Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

G. Lachaud

Propriétés asymptotiques des solutions d'équations simplement caractéristiques

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1975-1976), exp. n° 7, p. 1-15

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1975-1976____A8_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91120 PALAISEAU

Téléphone : 941.81.60 - Poste N°

Télex : ECOLEX 69 15 96 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 5 - 1 9 7 6

PROPRIETES ASYMPTOTIQUES DES SOLUTIONS D'EQUATIONS SIMPLEMENT CARACTERISTIQUES

par G. LACHAUD

Exposé n° VII

16 Décembre 1975

Cet exposé est un compte rendu du travail d'Agmon et Hörmander [1].

§ 0. INTRODUCTION

Rellich a démontré en 1943 que le problème

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = f \\ u(x) = O(|x|^{-\frac{n-1}{2}}) \end{cases} \qquad (k > 0)$$

a une unique solution a l'extérieur d'un compact donné de R^n. Le résultat de Rellich demeure encore vrai en supposant, au lieu de la condition de croissance précédente, la condition :

$$\lim_{R \to \infty} \tau_R(u) = 0$$

où on a posé

$$\tau_R(u) = \int_{|x| < R} |u(x)|^2 \frac{dx}{R} .$$

Le résultat précédent est une conséquence de celui-ci : les conditions $\Delta u + k^2 u = f \in \mathcal{E}'$ et $\lim_{R \to \infty} \tau_R(u) = 0$ impliquent $u \in \mathcal{E}'$. (En effet, par le principe du prolongement analytique, le support de u est alors inclus dans celui de f). Le travail d'Agmon et Hörmander, après Vainberg [9] et Littman [6] consiste à étendre ce résultat à une vaste classe d'opérateurs différentiels à coefficients constants. Dans cette direction, Trèves a démontré le résultat suivant (cf. [8]):

Appelons fonction à décroissance rapide une fonction localement intégrable u sur R^n telle que $|u(x)| << |x|^{-N}$ à l'infini quel que soit l'entier N. Si P est un polynôme différentiel, avec $D = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x}$, les conditions suivantes sont équivalentes :

a) toute fonction u à décroissance rapide vérifiant $P(D)u \in \mathcal{E}'$ appartient à $\mathcal{E}'$;

b) tout facteur complexe irréductible du polynôme P a un zéro réel.

Il est à remarquer que lorsque la condition a) est satisfaite, les supports de u et de P(D)u ont même enveloppe convexe par le théorème des supports (cf. [ ], lemme 3.4.3). Si de plus P(D) est elliptique, les supports seront identiques.

En renforçant les hypothèses faites sur la variété des zéros du polynôme P, on pourra tolérer une décroissance plus modeste de la fonction u pour démontrer un résultat analogue à celui de Trèves.

§ 1. TRANSFORMEES DE FOURIER DES DISTRIBUTIONS PORTEES PAR DES HYPERSURFACES.

Bien que la plupart des résultats suivants demeurent vrais pour des opérateurs de convolution, nous nous limiterons ici au cas des opérateurs différentiels, renvoyant à l'article original pour des énoncés comprenant des hypothèses minimales.

Soit donc P un polynôme à n variables et à coefficients réels. On suppose que l'hypersurface $V = \{\xi \in R^n \mid P(\xi) = 0\}$ est non vide et sans singularités ; cette dernière propriété se retranscrit par la condition

(S) Si $\xi \in R^n$ et $P(\xi) = 0$, alors $\operatorname{grad} P(\xi) \neq 0$.

En un sens, cette condition est assez mineure, car si on remplace P par $P - \lambda$, où $\lambda \in R$, dire que la condition (S) est en défaut revient à dire que λ est une valeur critique de P ; or l'ensemble des valeurs critiques d'un polynôme est fini. (Démonstration : l'équation $\operatorname{grad} P(\xi) = 0$ définit une variété algébrique réelle W qui n'a qu'un nombre fini de composantes connexes sur lesquelles le polynôme P est constant).

Pour donner des exemples de polynômes qui satisfont à la condition (S), rappelons d'abord qu'un polynôme P est dit de type principal s'il satisfait aux conditions (équivalentes) suivantes (cf. [4], 3.3.7) :

(TP1) Si $\xi \in R^n$ et $\xi \neq 0$, alors $\operatorname{grad} P_m(\xi) \neq 0$.

(TP2) Pour tout polynôme Q de degré $m-1$ au plus, on a

$$Q(\xi) << \tilde{P}_m(\xi) = \sum_\alpha |P_m^{(\alpha)}(\xi)|$$

(TP3) Tout hyperplan réel caractéristique pour P est simplement caractéristique.

Les opérateurs elliptiques sont donc de type principal ; si P est de type principal et de la forme $P_m + \lambda$, où $\lambda \in R$, il satisfait évidemment à la condition (S) ; tel est le cas, par exemple, de l'équation des ondes réduites ou équation de Helmoltz $\Delta + k^2$, et aussi de l'équation de Klein-Gordon $\square + k^2$, qui s'appelle encore, à une variable d'espace et une de temps, l'équation des Télégraphistes.

Par ailleurs, on peut voir que si P est le produit d'un polynôme hypoelliptique (cf.[4], définition 4.1.1) et d'un polynôme de type principal, la condition (S) est satisfaite hors d'un compact.

On dispose, sur l'hypersurface V, de l'élément de surface dS, qui est la mesure sur V attachée à la forme différentielle $dS = \mathrm{int}(N)\Omega$, en notant $N(\xi) = \mathrm{grad}\, P(\xi)/|\mathrm{grad}\, P(\xi)|$ la normale extérieure en ξ à V, Ω la forme-volume de R^u, et "int" le produit intérieur ; on a $N \wedge dS = \Omega$. On va chercher à estimer la transformée de Fourier inverse d'une distribution portée par V qui est de la forme $\hat{u}_o dS$, avec $u_o \in L^2(V, dS)$. A cette fin, si $u \in L^2_{loc}(R^n)$ et si $\varphi \in L^1(R^n) \cap L^\infty(R^n)$ on pose

$$\tau_R^\varphi(u) = \int |u(x)|^2 \varphi(\tfrac{x}{R}) \frac{dx}{R} \quad .$$

(Lorsque φ est la fonction caractéristique de la boule unité on a $\tau_R^\varphi(u) = \tau_R(u)$). On voit facilement que si $u(x) = O(|x|^{-\frac{n-1}{2}})$, alors $\tau_R^\varphi(u) \to 0$ lorsque R tend vers l'infini.

Proposition 1 : Soit $u \in \mathcal{S}'$. Si $\hat{u} = \hat{u}_o dS$, avec $u_o \in L^2_{comp}(V)$, alors il existe C, ne dépendant que de supp u et non de u ou de R, tel que

$$\tau_R(u) < C \|u_o\|^2_{L^2(V)} \quad .$$

La démonstration de cette proposition, quoique fort simple, est typique du genre de raisonnements employés dans ces questions : on peut supposer que dans un voisinage du support de u l'équation $P(\xi) = 0$ est équivalente à l'équation $\xi'' = h(\xi')$ avec $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ et $\xi'' = \xi_n$;

on a alors

$$dS = a(\xi')d\xi' \quad \text{avec} \quad a(\xi') = (1+|\operatorname{grad} h(\xi')|^2)^{1/2} \quad , \text{ et}$$

$$u(x) = (2\pi)^{-n}\int_{R^{n-1}} e^{i(x'\xi'+x''h(\xi'))}\hat{u}_o(\xi',h(\xi'))a(\xi')d\xi',$$

donc la transformée de Fourier de la fonction $x' \mapsto u(x',x'')$ est égale à

$$(2\pi)^{-1}\, e^{ixh(\xi')}u_o(\xi',h(\xi'))a(\xi') \ ;$$

appliquant la formule de Parseval en laissant x'' fixe il vient

$$\int |u(x',x'')|^2 dx' = (2\pi)^{-n-1}\int |\hat{u}_o|^2 a dS \ ;$$

et la relation cherchée s'ensuit en intégrant sur l'intervalle $|x''| < R$.

On voit donc que la constante C de l'énoncé dépend moins du support de u que de la croissance de la fonction a, i.e. de grad P ; pour obtenir un résultat global, on introduit alors la classe suivante d'opérateurs : on dira que P est à <u>zéros uniformément simples</u> si la condition

$$\text{(SU)} \qquad \widetilde{P}(\xi) \ll |\operatorname{grad} P(\xi)| \quad \text{sur } P(\xi) = 0$$

est satisfaite. Si on pose

$$P_\xi(\eta) = |\widehat{P}(\xi)|^{-1}P(\xi+\eta),$$

la condition (SU) se retraduit en

$$\text{(SU)'} \qquad |\operatorname{grad} P_\xi(0)| \gg 1 \qquad \text{sur } P(\xi) = 0 \quad ;$$

La variété V est encore l'ensemble des ξ vérifiants $P_\xi(0) = 0$; la condition (SU)' assure donc, via le théorème des fonctions implicites, qu'au voisinage de tout $\xi_o \in V$, la condition $P(\xi) = 0$ est équivalente à la condition $\xi'' = h(\xi')$ avec $|h'(\xi')|$ borné.

On peut voir sans peine que les opérateurs précédemment cités pour vérifier la condition (S) satisfont encore à la condition (SU).

On va maintenant introduire un espace de Banach B de telle sorte que la norme du dual B^x de l'espace B soit équivalente à la moyenne τ. On considère les nombres $R_o = 0$, $R_j = 2^{j-1}$ pour $j \geq 1$, les couronnes $\Omega_j = \{x \in R^n | R_{j-1} < |x| < R_j\}$, et on note B l'espace des fonctions $v \in L^2(R^n)$ telles que

$$\|v\|_B = \sum_1^{\infty} (R_j \int_{\Omega_j} |v|^2 dx)^{1/2} < +\infty .$$

Il est clair que $C_o^{\infty}(R^n)$ est dense dans B ; en prenant pour produit scalaire celui de $L^2(R^n)$, on peut tout de suite identifier le dual B^x de B avec les $v \in L^2_{loc}(R^n)$ telles que

$$\|v\|_{B^x} = \sup_{j\geq 1} (R_j^{-1} \int_{\Omega_j} |v|^2 dx)^{1/2} < +\infty .$$

avec ces notations, on a alors la propriété suivante : pour $u \in B^x$, on a

$$\|u\|^2_{B^x} \leq \sup_R \tau^R(u) \leq 4 \|u\|^2_{B^x} .$$

(Cette propriété est due au fait que les R_j sont en progression géométrique). Ce qui précède permet d'énoncer et de démontrer le

<u>Théorème 1</u> : <u>Soit</u> P <u>un opérateur satisfaisant à la condition</u> (SU), <u>et soit</u> $u \in \mathcal{S}'$. <u>On suppose, avec les notations précédentes, que</u> $\hat{u} = \hat{u}_o dS$ (<u>où</u> $\hat{u}_o \in L^2(V)$). <u>Alors</u> $u \in L^2_{loc}$ <u>et si</u> $R > 1$ <u>on a</u>

$$\tau_R(u) \leq C \|u_o\|^2_{L^2(V)}$$

<u>avec</u> C <u>indépendant de</u> u <u>et</u> R.
(En d'autres termes, la transformation de Fourier inverse est continue de $L^2(V)$ dans B^x).

§ 2. L'EQUATION HOMOGENE

Le résultat suivant est une réciproque partielle (élémentaire mais utile) du théorème précédent :

Proposition 2 : On suppose que P satisfait à la condition (S). Soit $u \in \mathcal{S}' \cap L^2_{loc}$ et supposons $P(D)u = 0$. Si $\tau_R(u)$ est borné, alors $\hat{u} = \hat{u}_o dS$ avec $u_o \in L^2(V)$.

Pour démontrer cette proposition, l'idée est la suivante : il est évident que le support de u est inclus dans V ; si (χ_ε) est une suite régularisante, il s'ensuit que supp $\chi_\varepsilon * \hat{u}$ est inclus dans l'ensemble $V(\varepsilon)$ des points à distance $\leq \varepsilon$ de V ; on voit par ailleurs que

$$\|\chi_\varepsilon * \hat{u}\|^2 << \varepsilon^{-1}\|u\|_{B^x} \quad ;$$

il s'ensuit que si $\psi \in \mathcal{C}_o^\infty$ on a

$$|<\chi_\varepsilon * \hat{u},\psi>|^2 << \varepsilon^{-1}\int_{V(\varepsilon)} |\psi|^2 dx \quad ;$$

en passant à la limite et en utilisant le théorème de Gauss, il vient donc

$$|<\hat{u},\psi>|^2 << \int_V |\psi|^2 dS,$$

ce qui prouve le résultat cherché.

On peut préciser la corrélation existant entre $\|\hat{u}_o\|_{L^2(V)}$ et $\tau_R(u)$, dont les résultats précédents témoignent, par une formule comparable à la formule de Plancherel.

Théorème 2 (première formule-limite) : Soit φ une fonction positive, continue à support compact sur $\mathbb{R}^n$. Soit $u \in \mathcal{S}'$ telle que $\hat{u} = \hat{u}_o dS$ avec $\hat{u}_o \in L^2(V)$; on a alors

$$\lim_{R\, \infty} \tau_R^\varphi(u) = (2\pi)^{-n-1}\int_V |\hat{u}_o(\xi)|^2 \tilde{\varphi}(\xi)\, dS(\xi)$$

où on a posé

$$\tilde{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t\, N(\xi))dt \; .$$

($N(\xi)$ est la normale unitaire sortante en $\xi \in V$; on peut remarquer que si φ est invariante par rotation, $\tilde{\varphi}$ est constante). Par ailleurs la formule s'étend au cas où φ est seulement positive, bornée et à support compact).

Voici les grandes lignes de la démonstration. On remarque tout d'abord que l'on peut supposer u_o continue et à support compact ; on passe de là au cas où u_o est seulement L^2 par le théorème 1. On peut aussi supposer que $\varphi \in C_o^\infty$, quitte à effectuer un passage à la limite. Avec ces hypothèses, on pose $\varphi(x) = \psi(-x)$ (de telle sorte que $\psi \in \mathcal{S}$) et $\psi_R(\xi) = R^{n-1}\psi(R\xi)$. Il s'ensuit que l'on a

(1) $$\int |u(x)|^2 \varphi(\frac{x}{R})\frac{dx}{R} = (2\pi)^{-u}(\hat{u} * \psi_R, \hat{u}) \quad .$$

En écrivant la variété V comme un graphe, on voit alors que si $\xi \in V$, on a

(2) $$\lim_{R\ \infty} u * \psi_R(\xi) = u_o(\xi)\int_{T_\xi(V)} \psi(\eta)\,d\eta \quad ;$$

Mais la formule d'inversion de Fourier implique trivialement le résultat suivant : si on écrit $\mathbb{R}^n$ comme somme directe de deux sous espaces supplémentaires E et F, on a, pour $\psi \in \ (\mathbb{R}^n)$, et en posant $\dim F = d$

$$\int_E \psi(x,0)\,dx = (2\pi)^{-d}\int_F \psi(0,\eta)\,d\eta \quad ;$$

en particulier

(3) $$\int_{T_\xi(V)} \psi(\eta)\,d\eta = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t\,N(\xi))\,dt \quad ;$$

Les formules (1), (2), (3) combinés donnent celle du théorème 2.
Le théorème 2 et la proposition 2 impliquent immédiatement le

<u>Théorème 3</u> : <u>Soit</u> $u \in \mathcal{S}' \cap L^2_{loc}$ <u>vérifiant l'équation</u> $P(D)u = 0$, <u>où</u> P <u>satisfait à la condition</u> (SU). <u>Si</u> $\lim_{R\ \infty} \tau_R(u) = 0$, <u>alors</u> $u = 0$.

§ 3. L'EQUATION AVEC SECOND MEMBRE

La situation est la suivante : on se propose, par exemple, de déterminer une solution de l'équation

$$(*) \qquad \Delta u + k^2 u = f \qquad (k > 0)$$

Il existe de nombreuses solutions de cette équation telles que $\tau_R(u)$ soit borné, mais $\tau_R(u)$ ne tend vers 0 pour aucune d'entre elles (en général). Le comportement asymptotique de τ_R ne permet donc pas de sélectionner une solution particulière. C'est pour cette raison que Helmholtz a établi le principe d'absorption limitée : l'équation

$$\Delta u_\varepsilon + (k^2 + i\varepsilon)u_\varepsilon = f \qquad (\varepsilon > o,\ f \in L^2(R^n))$$

a une unique solution dans $L^2(R^n)$, et lorsque ε tend vers 0 les u_ε convergent (dans un espace à préciser) vers une solution u de l'équation (*). (Si on avait pris $\varepsilon < 0$, on aurait obtenu à la limite une autre solution, généralement différente, de l'équation (*)). L'équation ci-dessus se réécrit

$$u_\varepsilon = R(-k^2 - i\varepsilon)f$$

en notant $R(z)$ la résolvante au point z de l'opérateur auto-adjoint de $L^2(R^n)$ défini par Δ.

C'est en combinant ce principe avec les méthodes du n° 2 que Agmon et Hörmander étudient l'équation avec second membre. Notons C^+ (resp. C^-) le demi-plan complexe $\mathrm{Re}\, z \geq 0$ (resp. $\mathrm{Re}\, z \leq 0$). Soit $\lambda \in R$, et soit P un polynôme à n variables tel que la variété $V(\lambda) = \{\xi \in R^n | P(\xi) = \lambda\}$ soit non vide et sans singularités. On sait alors que les distributions $(P - z)^{-1}$ convergent dans $\mathcal{S}'$ lorsque $z \in C^{\pm}$ tend vers λ, vers des limites respectives notées $(P - \lambda \pm i0)^{-1}$, et que

$$[(P - \lambda - i0)^{-1} - (P - \lambda + i0)^{-1}] = 2i\pi\,\delta(P - \lambda)$$

avec, pour $\varphi \in \mathcal{S}$

$$<\delta(P-\lambda),\varphi> = \int_{V(\lambda)} \varphi(\xi)\,dS_\lambda(\xi).$$

Si $f \in \mathcal{S}$, $\chi \in C_o^\infty(R^n)$ et $z \in C^\pm$, on pose

$$R_\chi(z)f = \mathcal{F}^{-1}[\chi(P-Z)^{-1}\mathcal{F} f]$$

en notant $\mathcal{F}$ la transformation de Fourier, ce qui définit une application $R_\chi(z)$ de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}'$. Si z n'appartient pas au spectre de l'opérateur auto-adjoint $\tilde{P}$ défini par P dans $L^2(R^n)$, i.e. si $z \notin P(R^n)$, il est clair que $R_\chi(z)f = R(z)(\chi f)$, en notant $R(z) = (\tilde{P}-z)^{-1}$ la résolvante de $\tilde{P}$. Lorsque $\lambda \in R$, on dispose donc de deux applications $R_\chi^\pm(\lambda) = R_\chi(\lambda \pm i0)$ obtenues comme limites faibles dans $\mathcal{L}(\mathcal{S},\mathcal{S}')$ de $R_\chi(z)$ lorsque $z \to \lambda$ en restant dans C^+ ou dans C^- .

Supposons pour simplifier $\lambda = 0$.

<u>Proposition 3</u> : <u>Pour</u> $z \in C^\pm$ <u>et pour</u> $|\mathrm{Re}\, z|$ <u>suffisamment petit</u>, <u>l'application</u> $R_\chi(z)$ <u>de</u> $\mathcal{S}$ <u>dans</u> $\mathcal{S}'$ <u>admet un</u> (<u>unique</u>) <u>prolongement à</u> B <u>et applique</u> B <u>dans</u> B^x .

<u>Proposition 4</u> : <u>Soit</u> $\varphi \in C_o^o(R^n)$ <u>et</u> $f \in B$. <u>Si</u> $z \in C^+$ <u>et en posant</u> $u_z = R_\chi(z)f$, <u>on a la relation</u>

$$\lim_{R\ \infty} \tau_R^\varphi(u_{z/R}) = (2\pi)^{1-n}\int_V |\chi\hat{f}|^2\tilde{\varphi}_z\,dS/|\mathrm{grad}\ P| \qquad \text{avec}$$

$$\tilde{\varphi}_z(\xi) = \int_{\mathbb{R}^\pm} \varphi(tN(\xi))e^{-2t\ \mathrm{Im} z}dt \qquad .$$

Pour nous débarasser de χ, il faut faire une hypothèse de régularité supplémentaire sur P : le polynôme P sera dit <u>simplement caractéristique</u> si la condition suivante est satisfaite :

(SC) <u>Il existe</u> $\lambda \in R$ <u>tel que</u>

$$\tilde{P}(\xi) << |P(\xi)-\lambda| + |\mathrm{grad}\, P(\xi)| \qquad (\xi \in R^n).$$

Cette définition appelle les remarques suivantes. Tout d'abord, l'inégalité ci-dessus est satisfaite sur tout compact de R^n si et seulement si λ n'est pas une valeur critique de P. Ensuite, supposons P <u>complet</u> (ce qui signifie qu'il n'existe pas de vecteur $\eta \in R^n$ tel que l'on ait $P(\xi + t\eta) = P(\xi)$

quel que soit $\xi \in R^n$ et $t \in R$). La condition (SC) implique alors que $\tilde{P}(\xi) \to \infty$ si $\xi \to \infty$. Si on pose, comme dans la section 1

$$P_\xi(\eta) = P(\xi + \eta)/\tilde{P}(\xi)$$

la condition (SC) se retraduit en la suivante : si le polynôme Q est une limite de P_ξ lorsque $\xi \to \infty$, alors

$$1 << |Q(0)| + |\text{grad } Q(0)|.$$

Puisque $Q(\eta + \theta)/\tilde{Q}(\eta)$ est aussi une limite de P_ξ, il s'ensuit que tous les zéros de Q sont simples. La condition (SC) est donc équivalente à la condition :

(SC)' Les zéros de P et des limites de P_ξ (lorsque $\xi \to \infty$) sont simples.

Aussi, si l'inégalité intervenant dans la condition (SC) est vérifiée pour ξ suffisamment grand et pour un certain λ, elle est vraie pour tout λ ; donc si P est simplement caractéristique et si λ n'est pas une valeur critique de P, on voit que $P - \lambda$ est à zéros uniformément simples. Les opérateurs de type principal sont simplement caractéristiques : la condition (TP 1) implique en effet que pour ξ suffisamment grand, on a l'inégalité

$$\sum_{|\alpha| \geq 1} |P^{(\alpha)}(\xi)| << |\text{grad } P(\xi)| \ ;$$

on en déduit que la condition (SC) est satisfaite à l'infini ; elle est donc satisfaite sur R^n tout entier pour toute valeur λ non critique pour P.

Notons $\Lambda(P)$ l'ensemble des valeurs critiques de P. On peut maintenant énoncer le résultat principal de la théorie, qui se déduit des propositions 3 et 4 :

Théorème 3 : Soit P un polynôme simplement caractéristique

a) (Principe d'absorption limitée). Pour $z \in C^{\pm} - \Lambda(P)$, l'application

$$R(z)f = \mathcal{F}^{-1}(P - z)^{-1} f$$

de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}'$ envoie B dans B^x ; et pour $f \in B$, on a

$$(P - z)R(z)f = f$$

b) (deuxième formule-limite). Si $\lambda \in R - \Lambda(P)$ et si $f \in B$, on a la relation suivante :

$$\lim_{R \to \infty} \tau_R^{\varphi}(R^{\pm}(\lambda)f) = (2\pi)^{1-n} \int_{V(\lambda)} |\hat{f}|^2 \, \tilde{\varphi}_{\pm} \, dS_{\lambda}/|\text{grad } P|$$

où $\varphi \in \mathcal{C}_o(R^n)$ et où on a posé

$$\tilde{\varphi}_{\pm}(\xi) = \int_{R^{\pm}} \varphi(t \text{ grad } P(\xi))dt$$

c) (Orthogonalité) Soient $\lambda \in R - \Lambda(P)$, et $f, g \in B$; si on pose $u = R^+(\lambda)f$ et $v = R^-(\lambda)g$, alors

$$\lim_{R \to \infty} \int u(x)\bar{v}(x)\varphi(\frac{x}{R})\frac{dx}{R} = 0$$

A propos du principe d'absorption limitée, remarquons que l'on a la formule de Titchmarsh-Kodaira :

$$R^+(\lambda)f - R^-(\lambda)f = 2i\pi \, \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}/|\text{grad } P| \, . \, \delta(P - \lambda)] \quad ;$$

ainsi, pour que la fonction $z \mapsto R(z)f$ de $C^{\pm}$ dans B^x soit continue en un point $\lambda \in R - \Lambda(P)$, il faut et il suffit que $\hat{f}$ soit nulle sur $V(\lambda)$; on a alors $R^+(\lambda)f = R^-(\lambda)f$. (On utilise la proposition 4 pour montrer que la condition est nécessaire).

Pour $\lambda \in R$, on pose

$$R^o(\lambda) = \frac{1}{2}[R^+(\lambda) + R^-(\lambda)] \quad .$$

Proposition 5 : Soit $u \in B^x$ une solution de l'équation $[P(D) - \lambda]u = f \in B$ avec $\lambda \in R - \Lambda(P)$. On alors la décomposition

$$u = u_o + R^o(\lambda)f$$

où u_o est une solution de l'équation homogène, et

$$\lim_{R \to \infty} \tau_R(u) = (2\pi)^{-n} \int_{V(\lambda)} [\pi^{-1}|\hat{u}_o|^2 + (|\hat{f}| \text{ grad } P|)^2] dS_\lambda .$$

On a évidemment aussi les décompositions analogues

$$u = u_{\pm} + R^{\mp}(\lambda) f .$$

Les fonctions de la forme $R^+(\lambda)f$ (resp. $R^-(\lambda)f$ et $R^o(\lambda)f$) sont dites <u>λ-sortantes</u> (resp. <u>λ-entrantes</u> et <u>λ-principales</u>). On verra pourquoi au numéro suivant .

Si une solution $u \in B^x$ de l'équation $[P(D) - \lambda] u = f \in B$ est simultanément λ-entrante et λ-sortante, le principe d'orthogonalité montre que $\tau_R(u) \to 0$; réciproquement si cette condition est satisfaite, le corollaire 1 montre que $\hat{f} = 0$ sur $V(\lambda)$ et que $u_o = \frac{1}{2}[u_+ + u_-] = 0$; donc que u est λ-sortante et λ-entrante. Cette remarque est décisive dans la démonstration du

<u>Théorème de Rellich</u> : <u>Soit</u> P <u>un opérateur simplement caractéristique et</u> $\lambda \in R - \Lambda(P)$. <u>On suppose en outre que tout facteur complexe irréductible de</u> $P - \lambda$ <u>a des zéros réels. Soit</u> $u \in \mathcal{S}' \cap L^2_{loc}(R^n)$. <u>Les conditions</u>

$$\begin{cases} [P(D) - \lambda] u = f \in \mathcal{E}' \\ \lim_{R \to \infty} \tau_R(u) = 0 \end{cases}$$

<u>impliquent</u> $u \in \mathcal{E}'$.

On vient en effet de voir que sous ces hypothèses, $\hat{f}$ est nulle sur $V(\lambda)$. Par ailleurs $\hat{f}$ est une fonction entière sur C^n, qui s'annule donc sur la variété complexe des zéros de $P - \lambda$, vu l'hypothèse faite sur les facteurs irréductibles de P. Il s'ensuit que $\hat{f}/(P-\lambda)$ est aussi une fonction entière; c'est donc (cf. [4], lemme 3.4.2) la transformée de Fourier d'une fonction de $\mathcal{E}'$; mais la proposition implique que $u = R^o(\lambda) f$ et donc que $\hat{u} = \hat{f}/(P - \lambda)$, ce qui prouve le théorème.

Voici une conséquence du théorème de Rellich. Soit Ω le complémentaire d'un compact convexe de R^n. Le théorème des supports implique que si $u \in \mathcal{E}'$ et si $[P(D) - \lambda] u = 0$ dans Ω, alors $u = 0$ dans Ω. Par ailleurs on voit facilement (cf. [5]) que si $u \in L^p(R^n)$, avec $p \leq 2 + 2/(n+1)$, alors

$\tau_R(u) \to 0$. On déduit donc du théorème de Rellich que si $\tilde{P}$ est une extension auto-adjointe dans $L^2(\Omega)$ de l'opérateur défini par P, alors il n'y a pas de valeurs propres de $\tilde{P}$ dans l'ensemble $P(R^n) - \Lambda(P)$.

Signalons qu'au trouve dans [1] des propriétés sur l'orthogonalité asymptotique entre fonctions entrantes, sortantes et principales ; et notons que dans certains cas (notamment celui de l'équation des ondes) on peut remplacer, dans les hypothèses du théorème de Rellich, les moyennes dans des boules par des moyennes dans des cônes ou des cylindres : cf. [2], [5], [6].

§ 4. LA CONDITION DE SOMMERFELD

Soit K un compact de R^3, et Ω son complémentaire. Sommerfeld a démontré en 1912 (cf. [7]) que le problème

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = f & (k > 0) \\ u|\partial K = \varphi & \\ (*)\ \dfrac{\partial u}{\partial r} - iku = o\left(\dfrac{1}{r}\right) & \end{cases}$$

a une unique solution dans Ω si le bord ∂K de K est assez régulier. La condition (*) porte le nom de condition de radiation de Sommerfeld. Celui-ci a appelé sortantes les fonctions vérifiant (*) pour la raison suivante : si on pose $v(x,t) = e^{ikt}u(x)$, alors l'énergie de v, qui est

$$E(v) = (1/2)\int_\Omega \left|\frac{\partial v}{\partial t}\right|^2 + \operatorname{grad}_x v|^2 dx$$

a un flux négatif en moyenne, i.e.

$$\int \frac{dE}{dt}\, dt \leq 0 \quad ,$$

lorsque l'on intègre sur une période de longueur $2\pi/k$; si on change i en $-i$ dans (*), on obtient les fonctions entrantes qui ont un flux d'énergie positif : cf. [3], 4.5.2 .

Sans sortir du cadre de cet exposé, i.e. sans parler de noyau de Poisson, on peut démontrer (et généraliser) ici, à propos du problème de Sommerfeld, le résultat suivant : toute solution de l'équation

$$(1) \qquad \Delta u + k^2 u = 0$$

dans Ω, s'écrit comme une somme $u = u_1 + u_2$, où u_1 est une solution de (1) dans R^n tout entier, et où u_2 satisfait à la condition de radiation "en moyenne"

$$\lim \tau_R\left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku\right) = 0 \quad .$$

Pour cela, on introduit les noyaux $Q^{\pm}(x,\xi)$, fonctions complexes C^∞ sur $R^n - \{0\} \times R^n$, qui satisfont aux conditions suivantes :

a) $Q^{\pm}$ est homogène de degré 0 en x ;

b) pour $|x| = 1$, on a

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta Q^{\pm}(x,\xi)| \ll \tilde{P}(\xi) \quad \text{si} \quad |\alpha| \leq n \text{ et } |\beta| \leq 1 ;$$

c) Si $P(\xi) = \lambda$, on a

$$Q^{\pm}(\pm \operatorname{grad} P(\xi),\xi) = 0 \text{ et } Q^{\pm}(\mp \operatorname{grad} P(\xi),\xi) \neq 0 .$$

On pose alors, pour $u \in C_c^\infty(R^n)$

$$Q^{\pm}u(x) = (2\pi)^{-n} \int Q^{\pm}(x,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi$$

et on démontre que de tels opérateurs sont des endomorphismes de B^x. Par exemple, lorsque $P - \lambda = -\Delta - k^2$, on prend

$$Q^{\pm}(x,\xi) = \langle x/|x|,\xi\rangle \mp k$$

de telle sorte que

$$Q^{\pm}u = \frac{\partial u}{\partial r} \mp iku$$

<u>Théorème 4</u> : <u>Supposons</u> P <u>simplement caractéristique</u>, $\lambda \notin \Lambda(P)$, <u>et</u> $u \in B^x$. <u>Les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

a) u <u>est λ-sortante</u> (<u>resp. λ-entrante</u>)

b) $\lim \tau_R(Q^+u) = 0$ (resp. $\lim \tau_R(Q^-u) = 0$).

La démonstration de ce théorème utilise des "formules-limites" permettant cette fois-ci de calculer les moyennes $\tau_R(Q^{\pm}u)$.

Le résultat énoncé plus haut est alors une conséquence immédiate de la décomposition $u = u_+ + R^+(\lambda)f$ citée au numéro précédent.

Signalons pour terminer qu'on peut aussi obtenir directement, ce qui est fait dans [1], des développements asymptotiques des solutions de l'équation $[P(D) - \lambda]u = f$ en utilisant la méthode de la phase stationnaire (cf. aussi [2]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Agmon et L. Hörmander : Asymptotic properties of differential equations with simple characteristics, à paraître.

[2] O. Arena et W. Littman : Farfield behaviour of solutions to partial differential equations : asymptotic expansions and maximal rates of decay along a ray. Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa, 26 (1972), 807-827.

[3] R. Courant et D. Hilbert : Methods of mathematical physics volume II : partial differential equations, New York, Interscience, 1962.

[4] L. Hörmander : Linear partial differential operators, Berlin-Heidelberg, Springer, 1963.

[5] L. Hörmander : Lower bounds at infinity for solutions of differential equations with constant coefficients, Isr. J. Math. 16 (1973), 103-116.

[6] W. Littman : Maximal rates of decay of solutions of partial differential equations, Archive Rat. Mech. Anal. 37 (1970) 11-20.

[7] A. Sommerfeld : Partial differential equations in physics, New York, Academic Press, 1949.

[8] F. Treves : Differential polynomials and decay at infinity, Bull. Amer. Math. Soc. 66 (1960), 184-186.

[9] B. R. Vainberg : Principles of radiation, limit absorption and limit amplitude in the general theory of partial differential equations, Russian Math. Surveys 21 (1966), 115-193.
