Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

A. Hirschowitz
A. Piriou

La propriété de transmission pour les distributions de Fourier ; application aux lacunes

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1976-1977), exp. n° 14, p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1976-1977____A13_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 6 - 1 9 7 7

LA PROPRIETE DE TRANSMISSION POUR LES DISTRIBUTIONS DE FOURIER ; APPLICATION AUX LACUNES.

par A. HIRSCHOWITZ et A. PIRIOU

Exposé n° XIV

8 Février 1977

§ 1. INTRODUCTION

On se propose de généraliser aux opérateurs intégraux de Fourier la propriété de transmission pour les opérateurs pseudo-différentiels, telle qu'elle est formulée par exemple par Boutet de Monvel [3]. Pour cela, on donne une définition de la propriété de transmission pour les distributions de Fourier qui, sous une forme plus précise et plus générale, est parallèle à une définition locale donnée par Gårding [9]. On établit aussi un théorème de composition pour les opérateurs intégraux de Fourier de transmission. En particulier, on obtient ainsi très simplement une propriété de transmission pour la solution fondamentale d'un opérateur fortement hyperbolique, ou d'un opérateur hyperbolique à caractéristiques de multiplicité constante vérifiant la condition de Lévi. Cette propriété permet de retrouver très facilement des résultats de Maslov [14], [15] sur la "métamorphose des discontinuités", et des résultats de Gårding [9] sur les lacunes à coefficients variables. On généralise aussi certains résultats sur les lacunes établis dans le cas des coefficients constants par Atiyah, Bott, Gårding [1], [2].

On désignera par $I^m_{cl}(X,\Lambda)$ l'espace des distributions de Fourier de degré m dans X associés à la sous-variété lagrangienne conique Λ de $T^*X\backslash 0$, classiques en ce sens que les amplitudes admettent un développement asymptotique de la forme $a \sim \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j$, où a_j est homogène de degré $\mu-j$ $(\mu\in\mathbb{R})$.

Rappelons brièvement la propriété de transmission pour les opérateurs pseudo-différentiels. Soient $P \in L^m_{cl}(X)$ et $\bar\Omega$ une variété à bord de X. P a la propriété de transmission par rapport à $\bar\Omega$ (voir [3]) si, localement au voisinage de chaque point de $\partial\bar\Omega$, P s'exprime par

$$(Pu)(x) \sim \int e^{ix\cdot\xi} p(x,\xi)\,\hat{u}(\xi)\,d\xi \quad \text{(modulo un régularisant)}$$

$p(x,\xi) \sim \sum_{j\geq 0} p_j(x,\xi)$, p_j homogène de degré $m-j$ en ξ , avec :

(1.1) $\left\{\begin{array}{l}\text{Pour tout } j\in \mathbb{N}\text{, la fonction } p_j(x,-\xi)-e^{i\pi(m-j)}p_j(x,\xi) \text{ est}\\ \text{nulle d'ordre infini sur le fibré conormal intérieur à } \partial\overline{\Omega}.\end{array}\right.$

On sait qu'alors :

(1.2) $\left\{\begin{array}{l}[P(u^o)]\big|_{\Omega} \in C^\infty(\overline{\Omega}) \text{ lorsque } u \in C^\infty(\overline{\Omega}),\ u^o \text{ désignant le prolongement}\\ \text{de } u \text{ par } 0 \text{ en dehors de } \overline{\Omega}.\end{array}\right.$

Désignons par $N_{\partial\overline{\Omega}}$ le fibré conormal à $\partial\overline{\Omega}$ privé de sa section nulle, et appelons $C^\infty_{\pm\partial\overline{\Omega}}$ l'espace des distributions A sur X qui sont de la forme

$$A \sim u^o + \text{somme de couches sur } \partial\overline{\Omega} \text{ à densité } C^\infty \text{ (modulo } C^\infty(X))$$

où $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

En utilisant les formules (voir par exemples [10]) :

$$\mathcal{F}\, x^j_{n+} = \frac{1}{i^{j+1} j!}\,\frac{1}{\xi_n^{j+1}} \quad \text{pour } j\in\mathbb{N}\ ,\ \xi_n \neq 0$$

$$\mathcal{F}\, D^j\delta(x_n) = \xi_n^j \qquad \text{pour } j \in \mathbb{N}$$

on vérifie immédiatement que $C^\infty_{\pm\partial\overline{\Omega}}$ est l'espace des distributions A sur X vérifiant les deux conditions suivantes :

(1.3) $$A\in I^m_{cl}(X,N_{\partial\overline{\Omega}}),\ \text{avec } m+\frac{n}{4}-\frac{1}{2}\in\mathbb{Z} \quad (n=\dim X)\ ,$$

et au voisinage de chaque point de $\partial\overline{\Omega}$, dans une carte locale transportant $\partial\overline{\Omega}$ en $\{x_n=0\}$ et Ω en $\{x_n>0\}$, A admet une représentation, modulo $C^\infty(X)$:

$$A(x) \sim \int e^{ix_n\xi_n} a(x,\xi_n)d\xi_n \quad (a\in \mathcal{S}^\mu,\ a\sim \sum_{j\geq 0} a_j(x,\xi_n))$$

telle que

(1.4) $\begin{array}{l}\text{Pour tout } j\in\mathbb{N} :\ a_j(x,-\xi_n) = (-1)^{\mu-j}a_j(x,\xi_n) \text{ pour } \xi_n\neq 0\\ \text{(noter que } \mu\in\mathbb{Z} \text{ d'après (1.3)).}\end{array}$

Lorsqu'on remplace respectivement les deux conditions (1.3), (1.4) par :

(1.5) $$A\in I^m_{cl}(X,N_{\partial\overline{\Omega}}),\ \text{avec } m+\frac{n}{4}-\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$$

(1.6) Pour tout $j\in\mathbb{N}$: $a_j(x,-\xi_n) = e^{-i\pi(\mu-j)}a_j(x,\xi_n)$ pour $\xi_n>0$, alors on obtient, au lieu de $C^\infty_{\pm\partial\overline{\Omega}}$, l'espace $C^\infty_{+\partial\overline{\Omega}}$ des distributions A qui sont localement de la forme, modulo $C^\infty(X)$:

$$A(x) \sim f(x)x_{n-}^{-(\mu+1)} \ , \text{ où } f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \ , \ \mu \notin \mathbb{Z} .$$

Ceci résulte des formules (voir [10]) :

$$\mathcal{F}[(\xi_n + i0)^\lambda] = 2\pi \frac{e^{i\frac{\pi}{2}\lambda}}{\Gamma(-\lambda)} x_{n-}^{-(\lambda+1)} \quad \text{pour } \lambda \notin \mathbb{Z} .$$

En particulier, constatons que A est C^∞ jusqu'au bord de chaque côté de $\partial\overline{\Omega}$ lorsque $A \in C^\infty_{\pm\partial\overline{\Omega}}$, et que A n'est C^∞ jusqu'au bord que du côté intérieur de $\partial\overline{\Omega}$ lorsque $A \in C^\infty_{+\partial\Omega} \backslash C^\infty(X)$. Notons que c'est précisément en utilisant des relations du type (1.4), (1.6) qu'on établit classiquement (1.2), et que, d'autre part, des distributions de Fourier ayant des propriétés de régularité au bord analogues à celles des distributions A précédentes interviennent dans l'étude des lacunes : soit par exemple E la solution élémentaire directe de l'opérateur des ondes itéré $(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \cdots - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2})^p$.

On sait que $E=0$ à l'extérieur du cône $\{t \geq 0, |x| \leq t\}$, et qu'à l'intérieur de ce cône, on a :

pour n impair $\begin{cases} E = 0 \text{ si } 2p < n+1 \\ E = C(t^2 - |x|^2)^{p-\frac{n+1}{2}} \text{ si } 2p \geq n+1 \end{cases}$

pour n pair $\quad E = C(t^2 - |x|^2)^{p-\frac{n+1}{2}}$.

Si $W = \{t > 0, |x| = t\}$ est le cône de lumière épointé, on voit que E est C^∞ jusqu'au bord de chaque côté de W lorsque n est impair, et que E n'est C^∞ jusqu'au bord que du côté extérieur de W lorsque n est pair.
Dans le paragraphe suivant, nous allons donner une généralisation des formules du type (1.1), (1.4), (1.6).

§ 2. LES DISTRIBUTIONS DE FOURIER DE TRANSMISSION

(2.1) Notations : Soient X une variété C^∞ de dimension n, et Λ une sous-variété lagrangienne conique de $T^*X\backslash 0$. On suppose que Λ est symétrique,

en ce sens que $\ell(\Lambda) = \Lambda$, où $\ell : T^*X \to T^*X$ est la symétrie $\lambda = (x,\xi) \mapsto \ell(\lambda) = \check{\lambda} = (x,-\xi)$. On appelle $S^*X = \dfrac{T^*X\backslash 0}{\mathbb{R}^+}$ le fibré en sphères cotangentes sur X, et $\mathbb{P}^*X = \dfrac{T^*X\backslash 0}{\mathbb{R}}$ le fibré en espaces projectifs cotangents sur X. On désignera toujours par π les projections naturelles, et on notera $S\Lambda$, $\mathbb{P}\Lambda$ les projections respectives de Λ dans S^*X, $\mathbb{P}^*X$.
Soient $\tilde{\Omega}_{1/2}$ le faisceau sur Λ des restrictions à Λ des 1/2-densités C^∞ sur $T^*X\backslash 0$, et L le fibré de Maslov sur Λ. Pour $r \in \mathbb{R}$, appelons $\tilde{\Omega}^{(r)}_{1/2}$ le faisceau sur $S\Lambda$ des sections homogènes de degré r de $\tilde{\Omega}_{1/2}$. Appelons L^0 le faisceau sur $S\Lambda$ des sections localement constantes de L.
Rappelons que si M', M'', M, $\tilde{M}$ sont quatre plans lagrangiens d'un espace symplectique tels que M, $\tilde{M}$ transverses à M', M'', l'indice de Hörmander s est défini par

$$2s(M',M'',M,\tilde{M}) = \operatorname{sgn}(M',\tilde{M},M'') - \operatorname{sgn}(M',M,M'') ,$$

par exemple, $\operatorname{sgn}(M',M,M'')$ est la signature de la forme bilinéaire symétrique sur M' : $(\alpha,\beta) \to \sigma(T\alpha,\beta)$, où σ est la forme symplectique, et où T est l'application linéaire de M' dans M ayant M'' comme graphe.
On notera $\mathcal{I}^m_\Lambda$ le faisceau sur $S\Lambda$ des microfonctions de Fourier classiques de degré m associées à Λ.

(2.2) Symboles complets

Soient deux fonctions $\Psi(x,\lambda)$ et $\chi(x)$ telles que :

(2.21)
- $\Psi \in C^\infty(X\times\Lambda,\mathbb{R})$, avec $\Psi(x,t\lambda) = t\Psi(x,\lambda)$ pour $x\in X$, $\lambda\in\Lambda$, $t\in\mathbb{R}\backslash 0$.
- $\chi \in C^\infty_0(X)$, à valeurs 1/2-densités sur X.
- $\Psi'_x(x,\lambda) \neq 0$ pour $x \in \operatorname{Supp}\chi$, $\lambda\in\Lambda$.
- Pour tout $\lambda\in\pi^{-1}(\operatorname{supp}\chi)$, le graphe $\mathcal{G}_{\Psi,\lambda} = \{(x,\Psi'_x(x,\lambda))\,|\,x\in X\}$ de la différentielle de Ψ par rapport à x coupe transversalement Λ en λ, et de plus $\mathcal{G}_{\Psi,\lambda}\cap\Lambda\cap\pi^{-1}(\operatorname{supp}\chi)$ se réduit à $\{\lambda\}$.
- $\Psi(\pi\lambda,\lambda) = 0$ pour $\lambda\in\Lambda$

Soit $\omega^{1/2}$ la restriction à Λ de la 1/2-densité canonique $|dx\wedge d\xi|^{1/2}$ sur T^*X. Pour $\lambda\in\Lambda$, désignons respectivement par $M'(\lambda)$, $M''(\lambda)$, $M_\Psi(\lambda)$ les espaces tangents en λ à la fibre de T^*X, à Λ, à $\mathcal{G}_{\Psi,\lambda}$.
Pour $A\in I^m_{cl}(X,\Lambda)$, on définit $\Sigma_{\Psi,\chi}A \in C^\infty(\Lambda,\tilde{\Omega}_{1/2}\otimes L)$ par

$$(\Sigma_{\Psi,\chi}A)(\lambda)M = \omega^{1/2}\langle A(x),\chi(x)e^{-i\Psi(x,\lambda)}\rangle\, e^{i\frac{\pi}{2}s(M'(\lambda),M''(\lambda),M,M_\Psi(\lambda))}$$

pour $\lambda\in\Lambda$, M plan lagrangien de $T_\lambda(T^*X)$ transverse à $M'(\lambda)$ et $M''(\lambda)$.
Grâce à la formule de la phase stationnaire, on sait ([5], [6], [12])

que $\Sigma_{\Psi,\chi}A \in S_{cl}^{m+\frac{n}{4}}(\Lambda,\hat{\Omega}_{1/2} \otimes L)$. On peut donc définir naturellement le morphisme de faisceaux sur $S\Lambda$

$$\Sigma_{\Psi,\chi} : \mathcal{J}_{\Lambda}^{m} \longrightarrow \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} \tilde{\Omega}_{1/2}^{(m+\frac{n}{4}-j)} \otimes L^{o} \tag{2.2.2}$$

Notons que :

(2.23) $\left\{\begin{array}{l}\text{Si le symbole complet } \Sigma_{\Psi,\chi} \text{ d'une section } \mathcal{a} \text{ de } \mathcal{J}_{\Lambda} = \bigcup_{m} \mathcal{J}_{\Lambda}^{m} \text{ est nul} \\ \text{pour \underline{toutes} } \Psi \text{ vérifiant les hypothèses (2.21), alors } \mathcal{a} = 0 \text{ au-dessus} \\ \text{de } \{x \in X \mid \chi(x) \neq 0\}.\end{array}\right.$

Pour généraliser les formules du type (1.1), (1.4), (1.6), il nous faut comparer les valeurs du symbole $\Sigma_{\Psi,\chi}$ en deux points symétriques de $S\Lambda$. Pour cela, donnons la

(2.3) <u>Définition</u> : Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur $S\Lambda$. On appelle <u>ℓ-involution</u> de $\mathcal{F}$ une involution τ de $\pi_* \mathcal{F}$ (où $\pi : S\Lambda \to \mathbb{P}\Lambda$) telle que : $\mathrm{supp}_{\mathcal{F}}(\tau f) = \ell(\mathrm{Supp}_{\mathcal{F}} f)$ pour toute section f de $\pi_* \mathcal{F}$.

(2.4) <u>Exemple</u> : Soit $d \in \mathbb{R}$ fixé. Pour $k \in \mathbb{Z}$, on définit la ℓ-involution $\ell_d^{(k)}$ de $\tilde{\Omega}_{1/2}^{(d+k)}$ par $\ell_d^{(k)} f = (-1)^k \ell^* f$ pour toute section f de $\pi_* \tilde{\Omega}_{1/2}^{(d+k)}$.

Passons maintenant aux ℓ-involutions du faisceau de Maslov L^o. Si f est une section de L^o, on définit la section conjuguée f^* de f par $f^*(\check{\lambda})(\check{M}) = \overline{f(\lambda)(M)}$ (f^* est bien une section de L^o puisque la symétrie ℓ change la forme symplectique de T^*X en son opposée). Si $\varphi(x,\theta)$ est une phase dans un ouvert conique Γ de $X \times (\mathbb{R}^N \backslash 0)$ telle que $i_\varphi : (x,\theta) \mapsto (x,\varphi'_x(x,\theta))$ soit un isomorphisme de $C_\varphi = \{(x,\theta) \in \Gamma \mid \varphi'_\theta(x,\theta) = 0\}$ sur un ouvert conique Λ_φ de Λ, on sait lui associer une section f_φ de L^o au-dessus de

$$\pi\Lambda_\varphi : f_\varphi(\lambda)(M) = e^{i\frac{\pi}{4}(\mathrm{sgn}\,\varphi''_{\theta\theta}(x,\theta) - \mathrm{sgn}(M'(\lambda),M,M''(\lambda)))} ,$$

où $\lambda = \pi i_\varphi(x,\theta)$, $(x,\theta) \in C_\varphi$. On vérifie que $f_\varphi^* = f_{-\varphi}$.

(2.5) <u>Définition</u> : On appelle <u>indice sur Λ</u> toute fonction antisymétrique $\omega = S\Lambda \to \frac{\mathbb{R}}{4\mathbb{Z}}$ telle que : si $\varphi(x,\theta)$ est une phase définissant localement Λ, alors $\omega(\lambda) + \mathrm{sgn}\,\varphi''_{\theta\theta}(x,\theta)$ est localement constante (pour $\lambda = \pi i_\varphi(x,\theta)$).

(2.6) <u>Proposition</u> : Les $*\ell$-involutions τ de L^o, c'est-à-dire les ℓ-involutions τ de L^o qui commutent à la conjugaison, sont en bijection avec les indices ω sur $S\Lambda$ par :

$$\tau(f_\varphi) = e^{i\frac{\pi}{2}(\omega(\lambda)+\operatorname{sgn}\varphi''_{\theta\theta}(x,\theta))} f_{-\varphi}$$

On note ℓ_ω la $*\ell$-involution de L^o d'indice ω.

(2.7) <u>Définitions</u> : Soit $d \in \mathbb{R}$. On pose $\mathcal{J}_{\Lambda,d} = \bigcup_{m+\frac{n}{4}-d \in \mathbb{Z}} \mathcal{J}^m_\Lambda$, et on définit naturellement à partir de (2.2.2) le morphisme de faisceaux sur $S\Lambda$

$$\Sigma_{\Psi,\chi} : \mathcal{J}_{\Lambda,d} \longrightarrow \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{\Omega}^{(d+k)}_{1/2} \otimes L^o$$

Soit ω un indice sur Λ, et $\rho = (d,\omega)$. On définit, grâce à (2.4) (2.6) la ℓ-involution ℓ_ρ de $\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{\Omega}^{(d+k)}_{1/2} \otimes L^o$ par $\ell_\rho = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \ell^{(k)}_d \otimes \ell_\omega$.

(2.8) <u>Théorème et définitions</u>

Soit $\rho = (d,\omega)$, où $d \in \mathbb{R}$ et où ω est un indice sur Λ

(i) il existe une et une seule ℓ-involution de $\mathcal{J}_{\Lambda,d}$, encore notée ℓ_ρ, telle que : $\Sigma_{\Psi,\chi}\,\ell_\rho = \ell_\rho\,\Sigma_{\Psi,\chi}$ pour toutes Ψ,χ vérifiant (2.2.1)

(ii) On dit qu'une section $\mathcal{a}$ de $\pi_* \mathcal{J}_{\Lambda,d}$ est de <u>ρ-transmission</u> si $\ell_\rho \mathcal{a} = \mathcal{a}$.

(iii) Soit F une partie conique et symétrique de Λ. On dit qu'une section $\mathcal{a}$ de $\pi_* \mathcal{J}_{\Lambda,d}$ est de <u>ρ-transmission dans F</u> si $\ell_\rho \Sigma_{\Psi,\chi}\,\mathcal{a} - \Sigma_{\Psi,\chi}\mathcal{a}$ est nul d'ordre infini dans πF pour toutes Ψ,χ vérifiant (2.2.1).

(iv) Supposons $\mathcal{a}$ à support compact dans un ouvert de phase symétrique, c'est à dire représentée par

(2.8.1) $A(x) = \int_\Gamma e^{i\varphi(x,\theta)} a(x,\theta)d\theta$, où Γ est un ouvert conique symétrique de $X \times (\mathbb{R}^N \backslash 0)$, $\varphi(x,-\theta) = -\varphi(x,\theta)$, $a \in \mathcal{S}^\mu$, $a \sim \sum_{j\geq o} a_j$.

Alors $\ell_\rho \mathcal{a}$ est représentable par

$$B(x) = \int_\Gamma e^{i\varphi(x,\theta)}\, b(x,\theta)d\theta \ , \text{ où } b \in \mathcal{S}^\mu \ , b \sim \sum_{j \geq o} b_j$$

avec

(2.8.2) Pour tout $j \in \mathbb{N}$: $b_j(x,-\theta) = (-1)^{\mu+\frac{N}{2}-d-j}\, e^{i\frac{\pi}{2}(\omega(\lambda)+\operatorname{sgn}\varphi''_{\theta\theta}(x,\theta))}\, a_j(x,\theta)$

(où $\lambda = \pi\, i_\varphi(x,\theta)$)

Pour que $\mathcal{A}$ soit de ρ-transmission dans F, il suffit que :

(2.8.3) Pour tout $j \in \mathbb{N}$: $a_j(x,-\theta)-(-1)^{\mu+\frac{N}{2}-d-j}\, e^{i\frac{\pi}{2}(\omega(\lambda)+\operatorname{sgn}\varphi''_{\theta\theta}(x,\theta))}\, a_j(x,\theta)$ soit nulle d'ordre infini sur $i_\varphi^{-1}(F)$.

Lorsque $a(x,\theta)$ ne dépend de (x,θ) que par l'intermédiaire d'une coordonnée locale sur C_φ, les conditions (2.8.3) sont nécessaires et suffisantes pour que $\mathcal{A}$ soit de ρ-transmission dans F.

Indications sur la démonstration du théorème (2.8) : l'unicité de ℓ_ρ résulte de (2.2.3). Plaçons nous dans la situation locale (2.8.1); la formule de la phase stationnaire permet de montrer que

$$(\Sigma_{\Psi,\chi}\mathcal{A})(\lambda) \sim \sum_{j,k\geq 0} |\det Q(x,\theta)|^{-1/2} R_k(\chi a_j)(x,\theta)\omega^{1/2}(\lambda) f_\varphi(\lambda), \text{ où :}$$

$$(x,\theta) \in C_\varphi,\ \lambda = i_\varphi(x,\theta)\ ,\ Q(x,\theta) = \begin{pmatrix} \varphi''_{xx}(x,\theta) - \Psi''_{xx}(x,\lambda) & \varphi''_{x\theta}(x,\theta) \\ \varphi''_{\theta x}(x,\theta) & \varphi''_{\theta\theta}(x,\theta) \end{pmatrix}$$

R_k est un opérateur différentiel en (x,θ) de degré $\leq 2k$, dépendant de φ, Ψ, et tel que $R_o = I$, $\check{R}_k = (-1)^k R_k$ (où $(x,\check{\theta}) = (x,-\theta)$). La densité $|\det Q|^{-1/2} R_k(\chi a_j)\omega^{1/2}$ est homogène de degré $m+\frac{n}{4}-j-k$.

D'après (2.4), (2.6), (2.7), on obtient, pour $\lambda = i_\varphi(x,\theta)$:

$$(\ell_\rho\, \Sigma_{\Psi,\chi}\mathcal{A})(\check{\lambda}) \sim \sum_{j,k\geq 0} (-1)^{m+\frac{n}{4}-d-j-k} R_k(\chi a_j)(x,\theta)\omega^{1/2}(\check{\lambda})\, e^{i\frac{\pi}{2}(\omega(\lambda)+\operatorname{sgn}\varphi''_{\theta\theta}(x,\theta))} f_\varphi(\check{\lambda})$$

De même, pour

(2.8.4) $\mathcal{B} \sim \int_\Gamma e^{i\varphi(x,\theta)} b(x,\theta)\,d\theta$, $b \sim \sum_{j\geq 0} b_j$, on a :

$$(\Sigma_{\Psi,\chi}\mathcal{B})(\check\lambda) \sim \sum_{j,k\geq o} |\det Q(x,-\theta)|^{-1/2} R_k(\chi b_j)(x,-\theta)\omega^{1/2}(\check\lambda) f_\varphi(\check\lambda)$$

$$= \sum_{j,k\geq o} |\det Q(x,\theta)|^{1/2}(-1)^k R_k(\chi\check b_j)(x,\theta)\omega^{1/2}(\check\lambda) f_\varphi(\check\lambda) \ ,$$

d'où

$$(\Sigma_{\Psi,\chi}\mathcal{B} - \ell_\rho \Sigma_{\Psi,\chi}\mathcal{A})(\check\lambda)$$

$$\sim \sum_{p\in\mathbb{N}} \sum_{j+k=p} (-1)^k R_k[\chi(\check b_j - (-1)^{m+\frac{n}{4}-d-j} e^{i\frac{\pi}{2}(\omega(\lambda)+\mathrm{sgn}\varphi''_{\theta\theta}(x,\theta))} a_j)](x,\theta)$$

Posons donc $\ell_\rho\mathcal{A} = \mathcal{B}$, où $\mathcal{B}$ est définie par (2.8.4) avec

$$b_j(x,-\theta) = (-1)^{m+\frac{n}{4}-d-j} e^{i\frac{\pi}{2}(\omega(\lambda)+\mathrm{sgn}\varphi''_{\theta\theta}(x,\theta))} a_j(x,\theta) \ .$$

(2.2.3) montre que la microfonction $\mathcal{B}$ ne dépend pas de la représentation (2.8.1) choisie pour $\mathcal{A}$, et que l'application $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{B}$ se prolonge en une ℓ-involution ℓ_ρ de $\mathcal{J}_{\Lambda,d}$ satisfaisant aux conditions exigées dans (i). Enfin, (2.8.5) montre que $\mathcal{A}$ est de ρ-transmission dans F si et seulement si, pour toutes Ψ,χ vérifiant (2.2.1), et pour tout $p\in\mathbb{N}$, on a

$$\sum_{j+k=p} (-1)^k R_k[\chi(\check a_j - (-1)^{m+\frac{n}{4}-d-j} e^{i\frac{\pi}{2}(\omega(\lambda)+\mathrm{sgn}\varphi''_{\theta\theta}(x,\theta))} a_j)]$$

nul d'ordre infini sur $i_\varphi^{-1}(F)$, d'où (iv) en remarquant que $R_o = I$, $m+\frac{n}{4} = \mu + \frac{N}{2}$.

§ 3. EXEMPLES

(3.1) Exemple : Les formules (1.1) montrent qu'un opérateur pseudo-différentiel de degré m dans X est de transmission par rapport à $\overline{\Omega}$ si et seulement si il est de $\rho = (d,\omega)$-transmission dans $N_{\partial\overline{\Omega}}$ avec

$$\begin{cases} m+\frac{n_X}{2}-d\in\mathbb{Z} \\ n_X-2d+\omega(\lambda)=0 \pmod{4} \text{ lorsque } \lambda\in \text{Fibré conormal intérieur à } \partial\overline{\Omega}. \end{cases}$$

Les distributions de ρ-transmission forment évidemment un faisceau de $C^\infty(X)$-modules sur $S\Lambda$; nous allons en préciser des générateurs lorsque $\Lambda = N_S$, S hypersurface lisse de X .

(3.2) <u>Proposition</u> : Soient S une hypersurface lisse de X, N_S son fibré conormal privé de la section nulle. Les microfonctions de Fourier classiques associées à N_S qui sont de $\rho = (d,\omega)$-transmission sont les microfonctions qui, au voisinage de chaque point de S, dans une carte locale transportant S en $\{x\in\mathbb{R}^n | x_n = 0\}$, sont représentées par les distributions A qui, modulo $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, sont de la forme suivante , où ω^+ est la valeur de ω pour $\xi_n > 0$, $\mu+\frac{1}{2}-d\in\mathbb{Z}$, f et g $\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$A(x) \sim f(x)\Big[(e^{i\frac{\pi}{2}(-1+2d+\omega^+)}-1)e^{-i\frac{\pi}{2}\mu}x_{n-}^{-(\mu+1)}-(e^{i\frac{\pi}{2}(-1-2d+\omega^+)}-1)e^{i\frac{\pi}{2}\mu}x_{n+}^{-(\mu+1)}\Big]$$

dans le cas $d-\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$.

Dans le cas $d-\frac{1}{2}\in\mathbb{Z}$,

$$A(x) \sim f(x)\Big[(e^{i\frac{\pi}{2}(1-2d+\omega^+)}+1)\pi D^\mu\delta(x_n)-(e^{i\frac{\pi}{2}(1-2d+\omega^+)}-1)i^{\mu+1}\mu!\,\mathrm{vp}\,x_n^{-(\mu+1)}\Big]$$

$$+\ g(x)\Big[(e^{i\frac{\pi}{2}(1-2d+\omega^+)}+1)\pi Y(x_n)-(e^{i\frac{\pi}{2}(1-2d+\omega^+)}-1)i\,\mathrm{Log}|x_n|\Big]$$

avec $\mu\in\mathbb{N}$ ou

$$A(x) \sim g(x)\Big[(e^{i\frac{\pi}{2}(1-2d+\omega^+)}+1)\pi x_{n+}^{-(\mu+1)}-(e^{i\frac{\pi}{2}(1-2d+\omega^+)}-1)i x_n^{-(\mu+1)}\mathrm{Log}|x_n|\Big]$$

avec μ entier ≤ -1.

En particulier, on a les cas remarquables suivants :

(3.2.1) Pour $d-\frac{1}{2}\notin \mathbb{Z}$, $1-2d+\omega^{+}=0 \bmod 4$:

$$A(x) \sim f(x)x_{n-}^{-(\mu+1)} \quad \text{avec } \mu+\frac{1}{2}-d \in \mathbb{Z} \text{ ; donc } A\in C^{\infty}_{+S} .$$

(3.2.2) Pour $d-\frac{1}{2}\notin \mathbb{Z}$, $-1+2d+\omega^{+}=0 \bmod 4$:

$$A(x)\sim f(x)x_{n+}^{-(\mu+1)} \quad \text{avec } \mu+\frac{1}{2}-d \in \mathbb{Z} \text{ ; donc } A \in C^{\infty}_{-S} .$$

(3.2.3) Pour $d-\frac{1}{2}\in \mathbb{Z}$, $1-2d+\omega^{+}=0 \pmod 4$:

$$A \in C^{\infty}_{\pm S} .$$

(3.2.4) Pour $d-\frac{1}{2}\in \mathbb{Z}$, $1-2d+\omega^{+}=0 \pmod 4$:

$$A(x) \sim f(x)\ \mathrm{vp}x_n^{-(\mu+1)}+g(x)\mathrm{Log}|x_n| \quad \text{avec } \mu \in \mathbb{N}$$

ou

$$A(x) \sim g(x)\ x_n^{-(\mu+1)}\mathrm{Log}|x_n| \text{ avec } \mu \text{ entier } \leq -1 .$$

Cette proposition résulte des formules de transformation de Fourier rappelées dans l'introduction, et complétées par :

$$\mathcal{F}(\mathrm{vp}\ \xi_n^{\lambda}) \sim 2\pi\frac{(-i)^{\lambda}}{\Gamma(-\lambda)}\ x_{n+}^{-(\lambda+1)} \text{ lorsque } \lambda \text{ entier } \leq -1.$$

$$\mathcal{F}(\mathrm{vp}\ \mathrm{sgn}\,\xi_n.\xi_n^{\lambda}) \sim \frac{-2}{\Gamma(-\lambda)}(ix_n)^{-(\lambda+1)}\log|x_n| \text{ lorsque } \lambda \text{ entier } \leq -1.$$

$$\mathcal{F}(\mathrm{sgn}\,\xi_n.\xi_n^{\lambda}) = 2i^{\lambda+1}\Gamma(\lambda+1)\mathrm{vp}x_n^{-(\lambda+1)} \quad \text{lorsque } \lambda\in \mathbb{N}$$

$$\mathrm{vp}\,x_n^{-(\mu-j+1)} = x_n^{j}\,\mathrm{vp}x_n^{-(\mu+1)} \quad (\text{où } \mu\in \mathbb{Z} ,\ j\in \mathbb{N})$$

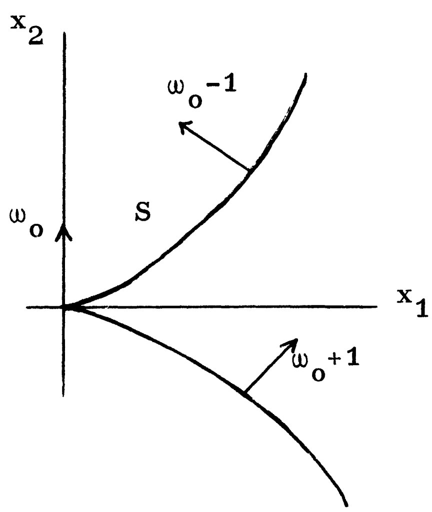
$$x_nD^{k}\delta(x_n) = ik\,D^{k-1}\delta(x_n) \quad \text{pour } k \text{ entier } \geq 1 .$$

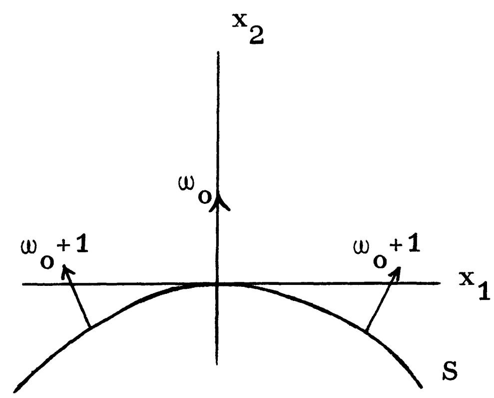
(3.3) <u>Cas où Λ est le fibré conormal à une hyerpsurface singulière S de X</u>. Pour simplifier nous supposons $\dim X = 2$. Avec des coordonnées convenables dans X, on sait qu'on peut localement représenter Λ par une phase φ de la forme $\varphi(x,\xi) = x.\xi - H(\xi)$. On se place par exemple au voisinage de $\xi = (0,1)$, et on pose $t = \frac{\xi_2}{\xi_1}$, $h(t) = H(t,1)$. On peut toujours supposer $h(0) = 0$, $h'(0) = 0$. On étudie le cas où $h(t)$ n'est pas nulle d'ordre infini pour

$t=0$, et on appelle p le plus petit entier tel que $h^{(p+1)}(0) \neq 0$. Λ est alors le fibré conormal à la courbe S définie par $x_1 = h'(t)$, $x_2 = (h(t) - th'(t)$; S admet 0 comme point stationnaire lorsque $p \geq 2$. Soit ω un indice sur Λ ; posons $\omega_o = \omega(0,0;0,1)$. En calculant $\operatorname{sgn} H''(\xi)$, et en supposant par exemple $H^{(p+1)}(0) > 0$, on vérifie que, pour $\lambda = \pi(H'(\xi),\xi)$

$$\omega(\lambda) = \omega_o + \operatorname{sgn}\xi_1 \quad \text{si } p \text{ est pair}$$

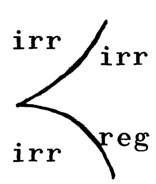
$$\omega(\lambda) = \omega_o + \operatorname{sgn}\xi_2 \quad \text{si } p \text{ est impair} \geq 3$$



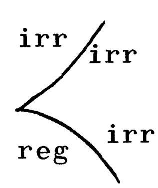


Les figures ci-dessous donnent les comportements au bord remarquables des microfonctions de ρ-transmission dans le cas où, par exemple, p est pair (reg signifie : C^∞ jusqu'au bord sur la partie <u>lisse</u> de S)

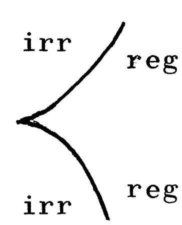
(3.3.1) $\quad d - \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, $d \notin \mathbb{Z}$, $2 - 2d + \omega_o = 0 \mod 4$:



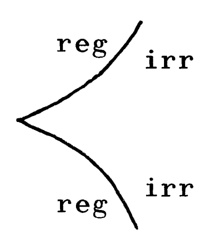
ou



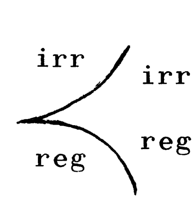
(3.3.2) $\quad d \in \mathbb{Z}$, $2 - 2d + \omega_o = 0 \mod 4$:



ou



(3.3.3) $\quad d - \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$, $2 - 2d + \omega_o = 0 \mod 4$:



(3.4) Remarque : Dans le cas $p = 2$, on peut se ramener à $h(t) = \frac{t^3}{3}$, et représenter toute distribution de Fourier associée à $\Lambda = N_S$ par

$$A(x) = \int e^{i\xi_2(tx_1 + x_2 - \frac{t^3}{3})} a(x_1; t\xi_2, \xi_2)|\xi_2| dt\, d\xi_2 , \quad \text{avec } a \in \mathcal{S}^{\mu} ,$$

et $a(x_1; t, 1) = f(x_1) + t\, g(x_1)$, où $f, g \in C^{\infty}(\mathbb{R})$. On en déduit facilement que la régularité n'a plus lieu en général au point de rebroussement dans le cas de la deuxième figure (3.3.2). Par des méthodes de déformation de contour en la variable t, Gårding [9] a démontré que cette régularité a par contre lieu dans le cas de la première figure (3.3.2).

§ 4. CONJUGUES, COMPOSES, PARAMETRIX

On a évidemment la proposition :

(4.1) Proposition : ℓ_ρ commute à la conjugaison des microfonctions ; si $\mathcal{a}$ est de ρ-transmission, il en est de même de $\bar{\mathcal{a}}$.

Soient maintenant X_2, X, X_1 des variétés C^{∞}, C_1 une relation canonique homogène et symétrique de T^*X dans T^*X_1, C_2 une relation canonique homogène et symétrique de T^*X_2 dans T^*X. On se place dans les conditions habituelles de la composition pour $C_1 \circ C_2$:

- $\xi \neq 0$ si $(x_1, \xi_1, x, \xi) \in C_1$ ou si $(x, \xi, x_2, \xi_2) \in C_2$.

- L'intersection $(C_1 \times C_2) \cap [T^*X_1 \times \mathrm{Diag}(T^*X \times T^*X) \times T^*X_2]$ est transverse, se projette dans $T^*(X_1 \times X_2)\backslash 0$, et cette projection est propre.

(4.2) Définition : Pour $(\lambda_1, \lambda) \in C_1$ et $(\lambda, \lambda_2) \in C_2$, on définit l'indice de composition $\omega_{C_1, C_2}(\lambda_1, \lambda, \lambda_2)$ par

$$\omega_{C_1, C_2}(\lambda_1, \lambda, \lambda_2) = \mathrm{sgn}\,\varphi''_{\theta\theta}(x_1, x_2; \theta) - \mathrm{sgn}\,\varphi''_{1\theta_1\theta_1}(x_1, x; \theta_1) - \mathrm{sgn}\,\varphi''_{2\theta_2\theta_2}(x, x_2; \theta_2)$$

où φ_1 est une phase définissant C_1 au voisinage de (λ_1, λ)

φ_2 est une phase définissant C_2 au voisinage de (λ, λ_2)

et où $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ est la phase correspondante définissant $C_1 \circ C_2$ au voisinage de (λ_1, λ_2) (on rappelle que le second membre de (4.2.1) ne dépend pas des phases φ_1, φ_2 choisies : voir [12]).

Donnons sans démonstration une interprétation géométrique de ω_{C_1,C_2} . Si A, B, C sont trois plans lagrangiens <u>quelconques</u> d'un espace symplectique, posons $\mathrm{sgn}(A,B,C) = \mathrm{sgn}(\frac{A}{D}, \frac{B}{D}, \frac{C}{D})$, où $D = A\cap B + B\cap C + C\cap A$ (noter que $\frac{A}{D}, \frac{B}{D}, \frac{C}{D}$ sont trois plans lagrangiens deux à deux transverses de l'espace symplectique $\frac{D^o}{D}$). Cette définition est parallèle à une définition donnée par Leray [13].

(4.3) <u>Théorème</u> : Soient respectivement dC_1, dC_2 les espaces tangents à C_1, C_2 en (λ_1,λ), (λ,λ_2), et M_1', M', M_2' les espaces tangents aux fibres de T^*X_1, T^*X, T^*X_2 en λ_1, λ, λ_2. Alors

(4.3.1) $$\omega_{C_1,C_2}(\lambda_1,\lambda,\lambda_2) \equiv -\mathrm{sgn}(dC_1^{-1}M_1', M', dC_2M_2') \bmod 8 .$$

Si $\mathcal{a}_j$ est une section de $\mathcal{J}_{C_j}^{m_j}$ $(j = 1,2)$, on définit naturellement la composée $\mathcal{a}_1 \circ \mathcal{a}_2$, section de $\mathcal{J}_{C_1 C_2}^{m_1+m_2}$ (dans les notations, on confond systématiquement une relation canonique et la variété lagrangienne associée). En utilisant les formules du théorème (2.8), (iii), on obtient le théorème de composition suivant :

(4.4) <u>Théorème</u> : Pour $j = 1,2$, soient $\rho_j = (d_j, \omega_j)$ où $d_j \in \mathbb{R}$ et où ω_j est un indice sur C_j. On pose $\rho = (d,\omega)$, où $d = d_1 + d_2 - \frac{n_X}{2}$, et , pour $(\lambda_1,\lambda_2) \in C_1 \circ C_2$:

$$\omega(\lambda_1,\lambda_2) = \omega_1(\lambda_1,\lambda) + \omega_2(\lambda,\lambda_2) - \omega_{C_1,C_2}(\lambda_1,\lambda,\lambda_2),$$

qu'on suppose indépendant du point λ choisi tel que $(\lambda_1,\lambda) \in C_1$, $(\lambda,\lambda_2) \in C_2$. Soit $\mathcal{a}_j$ une section de $\pi_* \mathcal{J}_{C_j,d_j}$ $(j = 1,2)$. Alors

$$\ell_{\rho_1}(\mathcal{a}_1) \circ \ell_{\rho_2}(\mathcal{a}_2) = \ell_\rho(\mathcal{a}_1 \circ \mathcal{a}_2) .$$

Donc si $\mathcal{a}_j$ est de ρ_j-transmission dans F_j $(j = 1,2)$, alors $\mathcal{a}_1 \circ \mathcal{a}_2$ est de ρ-transmission .

Plus généralement, si $\mathcal{A}_j$ est de ρ_j-transmission dans F_j $(j = 1,2)$, alors $\mathcal{A}_1 \circ \mathcal{A}_2$ est de ρ-transmission dans $F_1 \circ F_2$ lorsqu'on suppose que les conditions $(\lambda_1,\lambda) \in C_1, (\lambda,\lambda_2) \in C_2, (\lambda_1,\lambda_2) \in F_1 \circ F_2$ impliquent $(\lambda_1,\lambda) \in F_1$, $(\lambda,\lambda_2) \in F_2)$. On en déduit la

(4.5) <u>Proposition</u> : Soient X_1, X_2 deux variétés C^∞ de même dimension n, et U_j $(j = 1,2)$ un cône ouvert symétrique de $T^*X_j\backslash 0$. Soit C une bijection canonique homogène symétrique de U_2 sur U_1. Soit $\rho = (d,\omega)$ où $d \in \mathbb{R}$ et où ω est un indice sur C. On pose $\tilde{\rho} = (n-d,\omega)$, où ω est l'indice sur C^{-1} défini par $\omega(\lambda_2,\lambda_1) = -\omega(\lambda_1,\lambda_2)$. Soit $\mathcal{A}$ une section elliptique de $\mathcal{J}_{C,d}(U_1 \times U_2)$, et $\mathcal{A}^{-1}$ son inverse. Alors

(i) $\ell_\rho \mathcal{A}$ est elliptique, et on a $(\ell_\rho \mathcal{A})^{-1} = \ell_{\tilde{\rho}}(\mathcal{A}^{-1})$

(ii) Si $\mathcal{A}$ est de ρ-transmission dans F, $\mathcal{A}^{-1}$ est de $\tilde{\rho}$-transmission dans F^{-1}.

(4.6) <u>Exemple</u> : Soit P_1 un opérateur pseudo-différentiel dans X, de degré m_1, et de transmission par rapport à $\overline{\Omega}$ (voir (1.1), (3.1)). Soit $\mathcal{A}_2$ une section de $\pi_* \mathcal{J}_{N_{\partial\overline{\Omega}}}$ de $\rho_2 = (d_2,\omega_2)$-transmission. Le théorème de composition (4.4) montre que $P\mathcal{A}_2$ est de $\rho = (d,\omega)$-transmission avec

$$\begin{cases} d - \frac{1}{2} = d_2 - \frac{1}{2} + m_1 \pmod{\mathbb{Z}} \\ 1 - 2d + \omega^+ = 1 - 2d_2 + \omega_2^+ \pmod 4), \end{cases}$$

où le signe + correspond au fibré conormal intérieur à $\partial\overline{\Omega}$. On retrouve ainsi en particulier la propriété classique (1.2) grâce à (3.2.3), (3.2.1).

(4.7) <u>Exemple</u> : Soit P_1 un opérateur pseudo-différentiel dans X, de degré dans $\mathbb{Z}$, et de transmission par rapport à toute variété à bord $\overline{\Omega}$ de X. Ceci revient à dire, d'après (3.1), que P_1 est de $\rho_1 = (\frac{n_X}{2},0)$-transmission. Soit C_2 une relation canonique homogène et symétrique de T^*X_2 dans T^*X ; (4.4) montre que P_1 commute à ℓ_{ρ_2}, et donc que P_1 conserve la propriété de ρ_2-transmission. Ceci s'applique en particulier lorsque P_1 est un opérateur différentiel. Réciproquement, signalons la

(4.8) <u>Théorème</u> : (i) Si deux ℓ-involutions ℓ_1, ℓ_2 de $\mathcal{J}_{\Lambda,d}$ commutent aux opérateurs différentiels, elles sont proportionnelles en ce sens qu'il existe une fonction $w : S\Lambda \to \mathbb{C}^*$ localement constante telle que

$\ell_2 = w\ell_1$.

(ii) la ℓ-involution ℓ_ρ de $\mathcal{J}_{\Lambda,d}$ définie dans (2.8), (i) est l'unique ℓ-involution de $\mathcal{J}_{\Lambda,d}$ qui

- commute aux opérateurs différentiels
- induit la ℓ-involution $\ell_d^{(m+\frac{n}{4}-d)} \otimes \ell_\omega$ sur les symboles principaux (voir (2.7)).

§. 5. APPLICATIONS AUX OPERATEURS HYPERBOLIQUES

(5.1) Soient Y une variété C^∞ de dimension n_Y, et $X = Y \times \mathbb{R}$. On note $x = (y,t)$, $\xi = (\eta,\tau)$. Soit $P(x,D_x)$ un opérateur différentiel de degré r dans X, fortement hyperbolique (ce qui suit s'appliquerait de la même façon, grâce à [4], à un opérateur hyperbolique à caractéristiques de multiplicité constante vérifiant la condition de Lévi). Soient p le symbole principal de P, et

$$C_o = \{(x,\xi;y_o,\eta_o) \in (T^*X\backslash 0)\times(T^*Y\backslash 0) \mid \exists \tau_o \in \mathbb{R} \text{ avec } p(y_o,0;\tau_o,\eta_o) = 0,$$

$$(x,\xi) \in \text{bicaractéristique de } p \text{ issue de } (y_o,0;\eta_o,\tau_o)\} .$$

C_o est une relation canonique homogène et symétrique, qu'on suppose fermée. Considérons par exemple le problème de Cauchy standard pour P :

$$(5.11) \quad \begin{cases} Pu = 0 & \text{dans } X \\ \gamma_k u = \delta_{k,r-1} g & \text{dans } Y \quad (k = 0,\ldots,r-1) \end{cases}$$

où γ_o est l'opérateur de restriction à $Y \times \{0\}$, et $\gamma_k = \gamma_o \circ D_t^k$. On sait que le micronoyau E_o de la paramétrix de (5.1.1) est caractérisé par

$$(5.1.2) \quad E_o \in \mathcal{J}_{C_o}^{-(r-1)-\frac{1}{4}}(SC_o) \; ; \; PE_o = 0 \; ; \; \gamma_k E_o = \delta_{k,r-1} I \; (k = 0,\ldots,r-1).$$

(5.2) <u>Théorème</u> : (i) Il existe un et un seul indice ω_o sur C_o tel que $\omega_o = 0$ pour $t = 0$

(ii) E_o est de $(\frac{n_Y}{2},\omega_o)$-transmission.

Ce théorème se démontre immédiatement grâce à (4.4), (5.2). Pour l'interpréter, on doit préciser ω_o. D'une façon générale, en intégrant la variation de $\operatorname{sgn}\varphi''_{\theta\theta}(x,\theta)$ on obtient le

(5.3) Lemme : Soit Λ une sous-variété lagrangienne conique symétrique de $T^*X\backslash 0$. Pour $\lambda\in\Lambda$, posons $k(\lambda) = \dim\operatorname{Ker} d\pi(\lambda) = \dim M'(\lambda)\cap M''(\lambda)$, où $\pi : \Lambda \to X$ est la projection. Soit ω un indice sur Λ ; alors $\omega(\lambda)-\omega(\lambda_o) \equiv k(\lambda)-k(\lambda_o)$ modulo 2 si λ, λ_o sont dans la même composante connexe de $S\Lambda$.

Soit Λ_2 une sous-variété lagrangienne conique symétrique de $T^*Y\backslash 0$. Les hypothèses du théorème de composition (4.4) sont toujours vérifiées pour C_o, Λ_2, avec $\omega_{C_o,\Lambda_2} = 0$ pour $t=0$. Posons $\Lambda = C_o\circ\Lambda_2$. Si $\mathcal{A}_2$ est de ρ_2-transmission, $E_o\mathcal{A}_2$ est donc de $\rho=(d,\omega)$-transmission, avec $d=d_2$, $\omega(y_o,0;\eta_o,\tau_o) = \omega_2(y_o,\eta_o)$. On va examiner deux exemples de varieté Λ_2 .

(5.4) Prenons d'abord $\Lambda_2 = N_S$, où S est un hypersurface lisse de Y. On vérifie alors que, pour $|t|$ petit, $\Lambda = \bigcup_{j=1}^{r} N_{S_j}$, où les S_j sont des hypersurfaces lisses de X, deux à deux à croisements normaux.
D'après (5.3), on a $\omega(x,\xi) \equiv \omega_2(y_o,\eta_o) + k(x,\xi) - 1$ modulo 2 lorsque (x,ξ) est sur la bicaractéristique issue d'un point de la forme $(y_o,0;\eta_o,\tau_o)$.
Plaçons-nous dans un ouvert connexe V de Λ tel que

(5.4.1) Dans V, Λ est le fibré conormal à une hypersurface lisse W de X. Alors la formule précédente se réduit dans V à

$$\omega(x,\xi) = \omega_2(y_o,\eta_o) + 2\nu \quad (\nu\in\mathbb{Z}) .$$

On obtient donc, selon la parité de ν, le type de transmission de $E_o\mathcal{A}_2$ en fonction du type de transmission de $\mathcal{A}_2$.
Pour $|t|$ petit, (5.4.1) est vérifié et ν est pair, donc $E_o\mathcal{A}_2 = \sum_{j=1}^{r}\mathcal{B}_j$ où $\mathcal{B}_j$ a, par rapport à S_j, la même transmission que $\mathcal{A}_2$ par rapport à S.

Pour t quelconque sous l'hypothèse (5.4.1), on obtient par exemple que :

. si $\mathcal{a}_2 \in C^\infty_{\pm S}$, alors $\begin{cases} E_o\mathcal{a}_2 \in C^\infty_{\pm W} \text{ si } \nu \text{ est pair} & \text{reg} \overset{W}{\Big(} \text{reg} \\ E_o\mathcal{a}_2 \text{ du type (3.2.4) si } \nu \text{ impair} & \text{irr} \overset{W}{\Big(} \text{irr} \end{cases}$

. si $\mathcal{a}_2$ est du type (3.2.1), alors

$$\begin{cases} E_o\mathcal{a}_2 \text{ est du même type si } \nu \text{ pair} & \text{reg} \overset{W}{\Big(} \text{irr} \\ E_o\mathcal{a}_2 \text{ est du type symétrique (3.2.2) si } \nu \text{ impair,} \\ d_2 \in \mathbb{Z} & \text{irr} \overset{W}{\Big(} \text{reg} \end{cases}$$

Quand on franchit une singularité de W, la parité de ν varie ; les figures ci-dessus, ainsi que les figures du type (3.3.1), (3.3.2), (3.3.3) montrent comment varie le comportement au bord de $E_o\mathcal{a}_2$. Ces résultats sont, au moins dans des cas particuliers, connus de Maslov ([14], p.145-146, et [15]) sous le nom de métamorphose des discontinuités.

(5.5) Nous considérons enfin le cas où Λ_2 est le fibré conormal à un point $\bar{y}_o$ de Y_o, et où $\mathcal{a}_2$ est la masse de Dirac en ce point. On pose $E_o\delta_{\bar{y}_o} = E$.

Pour $t > 0$, E coïncide avec la solution fondamentale de P, dont nous allons étudier les lacunes. Λ est ici la réunion des bicaractéristiques issues des points $(\bar{y}_o, 0; \xi_o)$ tels que $p(\bar{y}_o, 0, \xi_o) = 0$. Puisque $\delta_{\bar{y}_o}$ est de $(\frac{n_Y}{2}, 0)$-transmission, on obtient que E est de $(\frac{n_Y}{2}, \omega)$-transmission, où ω est l'unique indice sur Λ tel que $\omega = 0$ pour $t = 0$. D'après le lemme (5.3), on a $\omega(\lambda) \equiv k(\lambda) - n_Y$ modulo 2, ce qui montre que, dans un ouvert convexe V vérifiant (5.4.1), E est de $\rho = (d, \omega)$-transmission, avec

(5.5.1) $$d = \frac{n_Y}{2}, \quad \omega = 1 - n_y + 2\nu \qquad (\nu \in \mathbb{Z})$$

D'après (3.2), on obtient :

(5.6) <u>Proposition</u> : Dans les conditions (5.4.1), et avec ν défini par (5.5.1) :

(i) si n_Y est impair, $\begin{cases} E \in C^\infty_{\pm W} \text{ pour } \nu \text{ pair.} \\ E \text{ est du type (3.2.4) pour } \nu \text{ impair.} \end{cases}$

(ii) si n_Y est pair, $\begin{cases} E \text{ est du type (3.2.2) pour } \nu \text{ pair (donc } E \in C^{\infty}_{-W}). \\ E \text{ est du type symétrique (3.2.1) pour } \nu \text{ impair} \end{cases}$

(donc $E \in C^{\infty}_{+W}$) .

Pour n_Y pair, E est donc toujours C^{∞} jusqu'au bord d'un côté de $\overline{W}$.

L'hypothèse (5.4.1) n'est évidemment pas satisfaite partout. Le conoïde bicaractéristique peut présenter des singularités, même pour $t \neq 0$ petit. Quand on franchit une singularité, la proposition précédente, ainsi que les figures du type (3.3.3) pour n_Y impair, et les figures du type (3.3.2) pour n_Y impair précisent la métamorphose des lacunes. On retrouve ainsi des résultats établis par Gärding [9] à l'aide de prolongements presque analytiques des phases et des amplitudes.
On peut dans certains cas calculer le nombre ν. Par exemple, la proposition suivante généralise le théorème I.9.3 de [I].

(5.7) <u>Proposition</u> : Soit $\Gamma^*_o = p^{-1}(0) \cap T^*_{\bar{y}_o,o}(X)$ le cône caractéristique de P en $(\bar{y}_o, o)$. On suppose que sa courbure est non dégénérée en $(\bar{y}_o, 0; \xi_o)$, et on appelle q (resp : p) le nombre de valeurs propres négatives (resp : positives) de cette courbure, relativement à un choix d'équation $f = 0$ de Γ^*_o tel que $\frac{\partial f}{\partial \tau} < 0$.

Alors

(i) Il existe un voisinage $\tilde{V}$ de $(\bar{y}_o, 0; \xi_o)$ dans Λ tel que (5.4.1) soit vérifié dans $V = V_{\pm} = \tilde{V} \cap \{\pm t > 0\}$.

(ii) Le nombre ν de la proposition (5.6) est donné par :

$$\nu = q \quad \text{dans } V_+$$

$$\nu = p \quad \text{dans } V_-$$

On remarquera que le cône dual Γ_o de Γ^*_o est le cône tangent en $(\bar{y}_o, 0)$ au conoïde bicaractéristique ; q (resp : p) est aussi égal au nombre de valeurs propres négatives (resp : positives) de la courbure de Γ_o, quand le fibré conormal à Γ_o est orienté par $-\xi_o$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Atiyah, Bott, Gärding : Lacunas for hyperbolic differential operator with constant coefficient, I.
Acta Mathematica, 124, (1970), p.109-189.

[2] Atiyah, Bott, Gärding : Lacunas for hyperbolic differential operator with constant coefficient, II.
Acta Mathematica, 131, (1973), p.145-206.

[3] Boutet de Monvel : Boundary problems for pseudo differential operators.
Acta Mathematica, 126, (1971).

[4] Chazarain : Opérateurs hyperboliques à caractéristiques de multiplicité constante.
Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 24, 1 (1974), p.173-202.

[5] Duistermaat : Fourier Integral Operators
Courant Institute of Math. Sciences, New York University (1973).

[6] Duistermaat : Oscillatory Integrals, Lagrange Immersions and Unfolding of singularities.
Comm. Pure and Applied Math., Vol. XXVII, (1974), p.207-281.

[7] Duistermaat, Hörmander : Fourier Integral Operators, II.
Acta Mathematica, 128, (1972), p.183-269.

[8] Gårding : Sharp Fronts and Lacunas.
Actes, Congrès Intern. Math., (1970), tome 2, p.723-729.

[9] Gårding : Sharp Fronts of Paired of Oscillatory Integrals.
R. I. M. S. Symposium, Avril 1976, Kyoto.

[10] Guelfand, Chilov : Les distributions.
Dunod, Paris (1962).

[11] Guillemin, Schaeffer : Fourier Integral Operators from the Radon Point of View.
(Preprint).

[12] Hörmander : Fourier Integral Operators, I.
Acta Mathematica, 127, (1971), p.79-183.

[13] Leray : Compléments à la théorie d'Arnold de l'indice de Maslov.
Séminaire E.D.P., Collège de France (1972-73).

[14] Maslov : Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques.
Dunod, Gauthier-Villars, Paris (1972).

[15] Maslov : Characteristics of Pseudo Differential Operators
Actes, Congrès Intern. Math., (1970), tome 2, p.755-769.