Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

L. Tartar

Existence globale pour un système hyperbolique semi-linéaire de la théorie cinétique des gaz

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1975-1976), exp. nº 1, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1975-1976____A2_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91120 PALAISEAU

Téléphone : 941.81.60 - Poste N°

Télex : ECOLEX 69 15 96 F

SEMINAIRE GOULAOUIC-SCHWARTZ 1975-1976

EXISTENCE GLOBALE POUR UN SYSTEME HYPERBOLIQUE SEMI LINEAIRE DE LA THEORIE CINETIQUE DES GAZ

par L. TARTAR

Exposé I

28 Octobre 1975

§ 1. INTRODUCTION

On considère en théorie cinétique des gaz des systèmes du type suivant :

$$① \begin{cases} \dfrac{\partial U_i}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}_x U_i \cdot \vec{C}_i + \sum\limits_{j,k} a_{i;j,k} U_j U_k = 0 & x \in \mathbb{R}^N \quad t \geq 0 \\ U_i(x,0) = U_{oi}(x) & i = 1,\dots,p \end{cases}$$

où les $\vec{C}_i$ sont des vecteurs fixes distincts de $\mathbb{R}^N$ et les $a_{i;j,k}$ des constantes réelles ($a_{i;j,k} = a_{i;k,j}$). Ce système décrit l'évolution d'un gaz dont les particules ne pourraient se propager qu'avec une des vitesses $\vec{C}_i$ et où n'auraient lieu que des collisions binaires (les $a_{i;j,k}$ définissant la fréquence ainsi que le résultat probable de chaque collision).
$U_i(x,t)$ représente la densité au point x et au temps t des particules ayant la vitesse $\vec{C}_i$; on a donc la contrainte

$$② \qquad U_i(x,t) \geq 0 \qquad i = 1,p;\ x \in \mathbb{R}^N,\ t \geq 0$$

Dans chaque collision la quantité de mouvement et l'énergie cinétique doivent être conservées (les particules ont toutes la même masse dans ce modèle : d'autre part les particules n'ont pas de moment cinétique propre) : ceci implique les relations suivantes

$$③ \begin{cases} \sum\limits_i a_{i;j,k} = 0 \\ \sum\limits_i a_{i;j,k} \vec{C}_i = \vec{0} \\ \sum\limits_i a_{i;j,k} |\vec{C}_i|^2 = 0 & j,k = 1,\dots,p \end{cases}$$

Les "collisions" de deux particules de même vitesse sont sans effet ; comme d'autre part, la collision d'une particule de vitesse $\vec{C}_i$ et d'une de vitesse $\vec{C}_j$ ne peut que faire diminuer le nombre des particules de ces deux types et augmenter celui des autres types, on a les inégalités :

$$④ \begin{cases} a_{i;j.k} \leq 0 & \text{si } i \neq j \text{ et } i \neq k \\ a_{i;i,j} \geq 0 & \text{si } i \neq j \\ a_{i;j,j} = 0 & \forall\, i, j \end{cases}$$

Par analogie avec l'équation de Boltzman, que les équations considérées ici sont censées approcher, on se restreint à des systèmes satisfaisant la condition suivante (liée à la notion d'entropie)

(5) $$\exists\, \alpha_i > 0 \; : \; \forall\, v_i \geq 0 \quad \sum_{i,j,k} a_{i;j,k} v_j v_k \operatorname{Log} \frac{v_i}{\alpha_i} \geq 0$$

qui implique

(6) $$\forall\, i : \sum_{j,k} a_{i;j,k}\, \alpha_j \alpha_k = 0 \quad .$$

§ 2. EXISTENCE LOCALE ET PROPRIETES

Pour tous les systèmes (1) on peut obtenir facilement le résultat suivant :

__Théorème 1__ : Si $U_{oi} \in L^\infty(\mathbb{R}^N), i = 1,\ldots,p$, alors $\exists\, T_o > 0$ tel que la solution existe et est unique dans $C^0([0,T_o[,(L^\infty(\mathbb{R}^N))^p)$. Si K_o est l'enveloppe convexe de $\vec{0}, \vec{C}_1,\ldots,\vec{C}_p$, alors la valeur de $U_i(x,t)$ ne dépend que des valeurs $U_{oj}(y)$ avec $y \in x + t K_o$, $j = 1,\ldots,p$ ■

Il suffit par exemple de considérer la méthode itérative :

(7) $$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial U_i^{n+1}}{\partial t} + \overrightarrow{\operatorname{grad}}_x U_i^{n+1} \cdot \vec{C}_i + \lambda U_i^{n+1} = \lambda U_i^n - \sum\limits_{j,k} a_{i;j,k} U_j^n U_k^n \\ U_i^{n+1}(x,0) = U_{oi}(x) \end{array} \right.$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si on rajoute des conditions sur les coefficients, on obtient des propriétés supplémentaires de la solution :

__Théorème 2__ : Sous l'hypothèse (4) , si $U_{oi} \geq 0$, $\forall\, i$, la solution vérifie $U_i(x,t) \geq 0$, $\forall\, i$. ■

Il suffit d'appliquer la méthode itérative (7) avec $\lambda > 0$ assez grand.

Théorème 3 : Sous l'hypothèse (3) , si U_{oi} est à support compact $\forall i$, on a

$$(3')\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \sum_i U_i(x,t)\,dx = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \sum_i U_i(x,t)\vec{C}_i\,dx = \vec{0} \\ \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \sum_i U_i(x,t)\,|\vec{C}_i|^2\,dx = 0 \end{cases}$$

Sous les hypothèses (4) et (5) , si $U_{oi} \geq 0$ et est à support compact $\forall i$, on a

$$(5')\qquad \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^N} \sum_i U_i\left(\mathrm{Log}\,\frac{U_i}{\alpha_i} - 1\right)dx \leq 0 \qquad \blacksquare$$

Il suffit de multiplier les équations (1) respectivement par 1, $\vec{C}_i$, $|\vec{C}_i|^2$, $\mathrm{Log}\,\frac{U_i}{\alpha_i} - 1$, de sommer en i et d'intégrer en x (ce calcul, justifié si les données sont régulières, s'étend si $U_{oi} \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$).

Théorème 4 : Si $U_{oi}(x + a) = U_{oi}(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^N$ $\forall i$, alors $U_i(x+a,t) = U_i(x,t)$ $\forall x \in \mathbb{R}^N$, $\forall t \geq 0$ $\forall i$.

Si $\forall i$ U_{oi} est indépendant de x_1, alors $\forall_i$ $U_i(x,t)$ est indépendant de x_1. $\blacksquare$

Ceci résulte simplement de l'unicité de la solution. Dans le cas où les U_{oi} sont périodiques, on a l'analogue de (3') et (5') en remplaçant $\mathbb{R}^N$ par une période.

§ 3. LE MODELE DE BROADWELL

Un système très simple (trop même!) satisfaisant (3) , (4) , (5) est le suivant :

$$(6) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial U_1}{\partial t} + \dfrac{\partial U_1}{\partial x} + a\,U_1U_2 - bU_3\,U_4 = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial U_2}{\partial t} - \dfrac{\partial U_2}{\partial x} + a\,U_1U_2 - b\,U_3\,U_4 = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial U_3}{\partial t} + \dfrac{\partial U_3}{\partial y} - a\;U_1U_2 + b\,U_3\,U_4 = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial U_4}{\partial t} - \dfrac{\partial U_4}{\partial y} - a\;U_1U_2 + b\,U_3\,U_4 = 0 \end{cases}$$

avec a, b > 0 .

(5) est vérifié si $a\alpha_1\alpha_2 = b\alpha_3\,\alpha_4$ car la quantité (5) s'écrit alors

$$(aU_1U_2 - bU_3U_4)\,\mathrm{Log}\,\frac{aU_1U_2}{bU_3U_4} \geq 0$$

Ce système donnerait les densités de particules pour un gaz formé de 4 types de particules, se déplaçant avec les vitesses $\pm$ 1 parallèlement aux axes.

L'analogue dans $\mathbb{R}^3$ de ce modèle serait

$$
(7)\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial U_1}{\partial t} + \dfrac{\partial U_1}{\partial x} + (a+b)U_1U_2 - cU_3U_4 - eU_5U_6 = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial U_2}{\partial t} - \dfrac{\partial U_2}{\partial x} + (a+b)U_1U_2 - cU_3U_4 - eU_5U_6 = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial U_3}{\partial t} + \dfrac{\partial U_3}{\partial y} - a\,U_1\,U_2 + (c+d)U_3U_4 - fU_5U_6 = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial U_4}{\partial t} - \dfrac{\partial U_1}{\partial y} - a\,U_1\,U_2 + (c+d)U_3U_4 - fU_5U_6 = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial U_5}{\partial t} + \dfrac{\partial U_5}{\partial z} - b\,U_1\,U_2 - d\,U_3\,U_4 + (e+f)U_5U_6 = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial U_6}{\partial t} - \dfrac{\partial U_6}{\partial z} - b\,U_1U_2 - d\,U_3\,U_4 + (e+f)U_5U_6 = 0
\end{cases}
$$

avec $a, b, c, d, e, f > 0$.

$$
(5) \text{ est vérifié si } (a+b)\alpha_1\alpha_2 - c\alpha_3\alpha_4 - e\alpha_5\alpha_6 = 0 \text{ et } - a\alpha_1\alpha_2 + (c+d)\alpha_3\alpha_4 - f\alpha_5\alpha_6 = 0 .
$$

Bien que (6) soit extrêmement simple, aucun théorème d'existence globale n'est connu pour ce système.

En utilisant le théorème 4, nous allons considérer le cas où les données initiales ne dépendent que de x et donc considérer le système simplifié.

$$
(6')\quad \frac{\partial U_1}{\partial t} + \frac{\partial U_1}{\partial x} = \frac{\partial U_2}{\partial t} - \frac{\partial U_2}{\partial x} = - \frac{\partial U_3}{\partial t} = - \frac{\partial U_4}{\partial t} = - f
$$

$$
f = a\,U_1\,U_2 - b\,U_3\,U_4
$$

Naturellement ce qui suit se généralise au système (7) avec données indépendantes de y et z.

§ 4. EXISTENCE GLOBALE POUR DES DONNEES "PETITES"

Le premier résultat non trivial d'existence globale a été obtenu par Nishida-Mimura [1].

Théorème 5 : $\forall k > 1 \quad \exists \varepsilon_o > 0$ tel que si

$$(8) \quad \sum_i \int_{\mathbb{R}} U_{oi}(x)\,dx \leq \varepsilon_o \quad \text{et} \quad 0 \leq U_{oi}(x) \leq M_o \quad \forall i \ ; \ \forall x \in \mathbb{R}$$

alors la solution de (6') existe globalement et vérifie $0 \leq U_i(x,t) \leq k M_o$ $\forall i \ ; \forall x \in \mathbb{R} \ \forall t \geq 0$.

Démonstration : Nous connaissons l'existence de la solution dans un intervalle $0 < t \leq T$, il suffit de montrer que $0 \leq U_i(x,t) \leq kM_o$ pour $x \in \mathbb{R}$, $0 < t \leq T$ pour avoir l'existence globale.

Posons $M = \sup\limits_{i,x,t \in [0,T]} U_i(x,t)$.

D'après (6') on a
$$U_1(x,t) = U_{o1}(x-t) - \int_o^t f(x-s,t-s)\,ds$$
$$\leq M_o + b\int_o^t U_3U_4(x-s,t-s)\,ds$$

$$\text{Soit } (9)_1 \qquad U_1(x,t) \leq M_o + bM \int_o^t U_3(x-s,t-s)\,ds$$

De même, on aura les majorations

$$(9)_2 \qquad U_2(x,t) \leq M_o + bM \int_o^t U_4(x+s,t-s)\,ds$$

$$(9)_3 \qquad U_3(x,t) \leq M_o + aM \int_o^t U_1(x,s)\,ds$$

$$(9)_4 \qquad U_4(x,t) \leq M_o + aM \int_o^t U_2(x,s)\,ds$$

En intégrant l'identité $\frac{\partial}{\partial t}(U_1 + U_3) + \frac{\partial U_1}{\partial x} = 0$ sur le triangle $\{(s,y) \mid 0 \leq s \leq t \ ; \ X - t + s \leq y \leq x\}$ on obtient l'identité

$$(10) \quad \int_o^t U_3(x-s,t-s)\,ds + \int_o^t U_1(x,s)\,ds = \int_{x-t}^x (U_{o1} + U_{o3})(y)\,dy$$

Donc (9)$_1$ et (10) impliquent $U_1(x,t) \le M_o + b M\varepsilon_o$

(9)$_3$ et (10) impliquent $U_3(x,t) \le M_o + a M\varepsilon_o$

En intégrant l'identité $\frac{\partial}{\partial t}(U_2 + U_4) - \frac{\partial U_2}{\partial x} = 0$ sur le triangle

$\{(s,y) \mid 0 \le s \le t \; ; x \le y \le x+t-s\}$ on obtient l'identité

(10') $$\int_o^t U_4(x+s,t-s)\,ds + \int_o^t U_2(x,s)\,ds = \int_x^{x+t} (U_{o2} + U_{o4})(y)\,dy$$

(9)$_2$ et (10') impliquent $U_2(x,t) \le M_o + b M \varepsilon_o$

(9)$_4$ et (10') impliquent $U_4(x,t) \le M_o + aM\varepsilon_o$.

On a donc finalement

$$M = \sup_{i,x,t} U_i(x,t) \le M_o + \max(a,b) M\varepsilon_o$$

et donc en prenant (11) $\varepsilon_o \le \frac{k-1}{k \max(a,b)}$ on a

$$M \le \frac{M_o}{1 - \varepsilon_o \max(a,b)} \le k\, M_o \qquad . \quad ■$$

<u>Corollaire 1</u> : Si $0 \le U_{oi}(x) \le M_o$, $\forall i \; ; x \in \mathbb{R}$ et si

(12) $$\sup_{x \in \mathbb{R}} \sum_i \int_{x-T}^{x+T} U_{oi}(y)\,dy \le \varepsilon < \frac{1}{\max(a,b)}$$

alors la solution existe pour $0 \le t \le T$ et vérifie

$$0 \le U_i(x,t) \le \frac{M_o}{1 - \varepsilon \max(a,b)} \; . \; \forall i \; ; x \in \mathbb{R} \, , \; t \in [0,T]$$

<u>Démonstration</u> : Soit $x_o \in \mathbb{R}$ et $\tilde{U}_{oi}(y) = \begin{cases} U_{oi}(y) & \text{si } |x_o - y| \le T \\ 0 & \text{si } |x_o - y| > T \end{cases}$

alors pour $k = \frac{1}{1 - \varepsilon \max(a,b)}$, ε satisfait (11) et $\tilde{U}_{oi}$ vérifie (8) .

Donc la solution de (6') avec données initiales $\widetilde{U}_{oi}$ vérifie

$$0 \leq \widetilde{U}_i(x,t) \leq \frac{M_o}{1-\varepsilon \max(a,b)} \quad \forall\, i,\ x \in \mathbb{R}\ ,\ t \geq 0\ ,$$

mais d'après le théorème 1, $U_i(x,t) = \widetilde{U}_i(x,t)$ si $|x-x_o| + t \leq T$; ce qui donne l'estimation voulue. ∎

<u>Remarque 1</u> : On peut naturellement adapter cette démonstration à de nombreux systèmes.

L'inconvénient majeur de ce résultat (ainsi que celui du paragraphe suivant) est d'être relatif à un problème en 1 dimension . ∎

§ 5. EXISTENCE GLOBALE POUR DES DONNEES " GRANDES"

Le second résultat (M. Crandall, L. Tartar [2]) résulte du corollaire et d'une utilisation adéquate de l'entropie.

<u>Théorème 6</u> : Si les données initiales sont périodiques de période p et vérifient $0 \leq U_{oi}(x) \leq M_o$ alors la solution existe globalement et vérifie

$$(13) \quad \forall\, k>1\ \exists \lambda_k \geq 0 \ :\ 0 \leq U_i(x,t) \leq kM_o e^{\lambda_k t} \quad \forall i\ ;\ x \in \mathbb{R}, t \geq 0$$

<u>Démonstration</u> : Soit $\alpha_i > 0$ vérifiant $a\alpha_1\alpha_2 = b\alpha_3\alpha_4$, alors on a $\frac{d}{dt} \sum_i \int_o^p U_i \operatorname{Log} \frac{U_i}{\alpha_i}\, dx \leq 0$. Donc, pendant l'intervalle d'existence, on a :

$$\sum_i \int_o^p U_i(x,t) \operatorname{Log} \frac{U_i(x,t)}{\alpha_i}\, dx \leq I_o = \sum_i \int_o^p U_{oi} \operatorname{Log} \frac{U_{oi}}{\alpha_i}\, dx$$

et donc

$$\sum_i \int_o^p U_i(x,t) \left(\operatorname{Log} \frac{U_i(x,t)}{\alpha_i}\right)_+ dx \leq I_o + \frac{\sum_i \alpha_i}{e}\, p$$

On peut majorer $\int_{x-T}^{x+T} U_i(y,t)\,dy$ en décomposant l'intégrale en deux : là où $0 \leq U_i \leq \alpha_i e^m$, on a une contribution $\leq 2\alpha_i e^m T$ et là où $U_i \geq \alpha_i e^m$, on a une contribution $\leq \frac{1}{m} \int_o^p U_i \left(\operatorname{Log} \frac{U_i}{\alpha_i}\right)_+ dy$ (en supposant $2T \leq p$ et $m \geq 0$).

Donc en posant $A = \sum_i \alpha_i$, on a

$$(14)\begin{cases} \sup_{x \in \mathbb{R}} \sum_i \int_{x-T}^{x+T} U_i(y,t)\,dy \leq 2Ae^m T + \frac{1}{m}(I_o + \frac{Ap}{e}) \\ \forall m \geq 0, \quad T \leq \frac{p}{2} \end{cases}$$

Ceci a lieu tant que $t < T_{max}$ temps d'existence.

$\forall k > 1$ si $\varepsilon = \frac{k-1}{k \max(a,b)}$, on peut choisir T_k tel que

$$\inf_{m \geq 0} 2Ae^m T_k + \frac{1}{m}(I_o + \frac{Ap}{e}) \leq \varepsilon \quad .$$

Alors on peut appliquer le corollaire 1 avec comme données initiales $U_i(x,t_o)$ pour déduire que

$$0 \leq U_i(x,t) \leq k \sup_{i,x,} U_i(x,t_o) \qquad \text{si} \quad t_o \leq t \leq t_o + T_k$$

Alors $\lambda_k = \frac{\operatorname{Log} k}{T_k}$ donne (13) . ■

Corollaire 2 : Si les données initiales vérifient $0 \leq U_{oi}(x) \leq M_o$ alors la solution existe globalement et vérifie une inégalité du type :

$$0 \leq U_i(x,t) \leq \varphi(t, M_o).$$

Démonstration : Pour majorer $U_i(x_o,t_o)$ on considère le problème avec données initales $\tilde{U}_{oi}(x) = U_{oi}(x)$ si $|x - x_o| \leq t_o$ prolongées par périodicité : $p = 2t_o$. Alors $U_i(x_o,t_o) = \tilde{U}_i(x_o,t_o)$ et on peut appliquer le théorème (6) à $\tilde{U}_i$.

I_o peut se majorer par une fonction de M_o et t_o et donc on peut majorer $\tilde{U}_i(x_o,t_o)$ par une fonction (qu'on peut expliciter si l'on veut) de M et t_o . ■

Remarque 2 : On peut obtenir des résultats d'existence avec données initiales dans $L^q(\mathbb{R})$ avec q assez grand. ■

Remarque 3 : Pour tout système de type (1) - (5) l'existence de l'entropie ramène le problème de l'existence globale à la recherche d'une majoration du type :

" $\exists \varepsilon > 0,\ T > 0 \ : \ \sum_i \int U_{oi}(x)\,dx \leq \varepsilon \Rightarrow$ la solution existe pour $0 \leq t \leq T$ ". ∎

BIBLIOGRAPHIE

[1] Nishida-Mimura : Global solutions to the Broadwell's model of Boltzmann equation for a simple discrete velocity gas, à paraître, Proc. Intern. Symp. on Math. Prob. in Theor. Phys. at RIMS, Kyoto Univ., Janvier 1975.

[2] Crandall-Tartar : à paraître.
