Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

K. Taira

Sur les problèmes aux limites non-coercifs pour le laplacien

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1976-1977), exp. nº 11, p. 1-14

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1976-1977____A10_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (École Polytechnique), 1976-1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (http://sedp.cedram.org) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone 941.82.00 - Poste N°

Télex ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE GOULAOUIC-SCHWARTZ 1976-1977

SUR LES PROBLEMES AUX LIMITES NON-COERCIFS POUR LE LAPLACIEN

par K. TAIRA

Exposé n° XI

11 Janvier 1977

Dans cet exposé nous étudierons les résolvantes et les spectres de problèmes aux limites non-coercifs pour le laplacien et donnerons un exemple de semi-groupes analytiques et un de semi-groupes de distributions. Nous pouvons aussi donner un exemple de semi-groupes de classe (C_0) (voir (13), Corollary 1). Grâce à la théorie des semi-groupes, on peut donc appliquer ces résultats aux problèmes mixtes pour l'équation de la chaleur ou bien aux problèmes mixtes auto-adjoints pour l'équation des ondes (voir par exemple (11)).

En utilisant le noyau de Poisson et le noyau de Green du problème de Dirichlet, on ramène l'étude de ces problèmes aux limites à celle d'opérateurs pseudo-différentiels à paramètre complexe, sur le bord. Pour étudier ces opérateurs pseudo-différentiels, nous introduisons une variante d'une méthode de Agmon et Nirenberg (voir (6)) qui nous permet d'utiliser un résultat de Melin (10) ou un résultat de Trèves (16). Utilisant aussi une forme originale d'une méthode de Agmon et Nirenberg (voir (1), (2), (9)), on peut obtenir des théorèmes de régularité, d'existence et d'unicité des solutions des problèmes aux limites non-homogènes et puis quelques résultats sur la distribution angulaire et asymptotique des valeurs propres, sur les estimations des résolvantes et sur le développement en fonctions propres.

Cet exposé est un résumé de (12), (13) et (14).

§ 1. INTRODUCTION.

Soit Ω un domaine borné d'un espace euclidien R^n, $\overline{\Omega}$ étant une variété compacte à bord Γ de classe C^∞, de dimension n.

Le problème aux limites que l'on considère ici est de la forme suivante:

$$(*)\qquad \begin{cases} (\lambda + \Delta)u = f & \text{dans } \Omega, \\ \mathcal{B}u \equiv a\dfrac{\partial u}{\partial n} + \alpha u + bu\Big|_\Gamma = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

où λ est un nomble complexe, $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2 + \dots + \partial^2/\partial x_n^2$, a et b sont des fonctions à valeurs réelles et C^∞ sur Γ, $\mathbf{n}$ est une normale unitaire extérieure à Γ et α est un champ de vecteurs sur Γ.

On introduit un opérateur linéaire non-borné $\mathfrak{A}$ de $L^2(\Omega)$ dans lui-même de la manière suivante

a) Le domaine de définition de $\mathfrak{A}$ est $\mathcal{D}(\mathfrak{A}) = \{u \in L^2(\Omega) : \Delta u \in L^2(\Omega)$ et $\mathcal{B}u$+) $= 0\}$.

b) $\mathfrak{A}u = -\Delta u$ pour tout $u \in \mathcal{D}(\mathfrak{A})$.

Dans le **cas <u>coercif</u>**, c'est-à-dire, dans le cas où la fonction a ne s'annule pas sur Γ, les résultats suivants sont connus (voir (1), (2)):

0) L'opérateur $\mathfrak{A} : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ est fermé et $\mathcal{D}(\mathfrak{A}) \subset H^2(\Omega)$.

1) Le spectre de $\mathfrak{A}$ est discret et les valeurs propres sont de multiplicité finie.

2) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $r_0(\varepsilon) > 0$ dépendant de ε telle que l'ensemble résolvant contienne

---

+) Remarquons que, pour tout $u \in L^2(\Omega)$ vérifiant $\Delta u \in L^2(\Omega)$, on peut définir $\mathcal{B}u$ dans $H^{-3/2}(\Gamma)$ (voir par exemple (7), Chap. I, théorème 3.2).

l'ensemble $\{ \lambda = re^{i\theta} \ : \ r \geqq r_o(\varepsilon)$ et $\varepsilon \leqq \theta \leqq 2\pi - \varepsilon \}$ et que la résolvante $(\lambda I - \mathcal{O}\!\mathcal{L})^{-1}$ satisfasse à l'estimation:

$$\| (\lambda I - \mathcal{O}\!\mathcal{L})^{-1} \| \leqq \frac{C_o(\varepsilon)}{|\lambda|} ,$$

où $C_o(\varepsilon)$ est une constante positive dépendant de ε. En particulier, il y a seulement un nombre fini des valeurs propres en dehors du secteur $\{ \lambda : \ |\arg \lambda| < \varepsilon \}$.

3) L'axe positif est une direction de condensation des valeurs propres, c'est-à-dire, il y a un nombre infini des valeurs propres près de l'axe positif.

4) Les fonctions propres généralisées engendrent l'espace $L^2(\Omega)$.

5) On a la formule suivante pour le comportement asymptotique des valeurs propres :

$$N(t) \equiv \sum_{\mathrm{Re}\,\lambda_j \leqq t} 1 = \frac{|\Omega|}{2^n \ \pi^{n/2} \ \Gamma(n/2 + 1)} \ t^{n/2} + o(t^{n/2})$$

lorsque t tend vers $+\infty$, où on répète chaque valeur propre λ_j de $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$ conformément à sa multiplicité et $|\Omega|$ est le volume de Ω.

Remarque 0 : L'opérateur $-\mathcal{O}\!\mathcal{L}$ engendre un semi-groupe analytique $U(z)$ dans le secteur $\{ z = t + is : z \neq 0, \ |\arg z| < \zeta \}$ pour tout $0 < \zeta < \pi/2$ tel que $\| U(z) \| \leqq M_o \, e^{\omega_o t}$, où M_o et ω_o sont des constantes positives dépendant de ζ (voir par exemple (8)).

§ 2. ÉNONCÉ DES RÉSULTATS.

On étudie le cas non-coercif, c'est-à-dire, le cas où la fonction a s'annule aux points de Γ . Rappelons que si a change de signe sur Γ , le problème $(*)$ n'est pas uniquement résolu en général (voir par exemple (5), (15)). On suppose alors que la fonction a ne change pas de signe sur Γ.

Nous avons les théorèmes suivants.

Théorème 1 : On suppose que

(A) $a(x) \geqq 0$ sur Γ ;

(B) il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\left| \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i(x)\, \xi_i \right| \leqq C\, a(x)\, |\xi| \qquad \text{sur } T^*\Gamma ,$$

où $(x, \xi) = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1})$ sont des coordonnées locales du fibré cotangent $T^*\Gamma$ et α_i $(1 \leqq i \leqq n-1)$ est une composante du champ de vecteurs α sur Γ ;

(C) $b(x) > 0$ sur $\Gamma_o = \{x \in \Gamma : a(x) = 0\}$.

On a alors:

0)' l'opérateur $\mathfrak{A} : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ est fermé et $\mathcal{D}(\mathfrak{A}) \subset H^1(\Omega)$;

1) voir le résultat 1) mentionné ci-dessus.

Remarque 1 : Utilisant le principe du maximum au bord, on peut démontrer que, pour tout $\lambda < 0$, il existe une résolvante $(\lambda I - \mathfrak{A})^{-1}$ de $\mathfrak{A}$.

Théorème 2 : On suppose que

(A) $a(x) \geqq 0$ sur Γ ;

(B)' il existe un champ de vecteurs γ sur Γ tel que

$$\alpha = a\,\gamma \quad \text{sur } \Gamma \ ;$$

(C) $b(x) > 0$ sur $\Gamma_o = \{x \in \Gamma : a(x) = 0\}$.

On a alors les résultats 0) - 4) mentionnés ci-dessus.

En plus des conditions (A), (B)' et (C), on suppose que

(D) $\quad \operatorname{div} \gamma(x) \equiv 0$ sur Γ,

où $\operatorname{div} \gamma$ est la divergence du champ de vecteurs γ sur Γ par rapport à la métrique riemannienne de Γ induite par la métrique naturelle de R^n.

On a alors le résultat 5) mentionné ci-dessus.

<u>Remarque 2</u> : Sous les conditions (A), (B)' et (C), l'opérateur $-\mathfrak{A}$ engendre le même semi-groupe analytique que celui mentionné dans la Remarque 0.

<u>Théorème 3</u> : On suppose que

(A)' $\quad a(x) \geqq 0$ sur Γ et l'ensemble $\Gamma_0 = \{x \in \Gamma : a(x) = 0\}$ est une sous-variété non-singulière de Γ de dimension $(n - 2)$;

(B)" $\quad$ le champ de vecteurs α est transversal à Γ_0, et, le long de la courbe intégrale $x(t,x_0)$ de α passant par $x_0 \in \Gamma_0$ quand $t = 0$, la fonction $t \longrightarrow a(x(t,x_0))$ a un zéro d'ordre $\leqq 2k$ à $t = 0$.

On a alors:

0)" l'opérateur $\mathfrak{A} : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ est fermé et $\mathcal{D}(\mathfrak{A}) \subset H^{1+\delta}(\Omega)$, où $\delta = 1/(1 + 2k)$;

1) $\quad$ voir le résultat 1) mentionné ci-dessus ;

2)' pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $r_1(\varepsilon) > 0$ dépendant de ε telle que l'ensemble résolvant contienne l'ensemble $\{\lambda = re^{i\theta} : r \geqq r_1(\varepsilon)$ et $\varepsilon \leqq \theta \leqq 2\pi - \varepsilon\}$ et que la résolvante $(\lambda I - \mathfrak{A})^{-1}$ satisfasse à l'estimation:

$$\left\| (\lambda I - \mathfrak{A})^{-1} \right\| \leqq \frac{C_1(\varepsilon)}{|\lambda|^{\frac{1+\delta}{2}}} ,$$

où $C_1(\varepsilon)$ est une constante positive dépendant de ε ; en particulier, il y a seulement un nombre fini des valeurs propres en dehors du secteur $\{\lambda : |\arg \lambda| < \varepsilon\}$;

3) voir le résultat 3) mentionné ci-dessus ;

4) voir le résultat 4) mentionné ci-dessus.

Remarque 3 : L'opérateur $-\mathfrak{A}$ engendre un semi-groupe de distributions exponentiel analytique $U(z)$ dans le secteur $\{z = t + is : z \neq 0, |\arg z| < \zeta\}$ pour tout $0 < \zeta < \pi/2$ tel que $\|U(z)\| \leq M_1 e^{\omega_1 t} t^{(\delta-1)/2}$, où M_1 et ω_1 sont des constantes positives dépendant de ζ (voir (4)). Remarquons que, comme $0 < \delta < 1$, le semi-groupe $U(z)$ est non-borné en $t = 0$.

§ 3. IDÉE DES DÉMONSTRATIONS.

Soit $\lambda = re^{i\theta}$ avec $r \geqq 0$ et $0 < \theta < 2\pi$. Pour tout $f \in H^{s-2}(\Omega)$, on a alors une seule solution v dans $H^s(\Omega)$ du problème:

$$\begin{cases} (\lambda + \Delta)v = f & \text{dans } \Omega, \\ v|_{\Gamma} = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

On définit l'opérateur de Green $\mathcal{G}(\lambda) : H^{s-2}(\Omega) \longrightarrow H^s(\Omega)$ par $v = \mathcal{G}(\lambda)f$.

De même, pour tout $\varphi \in H^{s-1/2}(\Gamma)$, on a une seule solution w dans $H^s(\Omega)$ du problème:

$$\begin{cases} (\lambda + \Delta)w = 0 & \text{dans } \Omega, \\ w|_{\Gamma} = \varphi & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

On définit l'opérateur de Poisson $\mathcal{P}(\lambda) : H^{s-1/2}(\Gamma) \longrightarrow H^s(\Omega)$ par $w = \mathcal{P}(\lambda)\varphi$.

On en déduit alors que $u \in H^t(\Omega)$ avec $t \leqq s$ est une solution du problème $(*)$:

$$(*) \qquad \begin{cases} (\lambda + \Delta)u = f & \text{dans } \Omega, \\ \mathcal{B}u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

si et seulement si $w = u - v \in H^t(\Omega)$ est une solution du problème:

$$\begin{cases} (\lambda + \Delta)w = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathcal{B}w = -\mathcal{B}v & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

et donc que $u \in H^t(\Omega)$ est une solution du problème $(*)$ si et seulement si $\varphi \in H^{t-1/2}(\Gamma)$ est une solution de l'équation :

$$(**) \qquad \mathcal{B}\mathcal{P}(\lambda)\varphi = -\mathcal{B}v \qquad \text{sur } \Gamma.$$

On se ramène alors à l'étude de l'opérateur $\mathcal{B}\mathcal{P}(\lambda)$ sur le bord Γ. Il est connu que $T(\lambda) \equiv \mathcal{B}\mathcal{P}(\lambda)$ est un opérateur pseudo-différentiel du premier ordre sur Γ. Remarquons que si u est l'unique solution du problème ($\ast$), u peut s'écrire de la manière suivante :

$$u = \mathcal{G}(\lambda)f - \mathcal{P}(\lambda)\left(T(\lambda)^{-1}\mathcal{B}\mathcal{G}(\lambda)f\right).$$

Les comportements des opérateurs $\mathcal{G}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\lambda)$ lorsque $|\lambda| = r$ tend vers $+\infty$ sont connus (voir (3)). Nous allons alors étudier le comportement de l'opérateur $T(\lambda)$ lorsque $|\lambda| = r$ tend vers $+\infty$. Pour cela, nous utilisons une variante d'une méthode de Agmon et Nirenberg introduite par Fujiwara (6), puis développée par l'auteur dans (12), (13) et (14).

Soit S le cercle unité, $y \in S$. **Remarquons d'abord que,** pour $0 < \theta < 2\pi$, l'opérateur $(\Delta - e^{i\theta}\,\partial^2/\partial y^2)$ est elliptique sur $\Omega \times S$. Pour tout $\tilde{\varphi} \in H^{s-1/2}(\Gamma \times S)$, on a alors une seule solution $\tilde{w}$ dans $H^s(\Omega \times S)$ du problème :

$$\begin{cases} (\Delta - e^{i\theta}\,\partial^2/\partial y^2)\tilde{w} = 0 & \text{dans } \Omega \times S, \\ \tilde{w}\big|_{\Gamma \times S} = \tilde{\varphi} & \text{sur } \Gamma \times S. \end{cases}$$

On définit l'opérateur de Poisson $\tilde{\mathcal{P}}(\theta) : H^{s-1/2}(\Gamma \times S) \longrightarrow H^s(\Omega \times S)$ par $\tilde{w} = \tilde{\mathcal{P}}(\theta)\tilde{\varphi}$. Rappelons que $\tilde{T}(\theta) \equiv \mathcal{B}\tilde{\mathcal{P}}(\theta)$ est un opérateur pseudo-différentiel du premier ordre sur $\Gamma \times S$.

La relation entre les opérateurs $T(\lambda)$ et $\tilde{T}(\theta)$ est donnée par le

<u>Lemme 1</u> : Soit $\lambda' = \ell^2 e^{i\theta}$ avec $\ell \in Z$ et $0 < \theta < 2\pi$. Alors:

$$\tilde{T}(\theta)(\varphi \otimes e^{i\ell y}) = T(\lambda')\varphi \otimes e^{i\ell y}, \quad \varphi \in C^\infty(\Gamma),$$

$$\tilde{T}(\theta)^*(\psi \otimes e^{i\ell y}) = T(\lambda')^*\psi \otimes e^{i\ell y}, \quad \psi \in C^\infty(\Gamma),$$

où $\tilde{T}(\theta)^*$ et $T(\lambda')^*$ sont les adjoints formels de $\tilde{T}(\theta)$ et $T(\lambda')$ respectivement.

La démonstration du lemme est évidente, compte tenu de la formule suivante:

$$\tilde{\mathcal{P}}(\theta)(\varphi \otimes e^{i\ell y}) = \mathcal{P}(\lambda')\varphi \otimes e^{i\ell y} .$$

La relation entre les normes $|\ |_{H^t(M)}$ et $|\ |_{H^t(M \times S)}$ pour $t \geqq 0$ (quand $M = \Gamma$ ou bien $M = \Omega$) est donnée par

<u>Lemme 2</u> : Soit $\ell \in Z$ et $t \geqq 0$. Il existe une constante $C_2 > 0$ dépendant de t telle que

$$C_2^{-1} |\varphi \otimes e^{i\ell y}|^2_{H^t(M \times S)} \leqq |\varphi|^2_{H^t(M)} + \ell^{2t} |\varphi|^2_{L^2(M)}$$

$$\leqq C_2 |\varphi \otimes e^{i\ell y}|^2_{H^t(M \times S)}, \quad \varphi \in C^\infty(M),$$

où $M = \Gamma$ ou bien $M = \Omega$.

Pour simplifier, nous esquissons la démonstration du point 2)' du théorème 3. Pour plus amples détails, voir (12), (13) et (14).

<u>Esquisse de la démonstration du théorème 3, 2)'</u> : i) D'après les conditions (A)' et (B)" , on voit d'abord que les opérateurs $\tilde{T}(\theta)$ et $T(\theta)^*$ sont sous-elliptiques sur $\Gamma \times S$ (voir (16)). On a alors la

<u>Proposition 1</u> : Soit $0 < \theta < 2\pi$ et $s \geqq 3/2$. Alors:

$$(\tilde{I})\quad |\tilde{\varphi}|^2_{H^{s-3/2+\delta}(\Gamma\times S)} \leq C_3(\theta)\left(|\tilde{T}(\theta)\tilde{\varphi}|^2_{H^{s-3/2}(\Gamma\times S)} + |\tilde{\varphi}|^2_{L^2(\Gamma\times S)}\right),\quad \tilde{\varphi}\in C^\infty(\Gamma\times S)\ ;$$

$$(\tilde{I})^*\quad |\tilde{\psi}|^2_{H^{s-3/2+\delta}(\Gamma\times S)} \leq C_3(\theta)^*\left(|\tilde{T}(\theta)^*\tilde{\psi}|^2_{H^{s-3/2}(\Gamma\times S)} + |\tilde{\psi}|^2_{L^2(\Gamma\times S)}\right),\quad \tilde{\psi}\in C^\infty(\Gamma\times S),$$

où $C_3(\theta)$ et $C_3(\theta)^*$ sont des constantes positives dépendant de θ et s.

Appliquant l'estimation $(\tilde{I})$ (respectivement $(\tilde{I})^*$) à $\tilde{\varphi} = \varphi\otimes e^{i\ell y}$ avec $\ell\in Z$ et $\varphi\in C^\infty(\Gamma)$ (respectivement $\tilde{\psi} = \psi\otimes e^{i\ell y}$ avec $\psi\in C^\infty(\Gamma)$) et utilisant le lemme 1 et le lemme 2 avec $M = \Gamma$, on obtient la

<u>Proposition 2</u> : Soit $\lambda' = \ell^2 e^{i\theta}$ avec $\ell\in Z$ et $0<\theta<2\pi$ et $s\geqq 3/2$. Il existe une constante $r_2(\theta)>0$ dépendant de θ et s telle que si $|\lambda'| = \ell^2 \geqq r_2(\theta)$, on ait :

$$(I)\quad |\varphi|^2_{H^{s-3/2+\delta}(\Gamma)} + |\lambda'|^{s-3/2+\delta}|\varphi|^2_{L^2(\Gamma)} \leqq C_4(\theta)\left(|T(\lambda')\varphi|^2_{H^{s-3/2}(\Gamma)} + |\lambda'|^{s-3/2}|T(\lambda')\varphi|^2_{L^2(\Gamma)}\right),\quad \varphi\in C^\infty(\Gamma)\ ;$$

$$(I)^*\quad |\psi|^2_{H^{s-3/2+\delta}(\Gamma)} + |\lambda'|^{s-3/2+\delta}|\psi|^2_{L^2(\Gamma)} \leqq C_4(\theta)^*\left(|T(\lambda')^*\psi|^2_{H^{s-3/2}(\Gamma)}\right.$$

$$+ |\lambda'|^{s-3/2} \, |T(\lambda')^{*}\psi|^{2}_{L^2(\Gamma)} \Big), \quad \psi \in C^{\infty}(\Gamma),$$

où $C_4(\theta)$ et $C_4(\theta)^{*}$ sont des constantes positives dépendant de θ et s.

Il résulte de (I) et $(I)^{*}$ que si $\lambda' = \ell^2 e^{i\theta}$ avec $\ell \in Z$ et $0 < \theta < 2\pi$ et si $|\lambda'| = \ell^2 \geqq r_2(\theta)$, pour tout $f \in H^{s-2}(\Omega)$, il existe une seule solution u dans $H^{s-1+\delta}(\Omega)$ du problème $(*)$, d'où l'opérateur $(\lambda' - \mathfrak{A}) : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ est à indice de 0. D'après la perturbation compacte, on en déduit alors que, pour tout $\lambda = re^{i\theta}$ avec $r \geqq 0$ et $0 < \theta < 2\pi$, l'opérateur $(\lambda - \mathfrak{A}) : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ est à indice de 0.

ii) De l'estimation $(\widetilde{I})$, on déduit en outre le

<u>Lemme 3</u> : Soit $0 < \theta < 2\pi$ et $s \geqq 2$. Il existe une constante $C_5(\theta) > 0$ dépendant de θ et s telle que, pour tout $\tilde{u} \in H^{s-1+\delta}(\Omega \times S)$ vérifiant $(\Delta - e^{i\theta}\,\partial^2/\partial y^2)\tilde{u} \in H^{s-2}(\Omega \times S)$ et $\mathcal{B}\tilde{u} = 0$, on ait :

$$\text{(II)} \qquad \|\tilde{u}\|^2_{H^{s-1+\delta}(\Omega \times S)} \leqq C_5(\theta) \Big(\|(\Delta - e^{i\theta}\,\partial^2/\partial y^2)\tilde{u}\|^2_{H^{s-2}(\Omega \times S)} + \|\tilde{u}\|^2_{H^{s-2}(\Omega \times S)} \Big).$$

Nous utilisons une forme originale d'une méthode de Agmon et Nirenberg (voir (1), (2), (9)). Soit $u \in H^{s-1+\delta}(\Omega)$ vérifiant $\Delta u \in H^{s-2}(\Omega)$ et $\mathcal{B} u = 0$. On pose

$$\tilde{u}(x,y) = u(x) \otimes \zeta(y) e^{imy} ,$$

où $m \in R$ et $\zeta(y) \in C^{\infty}(S)$ s'annule identiquement dans un voisinage de $y = 0$ $(0 \leqq y < 2\pi)$.

Appliquant l'estimation (II) à $\tilde{u} = u \otimes \zeta(y)e^{i\eta y}$ et utilisant le lemme 2 avec $M = \Omega$, on obtient la

<u>Proposition 3</u> : Soit $\lambda = re^{i\theta}$ avec $r \geqq 0$ et $0 < \theta < 2\pi$ et $s \geqq 2$. Il existe une constante $r_3(\theta) > 0$ dépendant de θ et s telle que si $|\lambda| = r \geqq r_3(\theta)$, pour tout $u \in H^{s-1+\delta}(\Omega)$ vérifiant $\Delta u \in H^{s-2}(\Omega)$ et $\mathcal{B} u = 0$, on ait:

$$(\text{II}) \quad \|u\|^2_{H^{s-1+\delta}(\Omega)} + |\lambda|^{s-1+\delta}\|u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\leqq C_6(\theta)\left(\|(\lambda + \Delta)u\|^2_{H^{s-2}(\Omega)} + |\lambda|^{s-2}\|(\lambda + \Delta)u\|^2_{L^2(\Omega)}\right),$$

où $C_6(\theta)$ est une constante positive dépendant de θ et s.

Dans la lère étape, nous avons démontré que, pour tout $\lambda = re^{i\theta}$ avec $r \geqq 0$ et $0 < \theta < 2\pi$, l'opérateur $(\lambda - \mathcal{O}\!\mathcal{L}) : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ est d'indice 0. On déduit donc de l'estimation (II) avec $s = 2$ que si $|\lambda| = r \geqq r_3(\theta)$, λ appartient à l'ensemble résolvant de $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$ et la résolvante $(\lambda I - \mathcal{O}\!\mathcal{L})^{-1}$ de $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$ satisfait à l'estimation:

$$\|(\lambda I - \mathcal{O}\!\mathcal{L})^{-1}\| \leqq \frac{C_7(\theta)}{|\lambda|^{\frac{1+\delta}{2}}},$$

où $C_7(\theta)$ est une constante positive dépendant de θ et s. Remarquons que, pour chaque $s \geqq 2$, les constantes $r_3(\theta)$ et $C_7(\theta)$ dépendent continuement de θ. Nous pouvons alors en déduire le point 2)' du théorème 3.

BIBLIOGRAPHIE

(1) S. Agmon : On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems. Comm. Pure Appl. Math., 15 (1962), 119-147.

(2) S. Agmon : Lectures on elliptic boundary value problems. Van Nostrand Mathematical Studies, Princeton, 1965.

(3) M.S. Agranovič et M.I. Višik : Elliptic problems with a parameter and parabolic problems of general type. Russian Math. Surveys, 19 (1964), 53-157.

(4) G. Da Prato et U. Mosco : Regolarizzazione dei semigruppi distribuzioni analitici. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 19 (1965), 563-576.

(5) Ju. V. Egorov et V.A. Kondrat'ev : The oblique derivative problem. Math. USSR Sb., 7 (1969), 139-169.

(6) D. Fujiwara : On some homogeneous boundary value problems bounded below. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA 17 (1970), 123-152.

(7) G. Grubb : A characterization of the non-local boundary value problems associated with an elliptic operator. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 22 (1968), 425-513.

(8) S.G. Kreĭn : Équations aux dérivées linéaires dans un espace de Banach. Moscou, 1967 (en russe).

(9) J.L. Lions et E. Magenes : Problèmes aux limites non-homogènes et applications. Vol. 2, Paris, 1968.

(10) A. Melin : Lower bounds for pseudo-differential operators. Ark. för Mat., 9 (1971), 117-140.

(11) S. Mizohata : Théorie des équations aux dérivées partielles. Iwanami, Tokyo, 1965 (en japonais).

(12) K. Taira : On some degenerate oblique derivative problems. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA 23 (1976), 259-287.

(13) K. Taira : On some non-coercive boundary value problems for the Laplacian. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA 23 (1976), 343-367.

(14) K. Taira : On a degenerate oblique derivative problem of Egorov and Kondrat'ev. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA (1976), 383-391.

(15) K. Taira : On a degenerate oblique derivative problem with interior boundary conditions. Proc. Japan Acad., 52 (1976), 484-487.

(16) F. Treves : A new method of proof of the subelliptic estimates. Comm. Pure Appl. Math., 24 (1971), 71-115.