partial_t^2 - t^2\partial_x^2 - \partial_y^2 + \Lambda(t,x,y,\partial_x,\partial_y)$$

à l'aide d'intégrales de Fourier, lorsque les données de Cauchy sur $\{t=0\}$ ont leurs singularités proches du point $(x=0,\ y=0,\ \xi = +1,\ \eta = 0)$.

L'opérateur est hyperbolique strict en dehors de la variété $\Sigma = \{t=\eta = 0\}$, et le calcul direct permet de préciser les phases et les symboles près de Σ.

Les résultats, plus que les méthodes, sont à rapprocher des travaux de L. Boutet de Monvel et ses élèves sur l'hypoellipticité des opérateurs à caractéristiques doubles.

§ 1. ETUDE D'UN CAS PARTICULIER ; QUELQUES NOTATIONS.

Pour motiver les notations du cas général, étudions l'opérateur $P = \partial_t^2 - t^2\partial_x^2 - \partial_y^2 + \lambda\partial_x,\quad \lambda \in \mathbb{C}$.

Il se traite sans difficulté à l'aide d'une transformation de Fourier partielle en (x,y) : posons, quand c'est licite,

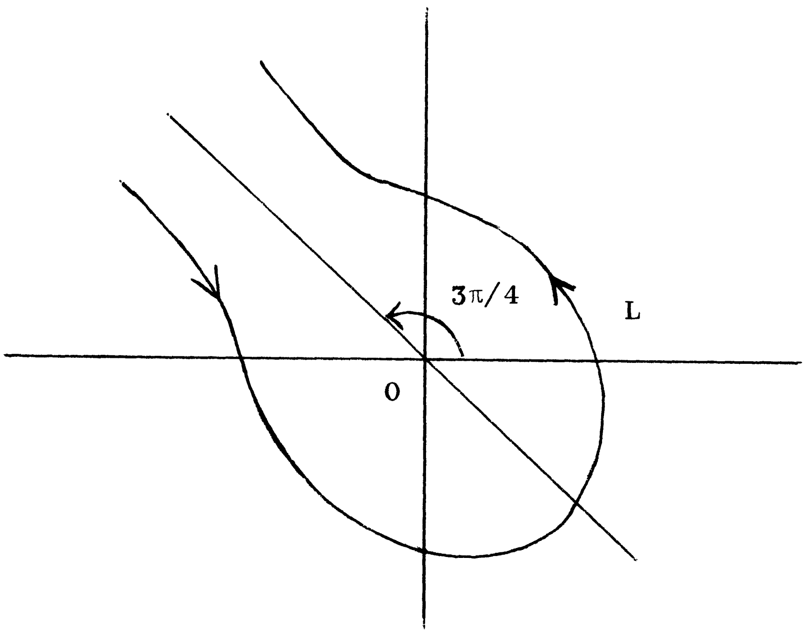
$$T(A) = e^{5i\frac{\pi}{4}}\, e^{-i\frac{\pi}{4}A}\, 2^{A+1}(\sin \pi A)\,\Gamma(\tfrac{A+1}{2}),$$

$$A_\varepsilon = -1/2 - \frac{i\varepsilon}{2}\,(i\lambda + \eta^2/\xi) \qquad (\varepsilon = \pm 1)\ ,$$

$$N(A_\varepsilon) = \frac{1}{T(A_\varepsilon)}\, e^{i\varepsilon\frac{t^2}{2}\xi}\,\Big(\int_L e^{\sqrt{\varepsilon}\,t\,\xi^{1/2}z}\, e^{-iz^2/4}\, z^{A_\varepsilon}dz\Big)$$

$$\text{(resp. } \widetilde{N}(A_\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}\,\xi^{1/2}\,T(A_\varepsilon+1)}\, e^{i\varepsilon\frac{t^2}{2}\xi}\,\Big(\int_L e^{\sqrt{\varepsilon}\,t\,\xi^{1/2}z}\, e^{-i\,z^2/4}\, z^{A_\varepsilon}dz\Big)\text{)}\ ,$$

où L désigne le contour complexe suivant :



L'intérêt des fonctions $N(A_\varepsilon)(t,\xi,\eta)$ (resp. $\tilde{N}$) est indiqué dans la

<u>Proposition 1</u> : Si $\mathrm{Re}\lambda \neq \pm 3, \pm 7, \dots, \pm(4p-1), \dots$ (resp. $\mathrm{Re}\,\lambda \neq \pm 5, \pm 9, \dots, \pm(4p+1), \dots$), alors

i) $P(e^{ix\xi+iy\eta} N(A_\varepsilon)) = 0$ (resp. $P(e^{ix\xi+iy\eta}\tilde{N}(A_\varepsilon)) = 0$).

ii) $N(A_\varepsilon)|_{t=o} = 1$ (resp. $\partial_t \tilde{N}(A_\varepsilon)|_{t=o} = 1$) .

Cette proposition résulte aisément de travaux classiques (par exemple [1], [6] ; voir aussi [2]).
En fait, les solutions $N(A_\pm)$ sont "oscillantes pures" (et par conséquent indépendantes) en un sens que l'on va présicer.

§ 2. <u>CLASSES DE SYMBOLES ET COMPORTEMENT DES</u> $N(A_\pm)$

Posons $\eta/\xi = \omega$, $\theta = \eta\xi^{-1/2}$, $s = t\xi^{1/2}$, $r = \sqrt{s^2+\theta^2}$, $d_\omega = |\omega| + \xi^{-1/2}$, $d_r = \sqrt{t^2+\omega^2} + \xi^{-1/2}$. En suivant L. Boutet de Monvel [3], nous dirons que $a(t,x,y,\xi,\eta)$, fonction C^∞ (pour $t \geq 0$) définie dans un voisinage conique de $(0,0,0,+1,0)$ est un symbole de classe $S^{m,\varkappa,\mu}$. Si, pour tous $\alpha, \beta, \gamma, \delta$,

$$|\partial^\alpha_{x,y}\, \partial^\beta_t\, \partial^\gamma_\xi\, \partial^\delta_\eta\, a| \leq C\, \xi^{m-(\gamma+\delta)} d_r^{\varkappa-\beta}\, d_\omega^{\mu-\delta}$$

dans les conditions usuelles.

On dira que $a \in S^{m,\mu}_{\omega}$ si on a les majorations

$$|\partial^{\alpha}_{x,y}\, \partial^{\beta}_{t}\, \partial^{\gamma}_{\xi}\, \partial^{\delta}_{\eta}\, a| \leq C\, \xi^{m-(\gamma+\delta)}\, d^{\mu-\delta}_{\omega}$$

Grâce à ces notions, on précise le comportement des $N(A_{\pm})$ dans la

Proposition 2 : Si C est une constante > 0 assez grande,

i) pour $|\eta|\xi^{-1/2} \leq C$, $N(A_{\varepsilon}) = e^{i\varepsilon\frac{t^2}{2}\xi}\, p_{\varepsilon}$

(resp. $\tilde{N}(A_{\varepsilon}) = e^{i\varepsilon\frac{t^2}{2}\xi}\, \tilde{p}_{\varepsilon}$), et $p_{\varepsilon} \in S^{-\frac{\varepsilon Re\lambda+1}{4},\, -\frac{\varepsilon Re\lambda+1}{2},\, 0}$

(resp. $\tilde{p}_{\varepsilon} \in S^{-\frac{\varepsilon Re\lambda+1}{4}-1/2,\, -\frac{\varepsilon Re\lambda+1}{2},\, 0}$)

ii) pour $|\eta|\xi^{-1/2} \geq C$, $N(A_{\varepsilon}) = e^{i\varepsilon\phi}\, q_{\varepsilon}$ (resp. $\tilde{N} = e^{i\varepsilon\phi}\, \tilde{q}_{\varepsilon}$)

et $q_{\varepsilon} \in S^{0,-\frac{\varepsilon Re\lambda+1}{2},\, \frac{\varepsilon Re\lambda+1}{2}}$ (resp. $\tilde{q}_{\varepsilon} \in S^{-1,-\frac{\varepsilon Re\lambda+1}{2},\, +\frac{\varepsilon Re\lambda+1}{2}-1}$),

où $\phi(t,\xi,\eta) = \int_0^t \sqrt{u^2\xi^2+\eta^2}\, du$.

La conjonction des propositions 1 et 2 permet d'élucider la forme de la solution du problème de Cauchy dans le cas particulier envisagé en 1, en admettant que l'indépendance de $N(A_+)$ et $N(A_-)$ permette d'obtenir par combinaison ,une solution du noyau de P de traces données. Ce dernier point sera précisé en même temps que le cas général.

§ 3. LE CAS GENERAL

C'est celui où $P = \partial^2_t - t^2\partial^2_x - \partial^2_y + \Lambda(t,x,y,D_x,D_y)$ où $\Lambda \sim \sum_{j\geq o} \Lambda_{1-j/2}$, Λ_h étant un symbole homogène de degré h en (ξ,η), dépendant de façon C^{∞} de t. On note $\lambda = \lambda(x,y) = \frac{1}{i}\Lambda_1(0,x,y,+1,0)$, $\lambda^o = \lambda(0,0)$, $A_{\varepsilon}(x,y) = A_{\varepsilon} = -1/2 - i\frac{\varepsilon}{2}(i\lambda + \eta^2\xi^{-1})$.

La solution du problème apparaît comme une "perturbation" de celle du problème du paragraphe 1 avec $\lambda = \lambda^o$.

Supposons $Re\lambda^o \neq \pm 3, \pm 7,\dots$ et définissons localement en (x,y) près de $(0,0)$, $N(A_{\varepsilon})$ par la formule du § 1 (resp. $Re\lambda^o \neq \pm 5, \pm 9,\dots$ et définissons $\tilde{N}(A_{\varepsilon})$). On a alors le

Théorème : i) Les fonctions $N(A_\varepsilon)(t,x,y,\xi,\eta)$ jouissent des propriétés indiquées dans la proposition 2, où l'on doit prendre $\lambda = \lambda^o$, et ajouter $+0$ aux ordres de tous les symboles (on dit que $a \in S^{m+o,K+o,\mu+o}$ si, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \mathcal{U}_\varepsilon$ voisinage de $(0,0)$ tel que $a|_{\mathcal{U}_\varepsilon} \in S^{m+\varepsilon,K+\varepsilon,\mu+\varepsilon}$).

ii) Pour toute $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, égale à 1 sur un voisinage de 0 assez grand, il existe

- un symbole $w \in S^{+o,1+o,+o}$
- un symbole $w_1 \in S_\omega^{-1/4(\varepsilon \mathrm{Re}\,\lambda^o + 1)+o,+o}$, plat sur $t = 0$
- un symbole $w_2 \in S_\omega^{+o,1/2(\varepsilon \mathrm{Re}\lambda^o + 1)+o}$, plat sur $t = \eta = 0$,

nul sur $t = 0$, tels que, en posant

$$E_\varepsilon(t,x,y,\xi,\eta) = N(A_\varepsilon)(1 + w) + e^{i\varepsilon\frac{t^2}{2}\xi} w_1\, \chi(\theta) + e^{i\varepsilon\phi} w_2(1 - \chi(\theta)) ,$$

$P(e^{ix\xi + iy\eta} E_\varepsilon)$ soient des symboles tangentiels d'ordre $-\infty$, dépendant de façon C^∞ de t.

iii) En notant $\varepsilon'_+(\mathbb{R}^2)$ l'espace des $u \in \varepsilon'(\mathbb{R}^2)$, avec $WF(u)$ contenu dans un voisinage conique assez petit de $(0,0,+1,0)$, définissons $E_\varepsilon = \varepsilon'_+(\mathbb{R}^2) \to C_t^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{D}'_{x,y}(\Omega))$ par

$$(E_\varepsilon \varphi)(t,x,y) = \int e^{ix\xi + iy\eta} E_\varepsilon(t,x,y,\xi,\eta)\hat{\varphi}(\xi,\eta)\,d\xi\, d\eta$$

(Ω petit voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^2$; l'intégrale est "oscillante", cf. [5])

Il existe alors des opérateurs pseudo-différentiels tangentiels $\Sigma_\pm$, de symboles $\sigma_\pm \in S_\omega^{+o,+o}$, et M, de symbole $\mu \in S_\omega^{-1/2+0,+0}$, tels que

$$\begin{cases} (E_+\Sigma_+ + E_-\Sigma_-)|_{t=o} = \mathrm{id}, & \partial_t(E_+\Sigma_+ + E_-\Sigma_-)|_{t=o} = 0 , \\ (E_+ - E_-)M|_{t=o} = 0, & , \partial_t(E_+ - E_-)M|_{t=o} = \mathrm{id}. \end{cases}$$

Enfin, lorsque $\mathrm{Re}\,\lambda^o \neq \pm 5, \pm 9, \ldots$, on obtient un théorème complètement analogue en utilisant $\tilde{N}(A_\varepsilon)$ en place de $N(A_\varepsilon)$. L'intérêt de ce théorème est de montrer :

i) Quelles phases sont "responsables" de la propagation des singularités (près et en dehors de Σ).

ii) Comment les symboles se comportent près de Σ.

On espère, à partir de ce cas particulier, pouvoir aborder l'étude du cas général des opérateurs hyperboliques à caractéristiques doubles.
Une conséquence facile est la suivante :

Soit $C_\pm$ la relation canonique homogène définie par $(t,x,y,\tau,\xi,\eta)(x',y',\xi',\eta') \in C_\pm$ si $\xi = \xi'$, $\eta = \eta'$ et (t,x,y,τ,ξ,η) appartient à l'arc de bicaractéristique nulle du symbole $\tau_\mp\sqrt{t^2\xi^2 + \eta^2}$ issu de $(0,x',y',\mp |\eta|,\xi,\eta)$. Alors, pour toute $u \in \mathcal{E}'_+(\mathbf{R}^2)$, $WF(E_\pm u) \subset C_\pm \circ WF(u)$.

§ 4. SCHEMA DE LA CONSTRUCTION

Elle s'effectue essentiellement en deux étapes :

Etape I : on résoud le problème "infiniment près" de la singularité Σ, i.e. on construit des opérateurs "indépendants" $F_\pm$ tels que $R_\pm = PF_\pm$ soient des opérateurs de symboles à décroissance rapide dans des zones $t \leq Cte\ \xi^{-1/2}$, $|\eta| \leq Cte\ \xi^{1/2}$.

Etape II : On résoud le problème "à l'extérieur" des singularités, i.e. on utilise la construction standard "phase-équations de transport" pour obtenir des opérateurs $G_\pm$ tels que $PG_\pm = R_\pm$.

§ 5. ETAPE I

Elle utilise la notion suivante de quasi-homogénéité (q.h.) : $f(t,x,y,\xi,\eta)$ est q.h. de degré k si, pour $\lambda > 0$,

$$f(\lambda^{-1/2}t,x,y,\lambda\xi,\lambda^{1/2}\eta) = \lambda^k f(t,x,y,\xi,\eta).$$

On cherche une solution u de Pu = 0 sous la forme
$u = e^{ix\xi + iy\eta} v(t,x,y,\xi,\eta)$, et

$$e^{-ix\xi - iy\eta}\, Pu = P'v = v''_{tt} - t^2[-\xi^2 v + 2i\xi v'_x + v''_{xx}] - [-\eta^2 + 2i\eta v'_y + v''_{yy}] +$$

$$+ \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\, \Lambda^{(\alpha)} D^\alpha v \ .$$

On prendra $v = \sum_{k \geq 0} v_k$, où v_k est q.h. de degré $-k/2$, en sorte que $P'v = 0$ équivaut formellement à la suite des équations $\{P_o v_o = 0,\ P_o v_1 + P_1 v_o = 0$, etc... où

$$\begin{cases} P_o = \partial_t^2 + t^2\xi^2 + \eta^2 + \Lambda_1(0,x,y,\xi,0), \\ P_1 = -2i\eta\, \partial y + t\,\Lambda_{1,1}(0,x,y,\xi,0) + \eta\,\Lambda_1^1(0,x,y,\xi,0) + \Lambda_{1/2} \\ \text{etc...} \end{cases}$$

Les opérateurs P_j sont obtenus en remplaçant les symboles Λ_h par leurs développements de Taylor (formels) en $t = \eta = 0$, puis en regroupant les termes par degré de q.h., en sorte que P_j est de degré $1 - j/2$.

a) <u>Noyau de</u> P_o

Il a été étudié aux paragraphes 1 et 2 ; on prendra donc $v_o = N(A_\varepsilon)$ (qui est bien q.h. de degré 0), avec $\lambda = \lambda(x,y)$ (voir notations du début du paragraphe 3). La preuve de la proposition 2 du § 2 est assez délicate, et repose sur les résultats du chapitre X de Sibuya [6] .

b) <u>Résolution de</u> $P_o v = w$

Nous utilisons ici les variables (q.h. de degré 0) s et θ (cf. § 2). Observons d'abord qu'appliquer un opérateur P_j, c'est effectuer certaines dérivations en x et y (non en t!), et multiplier par des puissances de t ou des constantes (pour l'équation différentielle P_o).
Dériver $N(A_\varepsilon)$ fait apparaître sous $\int_L$ certaines puissances de $\log z$ et modifie le "facteur de normalisation" $T(A_\varepsilon)$. On note :

$$N_k(A_\varepsilon) = \frac{1}{T(A_\varepsilon)}\, e^{i\varepsilon s^2/2} \int_L e^{\sqrt{\varepsilon}\, sz}\, e^{-i z^2/4} (\mathrm{Log}\, z)^k z^{A_\varepsilon}\, dz \ ,$$

et on observe que

$$sN_k(A_\varepsilon) = \frac{i}{2\sqrt{\varepsilon}} \frac{T(A_\varepsilon+1)}{T(A_\varepsilon)} N_k(A_\varepsilon+1) - \frac{k}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{T(A_\varepsilon-1)}{T(A_\varepsilon)} N_{k-1}(A_\varepsilon-1) - \dots$$

$$- \frac{A_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{T(A_\varepsilon-1)}{T(A_\varepsilon)} N_k(A_\varepsilon-1).$$

Il est possible d'établir les points techniques suivants :

α) Les intégrales $N_k(A_\varepsilon)$ jouissent des propriétés indiquées dans la proposition 2 pour les $N(A_\varepsilon)$ (avec ici $\lambda = \lambda(0,0)$), à ceci près que l'on doit ajouter $+0$ aux ordres de tous les symboles (cf. point i) du théorème § 3).

β) En rappelant la notation $A_\varepsilon = -1/2 - i\frac{\varepsilon}{2}(i\lambda + \theta^2)$, on a pour $|\theta| \geq$ Cte, $\frac{1}{T(A_\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial\lambda} T(A_\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}\mathrm{Log}\,|\theta| + \Sigma_o$, où Σ_o désigne un symbole d'ordre 0 en θ.

γ) Avec les notations de β), $\frac{T(A_\varepsilon-1)}{T(A_\varepsilon)}$ est un symbole d'ordre -1 en θ.

Le point crucial de la résolution de $P_o v = w$ est donc de pouvoir résoudre lorsque $w = N_k(A_\varepsilon + \ell)$ ($\ell \in \mathbb{Z}$). C'est l'objet du

<u>Lemme</u> : Soit $E = \partial_s^2 + s^2 + i\lambda + \theta^2$ ($= \xi^{-1}P_o$ dans les variables s, θ) et $w = N_k(A_\varepsilon + \ell)$. L'équation $Ev = w$ admet comme solution particulière la fonction

$$v = \frac{i}{2} \sum_{j=o}^{k} \frac{(-1)^j k(k-1)\dots(k-j+1)}{\ell^{j+1}} N_{k-j}(A_\varepsilon+\ell)$$

(si $\ell = 0$, $v = \frac{i}{2(k+1)} N_{k+1}(A_\varepsilon)$).

On note que v est "oscillante pure" comme w, et que son comportement est connu (cf. α) ci-dessus).
Le lemme résulte du fait qu'après le changement de fonctions $v = e^{i\varepsilon s^2/2}u$, l'équation E devient $\partial_s^2 + 2i\varepsilon s\partial_s +$ Cte , laquelle se réduit, par transformation de Laplace le long de L, à une équation du premier ordre pour laquelle il est aisé de choisir des solutions (pour tout détail voir [2]).

Si l'on convient de choisir les v_k $(k \geq 1)$ successifs conformément au lemme, on peut alors établir par récurrence que

$v_k = \xi^{-1/2} |\theta|^k \sum_{\ell=-k}^{+k} [N(A_\varepsilon + \ell)]$. On a convenu ici de noter $[N(A_\varepsilon + \ell)]$ une quantité telle que $\Sigma \times N_k(A_\varepsilon + \ell)$, où $k \in \mathbb{N}$ et Σ est un symbole en r ou θ (dépendant C^∞ de x et y) d'ordre $+0$ (on "néglige" de mentionner k conformément au point α) ci-dessus).

La solution (formelle) v de $P'v = 0$ sera écrite sous la forme $v_o(1 + \frac{v_1}{v_o} + \ldots + \frac{v_k}{v_o} + \ldots)$, et on peut montrer que $\frac{v_k}{v_o} \in S^{+o,k+o,+o}$.

c) <u>Passage du "formel" au "vrai"</u>

Il s'effectue en deux temps :

. on remplace la somme $\frac{v_1}{v_o} + \ldots + \frac{v_k}{v_o} + \ldots$ par un symbole $w \in S^{+o,1+o,+o}$ qui lui est asymptotiquement équivalent en ce sens que $\forall$ N, $w - \sum_{k<N} \frac{v_k}{v_o} \in S^{+o,N+o,+o}$. Pour une telle construction, voir [3].

. on calcule $P'v_o(1+w)$. Si on note $S^{m,+\infty,\mu} = \bigcap_N S^{m,N,\mu}$, on trouve $P'v_o(1+w) = v_o R$, où $R \in S^{1+o,+\infty,+o}$.

L'étape I est alors terminée, $F_\pm$ étant les opérateurs de noyaux $\int e^{i(x-x')\xi + i(y-y')\eta} N(A_\varepsilon)(1+w) d\xi d\eta$ (comparer avec les points ii) et iii) du théorème du § 3).

§ 6. <u>ETAPE II</u>

Précisons d'abord qu'un symbole a d'une certaine classe S est dit "plat" sur une variété $\{u = 0\}$ si, $\forall$ N, $u^{-N} a \in S$ (par exemple, si $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi = 0$ près de 0, $\varphi = 1$ hors d'un compact, le symbole $\varphi(\eta\, \xi^{-1/2}) \in S_\omega^{o,o}$ <u>n'est pas plat</u> sur $\eta = 0$).

Pour appliquer la méthode standard, il faut "faire sortir" la phase de v_o, comme dans la proposition 2 ; si χ est choisie comme au point ii) du théorème (§ 3), on écrit

$$v_o R = \chi(\theta) v_o R + (1 - \chi(\theta)) v_o R .$$

Analysons chacun des deux termes :

<u>1er terme</u> : Modulo un symbole régularisant, il s'écrit $\chi(\theta)v_o R = e^{i\varepsilon s^2/2}\chi(\theta)R_1$, où R_1 est un symbole plat sur $t=0$ de la classe $S_\omega^{1-1/4(\varepsilon\mathrm{Re}\,\lambda^o+1)+o,+o}$.

<u>2ème terme</u> : Modulo un symbole régularisant, il s'écrit $(1-\chi(\theta))v_o R = (1-\chi(\theta))e^{i\varepsilon\phi}R_2$, où R_2 est un symbole plat sur $t=\eta=0$ de la classe $S_\omega^{1+o,\frac{\varepsilon\mathrm{Re}\,\lambda^o+1}{2}+0}$.

On cherche donc le noyau de $G_\pm$ sous la forme

$$\int e^{i(x-x')\xi+i(y-y')\eta}\left[e^{i\varepsilon\frac{t^2}{2}\xi}w_1\chi(\theta)+e^{i\varepsilon\phi}w_2(1-\chi(\theta))\right]d\xi\, d\eta$$

où $(2i\varepsilon t\xi\partial_t+\partial_t^2+i\varepsilon\xi-2i\xi t^2\partial_x-t^2\partial_x^2+\eta^2-2i\eta\partial_y-\partial_y^2+\Lambda')w_1=R_1$,

et $[\xi(\varepsilon\sqrt{t^2+\omega^2}\,\partial_t-t^2\partial_x-\omega\partial_y-\frac{i}{2}\Lambda_1(t,x,y,1,\omega))+\xi^{1/2}(\dots)+\dots]w_2=R_2$.

Pour résoudre ces équations, il suffit de pouvoir résoudre l'équation de transport (coefficient de ξ) dans une classe de symboles convenable. Pour le premier terme, c'est aisé, car on a une équation du type de Fuchs avec un second membre plat.
Pour le deuxième terme, on peut réduire l'équation de transport à une équation du type $\sqrt{T^2+\omega^2}\,\partial_T u+Au=f$, avec f plat sur $T=\omega=0$, laquelle se résoud " à la main" (et l'on peut imposer $u|_{T=o}=0$) .

§ 7. <u>LA QUESTION DES TRACES</u>

. On peut choisir les v_k $(k\geq 1)$ en sorte que $v_k|_{t=o}=0$, dans l'étape I (il suffit de les modifier par Cte $\times v_o$). Les opérateurs $F_\pm$ sont alors "indépendants" avec pour trace (sur $t=0$) l'identité.
. Les "termes complémentaires" de l'étape II sont l'un, plat, l'autre nul sur $t=0$.

Le point iii) du théorème suit alors sans grosses difficultés d'une façon analogue à celle de [2], par exemple.

§ 8. PROPAGATION DES SINGULARITES

Pour la partie de E_+ qui fait intervenir la "phase" $e^{i\varepsilon\frac{t^2}{2}\xi}$ on peut appliquer les théorèmes habituels (cf. par exemple [5]).

Pour la partie du type $e^{i\varepsilon\phi}(1-\chi(\theta))s$ (s symbole), on note que ϕ n'est pas régulière sur le support conique du symbole, mais seulement sur son support.
C'est une situation analogue à celle qu'on rencontre par exemple dans [4], [7]. Il est possible alors d'utiliser la procédure habituelle d'intégrations par parties, à ceci près que les coefficients de l'opérateur L tel que ${}^tL\, e^{i\varepsilon\phi} = e^{i\varepsilon\phi}$ seront des symboles de type (1/2, 1/2) et non des symboles "classiques".

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Abramowitz et I. A. Stegun : Handbook of mathematical functions, Dover Publ., New York, 1965.

[2] S. Alinhac : Parametrix pour un système hyperbolique à multiplicité variable, à paraître in Comm. in P.D.E. 1977).

[3] L. Boutet de Monvel : Hypoelliptic operators with double characteristics and related pseudo-differential operators, C.P.A.M. 27, 1974.

[4] Friedlander : The wave front set of the solution of a simple initial boundary value problem with glancing rays, Proc. of the Cambridge phil. Soc. vol. 79, 1976.

[5] L. Hörmander : Fourier Integral operators I, Acta Math. 127, 1971.

[6] Y. Sibuya : Global theory of a second order ordinary differential equation with a polynomial coefficient, North Holland 18.

[7] M. Taylor : Grazing rays and reflection of singularities of solutions to wave equations, C. P. A. M. 29, 1976.