P. SCHAPIRA

**Propagation au bord et réflexion des singularités analytiques des solutions des équations aux dérivées partielles**

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)* (1975-1976), exp. n° 6, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1975-1976____A7_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91120 PALAISEAU

Téléphone : 941.81.60 - Poste N°

Télex : ECOLEX 69 15 96 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 5 - 1 9 7 6

# PROPAGATION AU BORD ET REFLEXION DES SINGULARITES ANALYTIQUES DES SOLUTIONS DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

P. SCHAPIRA

Exposé n° VI

9 Décembre 1975

## § 0. INTRODUCTION

La réflexion des singularités différentiables des solutions des équations aux dérivées partielles à caractéristiques simples a été largement étudiée récemment. Citons en particulier le théorème de Lax et Nirenberg exposé dans [6] et renvoyons à l'exposé de Nirenberg à ce séminaire (1975-76) pour plus de détails bibliographiques. Nous nous proposons d'étudier ici la propagation au bord et la réflexion du support essentiel analytique des hyperfonctions solutions d'une équation $Pf = 0$. Nous démontrerons alors le théorème principal sous une hypothèse de "micro-hyperbolicité" nettement plus faible que celle utilisée dans le cas $C^{\infty}$.

Nous ne traitons ici que l'analogue du problème de Dirichlet (les données portent sur les premières traces) pour une seule équation et n'abordons pas le problème de la diffraction. Signalons cependant que l'hypothèse de micro-hyperbolicité permet d'étudier certains cas de bicaractéristiques qui deviennent tangentes sur le bord.

La démonstration du théorème principal consistera pour une bonne part à interpréter et à réécrire celle du théorème très général de Kashiwara et Kawai [2] sur les problèmes elliptiques et à faire le lien avec la construction classique de la trace des solutions d'une équation non caractéristique : c'est l'objet des paragraphes 1, 2, 3 dans lesquels nous remarquons aussi qu'un théorème de Kashiwara (décrivant le support essentiel d'une hyperfonction à support dans un demi-espace) permet de passer de la propagation au bord à la réflexion. Nous étudions ensuite une propriété microlocale de "N-régularité", satisfaite en particulier par les opérateurs micro-hyperboliques de Kashiwara et Kawai [3], et démontrons enfin le théorème de propagation au bord sous l'hypothèse de N-régularité.

Nous voudrions, pour terminer cette introduction, remercier J. M. Bony pour les nombreuses discussions que nous avons eues avec lui sur ce sujet.

## § 1. DONNEES DU PROBLEME

Notre problème est de nature "locale au bord". Soit donc M un ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$, de coordonnées $(t,x)$, où $x = (x_1,\dots,x_n)$, N l'hyperplan d'équation $t = 0$, X un ouvert de $\mathbb{C}^{n+1}$ coupant $\mathbb{R}^{n+1}$ suivant M, Y le complexifié de N dans X.

Soient $S^*_N X$, $S^*_Y X$, $S^*_M X$ les fibrés en sphères conormaux à N, Y, M dans X et $S^*_N Y$ celui à N dans Y. Rappelons que l'on a des isomorphismes canoniques $S^*_M X \simeq i\,S^* M$, $S^*_N Y \simeq iS^* N$. Nous identifierons, quand cela sera sans danger, un point de $T^*_N X \setminus \{0\}$ et son image dans $S^*_N X$ (et de même pour les autres fibrés) et nous repérerons un point $z^* \in S^*_N X$ par ses coordonnées $(0,x,\tau,i\xi)$ que l'on préfèrera écrire dans l'ordre $(0,x,i\xi,\tau)$

Désignons comme dans [2] par p la projection de $S^*_N X \setminus S^*_Y X$ sur $iS^*N$

$$p : (0,x,i\xi,\tau) \to (x,i\xi)$$

et par $\rho$ la restriction de p à $iS^*M \times_M N$ (rappelons que ce dernier ensemble n'est autre que l'image réciproque de N dans $iS^*M$ par la projection de $iS^*M$ sur M).

Posons $M_+ = M \cap \{t > 0\}$, $Q_+ = S^*_N X \cap \{\operatorname{Re}\tau > 0\}$ et de même pour $M_-$ et $Q_-$. Nous désignerons par $\mathcal{O}$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur X, par B le faisceau des hyperfonctions sur M, par C le faisceau des microfonctions sur $iS^*M$ et par $B_N$ et $C_N$ les faisceaux correspondants sur N et $iS^*N$. Si f est une hyperfonction sur M, nous appelerons support essentiel de f le support de l'image de f dans le faisceau C, et nous dirons que f est nulle en un point $y^*$ de $iS^*M$ si $y^*$ n'appartient pas à ce support esentiel. Nous utiliserons aussi le faisceau $\mathcal{P}$ des opérateurs pseudo-différentiels analytiques (plus exactement sa restriction à $S^*_N X$) et nous renvoyons à [7] pour toutes ces questions.

Le faisceau $C_{N|X}$ sur $S^*_N X$ est défini dans [7] et utilisé de manière essentielle par Kashiwara et Kawai dans [2]. Rappelons sa construction :

$$C_{N|X} = \mathcal{H}^{n+1}_{S^*_N X}(\pi^{-1}_{N|X}\mathcal{O})^a \otimes \omega_N$$

où $\pi_{N|X}$ désigne la projection $X - N \sqcup S^*_N X \to X$, l'espace $X - N \sqcup S^*_N X$ étant muni de la topologie de "co-éclaté" (cf. [7] chapitre 1). On a alors des flèches naturelles :

$$\Gamma_N(M,B) \to \Gamma(S^*_N X, C_{N|X})$$

$$\Gamma_{\overline{M_+}}(M,B) \to \Gamma(Q_- , C_{N|X})$$

$$C_{N|X}|_{iS^*M \underset{M}{\times} N} \to \mathcal{H}^o_{iS^* M \underset{M}{\times} N} \quad (C)$$

et ces flèches sont injectives (Kashiwara non publié).

Si $z^*$ est le point de coordonnées $(0,x,i\xi,\tau)$ de $S^*_N X$, avec $\tau = \theta + i\theta'$, on a

$$(C_{N|X})_{z^*} = \varinjlim_{V,G} H^{n+1}_{(N\times G)\cap V}(V,\mathcal{O})$$

où V parcourt la famille des voisinages de $(0,x)$ dans X, G la famille des cônes convexes fermés saillants de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1}$, avec $G^o$ le polaire de G voisinage de $(-\theta, -\xi, -\theta')$.

Dans le cas particulier où $N = \{0\} \subset M = \mathbb{R} \subset X = \mathbb{C}$, les germes de sections du faisceau C à support dans N au-dessus de $(0,+)$ sont les germes de fonctions holomorphes du demi-plan supérieur qui se prolongent holomorphiquement à travers $\mathbb{R}$ en dehors de $\{0\}$, alors que pour $C_{N|X}$ ce sont les germes de fonctions holomorphes qui traversent "en faisant un angle", c'est à dire qui se prolongent au complémentaire d'un cône convexe saillant fermé du demi-plan inférieur, tout ceci bien sûr modulo les fonctions holomorphes du voisinage de 0.

## § 2. THEOREMES DE DIVISION DANS $C_{N|X}$

Nous dirons qu'un opérateur pseudo-différentiel d'ordre $m$ est de type Weierstrass (en $\frac{\partial}{\partial t}$) s'il s'écrit

$$P = D_t^m + \sum_{j=0}^{m-1} A_j(t,x,D_x)\, D_t^j$$

les $A_j$ étant des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre $\leq m-j$, ne dépendant pas de $D_t$.

Soit $(x,i\xi) = x^* \in iS^*N$, $P$ de type Weierstrass d'ordre $m$ défini au voisinage de $p^{-1}(x^*)$ dans $S_N^*X$. Supposons que l'équation $P_m(0,x,i\xi,\tau) = 0$ ait une racine d'ordre $\mu$ en $\tau = \tau_o$. Il existe alors des opérateurs pseudo-différentiels de type Weierstrass définis au voisinage de $p^{-1}(x^*)$, $E$ et $Q$, d'ordre respectif $m-\mu$ et $\mu$, tels que $P = EQ$, $E$ étant inversible au voisinage de $(0,x,i\xi,\tau_o)$, et $Q_\mu$ ayant un zéro d'ordre $\mu$ en ce point. (cf. [7] chapitre 2). On peut de même trouver une décomposition analogue en $P = Q'E'$. Nous dirons que nous avons des décompositions de Weierstrass de $P$.

Le lemme 1 ci-dessous a été annoncé (sous une forme beaucoup plus générale) par Kashiwara et Kawai [2]). C'est l'analogue dans $C_{N|X}$ du théorème de division de Späth. Nous l'admettrons.

**Lemme 1** : Soit $(x,i\xi) = x^* \in iS^*N$, $\tau_o$ une racine d'ordre $\mu$ de l'équation en $\tau$, $P_m(0,x,i\xi,\tau) = 0$. Soit $z_o^*$ le point $(0,x,i\xi,\tau_o)$ de $S_N^*X$. Alors pour tout germe $u \in (C_{N|X})_{z_o^*}$ il existe de manière unique $v \in (C_{N|X})_{z_o^*}$ et $w_j \in (C_N)_{x^*}$, $j = 0,\dots,\mu-1$, solution de

$$u = Pv + \sum_{j=o}^{\mu-1} w_j \otimes \delta_t^j$$

Le lemme 3.5.2 du chapitre 2 de [7] permet de donner une version plus globale de ce lemme. Pour la facilité du lecteur, nous allons en reprendre la démonstration dans ce cadre.

**Lemme 2** : Soit $(x, i\xi)$ $x^* \in iS^*N$, P un opérateur pseudo-différentiel de type Weierstrass d'ordre m' défini au voisinage de $p^{-1}(x^*)$. Soit U un ouvert de $S^*_N X$ contenant exactement m solutions en $\tau$ (comptées avec leurs multiplicités) de l'équation $P_m(0,x,i\xi,\tau) = 0$. Alors pour tout germe $u \in C_{N|X}(U \cap p^{-1}(x^*))$ il existe de manière unique $v \in C_{N|X}(U \cap p^{-1}(x^*))$, $w_j \in (C_N)_{x^*}$ $j = 0, \ldots, m-1$, solution de

$$u = Pv + \sum_{j=0}^{m-1} w_j \otimes \delta_t^j .$$

**Démonstration** : Soient $\tau_1, \ldots, \tau_r$ les racines de $P_m(0,x,i\xi,\tau) = 0$, avec $(0,x,i\xi,\tau) \in U$ et soient $m_1, \ldots, m_r$ leurs multiplicités.
Soit $z_j^* = (0,x,i\xi,\tau_j)$ et soit pour chaque j, $P = E_j P_j$ une décomposition de Weierstrass de P, l'opérateur $P_j$ étant d'ordre $m_j$, son symbole principal ayant un zéro d'ordre $m_j$ en $\tau_j$.
La section $u \in C_{N|X}(u \cap p^{-1}(x^*))$ étant donnée, il existe d'après le lemme 1, $v_j \in (C_{N|X})_{z_j^*}$, $w_i^j \in (C_N)_{x^*}$ solutions de

$$E_j^{-1} u = P_j v_j + \sum_{i=o}^{m_j-1} w_i^j \otimes \delta_t^i$$

Les opérateurs $E_j$ étant du type Weierstrass en $D_t$ d'ordre $m - m_j$, $E_j(w_i^j \otimes \delta_t^i)$ est de la forme $\sum_{k=0}^{m-1} w_k^j \otimes \delta_t^k$ avec $w_k^j \in (C_N)_{x^*}$. Définissons $w_k \in (C_N)_{x^*}$ par :

$$\sum_{j=1}^{r} \sum_{i=0}^{m_j-1} E_j(w_i^j \otimes \delta_t^i) = \sum_{k=0}^{m-1} w_k \otimes \delta_t^k$$

On a en $z_\ell^*$, pour $\ell \neq j$ :

$$E_j v = E_j P_j P_j^{-1} v = Pv'$$

donc en tous points $z_j^*$ de U, u est de la forme

$$u = Pv'_j + \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=0}^{m_j-1} E_j(w_i^j \otimes \delta_t^i)$$

$$u = Pv'_j + \sum_{k=0}^{m-1} w_k \otimes \delta_t^k$$

Cette équation définit $v'_j$ sur $U \setminus \bigcup_{k \neq j} \{z_k^*\}$ au voisinage de $p^{-1}(x^*)$

Comme P est inversible en dehors des points $z_j^*$ , $v_j' = v_\ell'$ sur $U\setminus\bigcup_k\{z_k^*\}$ $(1\leq j\ , \ell\leq r)$, et par suite il existe $v\in C_{N|X}(U\cap p^{-1}(x^*))$ avec $u = Pv + \sum_{k=0}^{m-1} w_k\otimes\delta_t^k$ .

Démontrons l'unicité d'une telle décomposition et supposons pour cela que $Pv = \sum_{j=o}^{m-1} w_j\otimes\delta_t^j$ . Raisonnons par récurrence sur r et soit $Z_1 = \{z_1^*\}$, $Z_2 = \{z_2^*,\ldots,z_r^*\}$, $P = P_1P_2$ une décomposition de Weierstrass correspondante.

On peut trouver $v_1 = \sum_{j=o}^{m_1-1} w_j^1\otimes\delta_t^j$ et $v_2 = \sum_{j=0}^{m_2-1} w_j^2\otimes\delta_t^j$ tels que

$$\sum_{j=0}^{m-1} w_j\otimes\delta_t^j = P_1v_2 + v_1$$

(pour le voir il suffit d'écrire $w_j\otimes\delta_t^j$ sous la forme $D_t^j(w_j\otimes\delta_t)$, et de diviser $D_t^j$ par $P_1$).
Mais alors

$$v_1 = Pv - P_1v_2 = P_1v_1'$$

et le lemme 1 appliqué en $z_1^*$ entraîne $v_1 = 0$ donc $Pv = P_1v_2$ . Comme $P_1$ est inversible au voisinage de $Z_2$, on en déduit $v_2 = P_2v$, et l'hypothèse de récurrence entraîne $v_2 = 0$, et par suite $w_j = 0$ $(j = 0,\ldots,m-1)$ et $v = 0$.

## § 3. DEFINITIONS ET PROPRIETES DE LA TRACE

Soit maintenant P un opérateur différentiel à coefficients analytiques dans M, d'ordre m, pour lequel l'hypersurface N est non caractéristique. Soit f une hyperfonction sur $M_+$ solution de $Pf = 0$. Rappelons [4] [8] comment l'on peut définir la trace de f sur N. Soit $\bar f\in\Gamma_{\bar M_+}(M,B)$ un prolongement quelconque de f à support dans $\bar M_+$. Comme $P\bar f$ est à support dans N, $P\bar f$ s'écrit de manière unique

$$P\bar f = Pg + \sum_{j=0}^{m-1} h_j\otimes\delta_t^j$$

avec $g \in \Gamma_N(M,B)$, $h_j \in \Gamma(N,B_N)$ Les $h_j$, hyperfonctions de N, ne dépendent pas du prolongement choisis : ce sont les traces de f (la première étant $h_{m-1}$). Cette défiritiion n'est pas intrinsèque, mais dire que les p premières traces de f, $h_{m-1},\dots,h_{m-p-1}$ sont nulles en un point $x^* \in iS^*N$ est invariant par changement analytique de coordonnées. Si l'on envoie $P\bar{f} \in \Gamma_N(M,B)$ dans $\Gamma(S^*_N X, C_{N|X})$, on peut pour tout $x^* \in iS^*N$ appliquer le lemme 2 et écrire de manière unique :

$$P\bar{f} = u = Pv + \sum_{j=0}^{m-1} w_j \otimes \delta_t^j$$

On a donc $h_j = w_j$ en $x^*$.

Si les m traces de f sont analytiques sur N, il résulte du théorème de Holmgren que f est analytique dans $M_+$ au voisinage de N. Un théorème de Kashiwara permet de microlocaliser ce résultat.

**Lemme 3** : Soit P un opérateur différentiel d'ordre m sur M, l'hypersurface N étant non caractéristique. Soit f une hyperfonction sur $M_+$ solution de $Pf = 0$, et supposons les m traces de f nulles en un point $x^* \in iS^*N$. Alors $\rho^{-1}(x^*)$ ne rencontre pas l'adhérence dans $iS^*M$ du support essentiel de f.

**Démonstration** : On peut choisir le prolongement $\bar{f}$ de f pour que $P\bar{f} = \sum_{j=0}^{m-1} h_j \otimes \delta_t^j$. On a donc $P\bar{f} = 0$ dans $\rho^{-1}(x^*)$. Si on choisit un point $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $P_m(0,x,i\xi,i\theta) \neq 0$, avec $(x,i\xi) = x^*$, ce qui est évidemment possible, on aura $\bar{f} = 0$ en $(0,x,i\xi,i\theta)$. Il reste à appliquer le théorème de Kashiwara (exposé en 1972 au congrès de Nice "hyperfonctions et physique théorique", mais non publié) : avec les notations précédentes, soit $u \in \Gamma_{\overline{M_+}}(M,B)$. Si $(0,x,i\xi,i\theta_0)$ appartient au support essentiel de u, avec $\xi \neq 0$, alors $\forall\, \theta \in \mathbb{R}$, $(0,x,i\xi,i\theta)$ appartient au support essentiel de u.

Esquissons pour la curiosité du lecteur la démonstration de ce théorème. Elle est basée sur le fait que l'application naturelle

$$C|_{iS^*M \times_M N} \to \mathcal{H}^1_{iS^*M \times_M N}(C_{N|X})$$

est injective.

Soit $u \in \Gamma_{\overline{M}_+}(M,B)$, $\tilde{u}$ son image dans $\Gamma(Q_-, C_{N|X})$. Si u est nulle en $y^* = (0,x,i\xi,i\theta_o) \in iS^*M \times_M N$, la "valeur au bord" de $\tilde{u}$ dans $H^1_{iS^*M \times_M N}(S^*_N X, C_{N|X})$ sera nulle au voisinage de $y^*$, et par suite $\tilde{u}$ est nulle au voisinage de $y^*$ dans $Q_-$. Mais le faisceau $C_{N|X}$ est, en dehors de $S^*_Y X$, isomorphe à un faisceau de microfonctions partiellement holomorphes (l'isomorphisme est donné par une transformation de Legendre [2]) et cela entraîne que $\tilde{u}$ est nulle dans $Q_- \cap p^{-1}(x^*)$, si $(x,i\xi) = x^*$. La valeur au bord de $\tilde{u}$ sera donc nulle sur $\rho^{-1}(x^*)$, et par suite u aussi.

## § 4. REGULARITE

Nous démontrerons le théorème de propagation au bord sous une hypothèse de "N-régularité". Nous allons voir que les opérateurs micro-hyperboliques y satisfont, mais nous décrirons dans un prochain article une autre classe d'opérateurs N-réguliers.

**Définition** : Soit N une hypersurface analytique de M, $L = iS^*M \times_M N$, $y^* \in L$, P un opérateur pseudo-différentiel défini au voisinage de $y^*$. Nous dirons que P est N-régulier en $y^*$ si :

$$u \in (\Gamma_L(C))_{y^*}\ ,\ Pu \in (C_{N|X})_{y^*} \text{ entraîne } u \in (C_{N|X})_{y^*}\ .$$

Supposons pour simplifier l'écriture que N est à nouveau l'hypersurface $\{t = 0\}$ et rappelons maintenant [3] qu'un opérateur pseudo-différentiel d'ordre m défini au voisinage d'un point $(0,x_o,i\xi_o,i\theta_o)$ de $iS^*M$ est micro-hyperbolique dans la direction dt si N est non caractéristique et toutes les racines en $\tau$ de l'équation $P_m(t,x,i\xi,\tau) = 0$ voisines de $i\theta_o$ sont purement imaginaires pour $(t,x,\xi)$ voisin de $(0,x_o,\xi_o)$.

**Théorème 1** : Si P est microhyperbolique dans la direction dt au point $y^* = (0,x_o,i\xi_o,i\theta_o)$, P est N-régulier en $y^*$.

**Démonstration** : Nous allons utiliser la plupart des propriétés des opérateurs micro-hyperboliques démontrées par Kashiwara et Kawai [3].

Soit donc u une section du faisceau C au voisinage du point $y^* = (0,x_o,i\xi_o,i\theta_o)$ à support dans L, avec Pu dans $C_{N|X}$. On peut supposer l'opérateur P de type Weierstrass d'ordre m , l'équation $P_m(0,x_o,i\xi,\tau) = 0$ ayant un zéro d'ordre m en $\tau = i\theta_o$. Le lemme 1 permet d'écrire :

$$Pu = Pv + \sum_{j=0}^{m-1} w_j \otimes \delta_t^j$$

avec $v \in (C_{N|X})_{y^*}$ , $w_j \in (C_N)_{x^*}$ , où $x^* = (x,i\xi)$.

L'opérateur P étant supposé micro-hyperbolique dans la direction dt on sait [3, théorème 6.9] résoudre l'équation en f :

$$Pf = 0, \ \gamma(f) = (h)$$

pour toutes données $(h) \in (C_N)^m_{x^*}$ , $\gamma(f)$ désignant la restriction de f et de ses m-1 premières dérivées en t sur N, ce qui a un sens puisque N étant non caractéristique pour P, le support de la microfonction f sera propre pour la projection $\rho$.

On peut, pour la même raison, faire le produit Y(t)f, et il est possible de choisir les données (h) pour que :

$$P(Y(t)f) = \sum_{j=0}^{m-1} w_j \otimes \delta_t^j$$

On a alors $P(u-v) = P(Yf)$, et l'équation $Pg = 0$ n'ayant pas d'autres solutions que 0 à support dans $\{t \geq 0\}$ [3 théorème 6.3] cela entraîne $u-v = Yf$, donc f à support dans $\{t \leq 0\}$ et par suite $f = 0$.

## § 5. Propagation au bord et réflexion

On se place dans le cadre du § 3.

**Théorème 2** : Soit P un opérateur différentiel d'ordre m sur M. l'hypersurface N étant non caractéristique. Soit f une hyperfonction sur $M_+$ solution de $Pf = 0$. Soit $(x,i\xi) = x^*$ un point de $iS^*N$ et soient $Z^-$, $Z^o$, $Z^+$ l'ensemble des points $(0,x,i\xi,\tau)$ de $S^*_N X$ solutions de $P_m(0,x,i\xi,\tau) = 0$,

avec $\mathrm{Re}\,\tau < 0$, $\mathrm{Re}\,\tau = 0$, $\mathrm{Re}\,\tau > 0$. Soit $Z^0 = Z^{0,1} \sqcup Z^{0,2}$ une partition de $Z^0$.
Supposons :

a) en tous points de $Z^{0,1}$ l'opérateur P est N-régulier.

b) l'adhérence dans $iS^*M$ du support essentiel de f ne rencontre pas $Z^{0,1}$.

c) il y a m-p points (comptés avec leurs multiplicités) dans $Z^- \cup Z^{0,1}$

d) les p premières traces de f (c'est à dire $h_{m-1},\ldots,h_p$) sont nulles en $x^*$.

Alors :

- les m traces de f sont nulles en $x^*$.
- l'adhérence du support essentiel de f ne rencontre pas $\rho^{-1}(x^*)$.

<u>Démonstration</u> :

- La deuxième partie de la conclusion résulte de la première d'après le lemme 3.
- Soit $\tilde{Z}^1 = Z^- \cup Z^{0,1}$, $\tilde{Z}^2 = Z^+ \cup Z^{0,2}$ ; il y a m-p points dans $\tilde{Z}^1$ et p points dans $\tilde{Z}^2$.

Soit $\bar{f} \in \Gamma_{\overline{M}_+}(M,B)$ un prolongement de f, et u l'image de $P\bar{f}$ dans $C_{N|X}(p^{-1}(x^*))$
L'hypothèse d) entraîne :

$$u = Pv + \sum_{j=0}^{m-p-1} w_j \otimes \delta_t^j$$

avec $v \in C_{N|X}(p^{-1}(x^*))$, $w_j \in (C_N)x^*$. En tous points $z^*$ de $Q_-$, donc de $Z^-$, u est de la forme Pv, avec $v \in (C_{N|X})_{z^*}$, puisque $\Gamma_{\overline{M}_+}(M,B)$ s'envoie naturellement dans $\Gamma(Q_-,C_{N|X})$.

En tous points $y^* \in Z^{0,1}$, l'hypothèse b) entraîne que $\bar{f}$ appartient à $(\Gamma_L(C))y^*$, où $L = iS^*M \times_M N$ et l'hypothèse a) entraîne donc que $\bar{f}$ (plus exactement son germe en $y^*$) appartient à $(C_{N|X})_{y^*}$ puisque $P\bar{f} \in \Gamma_N(M,B)$, et que ce dernier espace s'envoie naturellement dans $\Gamma(S^*_N X, C_{N|X})$.

En tous points $z^*$ de $\tilde{Z}^1$, u est donc de la forme Pv, $v \in (C_{N|X})_{z^*}$.
Soit U un ouvert de $S^*_N X$ qui contient $\tilde{Z}^1$ et ne rencontre pas $\tilde{Z}^2$. On peut donc trouver $v \in C_{N|X}(U \cap p^{-1}(x^*))$, avec $u = Pv$ dans $U \cap p^{-1}(x^*)$.

Soit $P = P_1P_2$ une factorisation de Weierstrass associée à $\tilde{Z}^1$ et $\tilde{Z}^2$. On a dans $U \cap p^{-1}(x^*)$ :

$$P\bar{f} = u = Pv = P_1(P_2v) = \sum_{j=0}^{m-p-1} w_j \otimes \delta_t^j$$

et l'opérateur $P_1$ étant d'ordre m-p, le lemme 2 assure que tous les $w_j$ sont nuls.

Remarques :

1) Si l'équation $P_m(0,x,i\xi,\tau) = 0$ n'a pas de racines purement imaginaires on obtient une version microlocale du théorème de Morrey-Nirenberg [5], [8].

2) Si l'opérateur P est à caractéristiques simples, les courbes bicaractéristiques étant transverses à N, c'est-à-dire si les racines purement imaginaires de $P_m(0,x,i\xi,\tau) = 0$ sont simples, on retrouve (compte-tenu du théorème de propagation le long des courbes bicaractéristiques [7, Ch.3 théorème 2.1.7.] le théorème de Lax et Nirenberg dans le cadre analytique.

3) On peut améliorer la remarque précédente en supposant seulement : en tous points de $Z^{0,1}$ l'opérateur P est micro-hyperbolique dans la direction dt, et la variété caractéristique de P contient des variétés régulières involutives $\Lambda_i$ de codimension $r_i$, passant par les points $y_i^*$ de $Z^{0,2}$, le symbole principal de P s'annulant exactement à un ordre $m_i$ dans toutes les directions transverses à $\Lambda_i$ (autrement dit on fait les hypothèses de [1]). Alors, sous les hypothèses b), c) d) du théorème 2, f sera nulle sur les $r_i$-feuilles bicaractéristiques de $\Lambda_i$ issues de $y_i^*$ (même si celles-ci ne sont pas transverses à N).

---

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bony J. M. et Schapira P. : Propagation des singularités analytiques pour les solutions des équations aux dérivées partielles. Ann. Inst. Fourier 1976, à paraître.

[2] Kashiwara M. et Kawai T. : On the boundary value problem for elliptic systems of linear differential equations I et II. Proc. Japan Acad. Vol. 48 (1972) 712-715 et vol. 49 (1973) 164-168. Cf. aussi : Séminaire Goulaouic-Schwartz, 1972-1973.

[3] Kashiwara M. et Kawai T. : On micro-hyperbolic pseudo-differential pseudo-differential operators I. J. Math. Soc. Japan, Vol. 27 (1975) 359-404.

[4] Komatsu H. : Boundary values for solutions of elliptic equations. Proc. Intern. Conf. Funct. Analysis and Relat. Topics, 1970, Univ. of Tokyo Press 107-121.

[5] Morrey C. B. et Nirenberg L. : On the analyticity of the solutions of linear elliptic system of partial differential equations. Comm. Pure Appl. Math. t.10 (1957) 261-290.

[6] Nirenberg L. : Lectures on linear partial differential equations. Regional conferences serie in Math. n°17, Providence RI. 1973.

[7] Sato M. Kawai T. et Kashiwara M. : Hyperfunctions and pseudo-differential equations. Lecture Notes in Math. Springer 287 (1973) 265-529.

[8] Schapira P. : Hyperfonctions et problèmes aux limites elliptiques. Bull. Soc. Mat. France 99 (1971) 113-141.

SEMINAIRE GOULAOUIC-SCHWARTZ 1975-1976

Exposé n° VI

# ERRATA

| Pages | Au lieu de : | Lire : |
| --- | --- | --- |
| VI.3 Ligne 9 | $Q_-$ | $Q_+$ |
| VI.5 Ligne 2 | m' | m |
| VI.5 Ligne 3 | ...contenant exactement m solutions en $\tau$ (comptées avec leurs multiplicités) de... | ...contenant les m racines en $\tau$ de l'équation... |
| VI.8 Lignes 1,4,7 | $Q_-$ | $Q_+$ |
| VI.10 Lignes 20,22 | $Q_-$ | $Q_+$ |
| VI.10 Lignes 6,15,21 | $Z^-$ | $Z^+$ |
| VI.10 Ligne 15 | $Z^+$ | $Z^-$ |