Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

D. Gourdin

Systèmes faiblement hyperboliques

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1975-1976), exp. nº 22, p. 1-21

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1975-1976____A23_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91120 PALAISEAU

Téléphone : 941.81.60 - Poste N°

Télex : ECOLEX 69 15 96 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 5 - 1 9 7 6

SYSTEMES FAIBLEMENT HYPERBOLIQUES

par D. GOURDIN

Exposé n° XXII

1 Mai 1976

§ 0. INTRODUCTION

La classification des systèmes différentiels à l'aide des facteurs invariants introduite par J. Vaillant [11] [12] conduit à la définition des systèmes faiblement hyperboliques à caractéristiques de multiplicités constantes que nous allons donner ci-après.

On résoudra alors le problème de Cauchy dans des espaces de Sobolev convenables, par la méthode de K. Yoshida [14], en imposant une condition de bonne décomposition inspirée par celle de J. C. de Paris [9] pour les opérateurs scalaires. Soit

$X^o > 0$, $\Omega = [0,X^o] \times R^n = \{(x^o,x) \in R^{n+1} ; x^o \in [0,X^o], \ x \in R^n\}$

$\mathcal{B}^\infty(\Omega) = \{u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \ ; \ D^\alpha_\varphi$ borné dans Ω, $\forall \alpha$ n+1-uple d'entiers $\}$

$\mathcal{O}^\theta_m(\Omega) = \{$opérateurs différentiels sur Ω à coefficients matriciels $m \times m$ dont les éléments appartiennent à $\mathcal{B}^\infty(\Omega)$ et d'ordre $\theta \in \mathbb{N}\}$

$$\mathcal{O}_m(\Omega) = \bigcup_{\theta \in \mathbb{N}} \mathcal{O}^\theta_m(\Omega).$$

§ I. LES SYSTEMES FAIBLEMENT HYPERBOLIQUES A CARACTERISTIQUES DE MULTIPLICITES CONSTANTES DE $\mathcal{O}_m(\Omega)$. [5].

Soit $h = h(x^o,x;D_{x^o},D_x) = (h^A_B(x^o,x;D_{x^o},D_x))_{\substack{1 \le A \le m \\ 1 \le B \le m}} \in \mathcal{O}^t_m(\Omega)$

et $H = H(x^o,x;\ell_o,\ell) = (H^A_B(x^o,x;\ell_o,\ell))_{\substack{1 \le A \le m \\ 1 \le B \le m}}$ sa matrice caractérisitque au sens de Cauchy Kowalewski, (ℓ_o,ℓ) désignant un covecteur au point (x^o,x) de Ω $[(\ell_o,\ell) \in T^*_{(x^o,x)}(\Omega)]$.

H vérifie les hypothèses suivantes :

1) Quel que soit (x^o,x) fixé dans Ω, le déterminant caractéristique $\det H = \det H(x^o,x;\ell_o,\ell) \not\equiv 0$ dans $R[\ell_o,\ell]$ et admet une décomposition en facteurs irréductibles H_s dans $R[\ell_o,\ell]$ de multiplicité ν_s constante dans Ω à coefficients appartenant à $\mathcal{B}^\infty(\Omega)$:

$$\det H = (H_1)^{\nu_1} \ldots (H_s)^{\nu_s} \ldots (H_\sigma)^{\nu_\sigma} \ ;$$

2) Dans la représentation de H dans l'anneau localisé Φ_s de $R[\ell_o,\ell]$ par rapport à l'idéal premier défini par H_s [11] on a

$$H \underset{\Phi_s}{\sim} \begin{pmatrix} (H_s)^{q_1(s)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (H_s)^{q_m(s)} \end{pmatrix}$$

avec $q_1(s) \geq \ldots \geq q_m(s)$ et $\nu_s = q_1(s) + \ldots + q_m(s)$, et on suppose que les multiplicités $q_1(s) = q^s$ sont constantes dans Ω, quel que soit $s = 1,\ldots,\sigma$.

3) Le radical caractéristique $\prod_{s=1}^{\sigma} H_s$ est strictement hyperbolique par rapport au covecteur $(1,0) \in T^*_{(x^o,x)}(\Omega)$ en tout point (x^o,x) de Ω, à distance finie et infinie dans Ω [7], ce qui signifie :

Dans $R[\ell_o]$, $\prod_{s=1}^{\sigma} H_s$ a toutes ses racines p_o^i réelles et distinctes et en posant :

$$\begin{aligned}
H_1(x^o,x;\ell_o,\ell) &= H_1(x^o,x;1,0) \prod_{i=1}^{\tau_1} (\ell_o - p_o^i(x^o,x;\ell)) \\
&\vdots \\
H_s(x^o,x;\ell_o,\ell) &= H_s(x^o,x;1,0) \prod_{i=\tau_{s-1}+1}^{\tau_s} (\ell_o - p_o^i(x^o,x;\ell)) \\
&\vdots \\
H_\sigma(x^o,x;\ell_o,\ell) &= H_\sigma(x^o,x;1,0) \prod_{i=\tau_{\sigma-1}+1}^{\tau_\sigma} (\ell_o - p_o^i(x^o,x;\ell))
\end{aligned}$$

on a

$0 = \tau_o < \tau_1 < \ldots < \tau_s < \ldots < \tau_\sigma$, $d^oH_s = \tau_s - \tau_{s-1}$ et les inégalités

$$0 < \inf\{(p_o^i(x^o,x;\ell) - p_o^j(x^o,x;\ell)| ; i \neq j, (x^o,x) \in \Omega, |\ell| = 1\}$$

$$0 < \inf\{|H_s(x^o,x;1,0)| ; (x^o,x) \in \Omega, 1 \leq s \leq \sigma\}$$

<u>Définition 1</u> : Dans ces conditions, l'opérateur h est dit faiblement hyperbolique par rapport aux covecteurs $(1,0) \in T^*_{(x^o,x)}(\Omega)$ et à caractéristiques de multiplicités constantes dans Ω.

La matrice A' des cofacteurs des éléments de H dans le développement de det H est divisible par

$$\prod_{s=1}^{\sigma} (H_s)^{q_2(s)+\ldots+q_m(s)} \qquad [12]$$

En posant

$$A' = \prod_{s=1}^{\sigma} (H_s)^{q_2(s)+\ldots+q_m(s)} A$$

on a

$$HA = AH = \prod_{s=1}^{\sigma} (H_s)^{q^s} I_m$$

où I_m est la matrice unité $m \times m$.

On peut toujours supposer que la suite $(q^s)_{1\leq s\leq \sigma}$ est décroissante au sens large : $q^1 \geq q^2 \geq \ldots \geq q^s \geq \ldots \geq q^\sigma$. Appelons τ le degré de $(H_1)^{q'} \ldots (H_\sigma)^{q^\sigma}$ et $\tau - t$ le degré des éléments de A dans $R[\ell_o, \ell]$.

Enfin, pour r réel quelconque, on désigne les espaces de Sobolev par $\mathcal{D}^r_{L^2} = \{u/u \in \mathcal{S}'(R^n)$ et $(1+|\xi|^2)^{r/2}\hat{u} \in L^2(R^n)\}$ avec leurs normes $\|u\|_r = \|(1+|\xi|^2)^{r/2}\hat{u}\|_{L^2(R^n)}$; $\mathcal{D}^\infty_{L^2} = \bigcap_{r\in\mathbb{R}} \mathcal{D}^r_{L^2}$ est un espace de Fréchet pour les semi-normes $\|u\|_r$; $\mathcal{E}^\theta_{[0,X^o]}(\mathcal{D}^\infty_{L^2}) = \{y : \Omega \to \mathbb{C}/x^o \mapsto y(x^o,.)$ est θ fois continûment dérivable de $[0,X^o]$ dans $\mathcal{D}^\infty_{L^2}\}$ est égal à l'e.v.t.l.c. $\bigcap_{r\in\mathbb{R}} \mathcal{E}^\theta_{[0,X^o]}(\mathcal{D}^r_{L^2})$ avec les semi-normes $\sup_{0\leq j\leq\theta} \sup_{[0,X^o]} \|D^j_{x^o} y(x^o,.)\|_r$, θ étant un entier positif ou nul.

<u>Théorème 1</u> : Le problème de Cauchy posé par le système

(1.1) $$h(x^o,x;D_{x^o},D_x)y(x^o,x) = f(x^o,x)$$

et les données de Cauchy sur l'hyperplan $x^o = 0$ notées

$$\mathbf{D} \begin{cases} (y, D_{x^o}y, \ldots, D^{t-1}_{x^o}y)(0,x) = (y_o(x), \ldots, y_{t-1}(x)) \\ y_i \in (\mathcal{D}^\infty_{L^2})^m . \end{cases}$$

avec le second membre $f \in \mathcal{E}^{o}_{[0,X^o]}\ (\mathcal{D}^{\infty}_{L^2})^m$, admet une solution $y \in \mathcal{E}^{t}_{[0,X^o]}\ (\mathcal{D}^{\infty}_{L^2})^m$, s'il existe un opérateur $a_1 \in \mathcal{O}^{\tau-t}_m(\Omega)$ de symbole principal A tel que $k_1 = h\,a_1$ soit bien décomposable dans $\mathcal{O}_m(\Omega)$; cette solution est unique s'il existe un opérateur $a_2 \in \mathcal{O}^{\tau-t}_m(\Omega)$ de symbole principal A tel que $k_2 = a_2 h$ soit bien décomposable dans $\mathcal{O}_m(\Omega)$.

Dans le paragraphe II, nous allons introduire la bonne décomposition dans $\mathcal{O}_m(\Omega)$ et les notions équivalentes.

Remarque : Dans [4], nous avons étudier le problème de Cauchy dans le cas particulier où $\nu_1 = 2$, $q^1 = 2$ et $q^2 = \ldots = q^\sigma = 1$, $\nu_2, \ldots, \nu_\sigma$ étant des entiers quelconques, sous une condition équivalente à la bonne décomposition, mais dans des espaces de Sobolev plus larges, en remplaçant (1.1) par un système d'équations du premier ordre mais pseudo-différentiels.

R. Berzin [1], sous la même condition (divisibilité d'un polynôme construit à partir de la matrice sous-caractéristique par le facteur de multiplicité 2 dans le déterminant caractéristique) a résolu le problème de Cauchy $\mathcal{C}^\infty$ dans ce même cas particulier en construisant une paramétrix au moyen d'opérateurs intégraux de Fourier.

Dans [2], il étudie un autre cas particulier : $\nu^1 = 3$, $q^1 = 3$; $\nu^2 = 3$, $q^2 = 2$; ν_s quelconque, $q^s = 1$ $(s = 3, \ldots, \sigma)$. Petkov [10] a étudié les cas particuliers où l'on a soit $\nu_s \leq 3$, soit $\nu_s > 3$ et $q^s = 1$.

Y. Demay a traité dans [3] le cas des systèmes du premier ordre à caractéristique double, avec la condition d'annulation du symbole sous-caractéristique.

Soient $a_1 \in \mathcal{O}^{\tau-t}_m(\Omega)$ et $a_2 \in \mathcal{O}^{\tau-t}_m(\Omega)$ de même symbole principal A.

Alors les opérateurs $k_1 = h\ a_1$ et $k_2 = a_2 = a_2 h$ sont de la forme $k(x^o, x; D_{x^o}, D_x) \in \mathcal{O}^{\tau}_m(\Omega)$ de symbole principal diagonal
$K(x^o, x; \ell_o, \ell) = H_1^{q^1} \ldots H_\sigma^{q^\sigma}(x^o, x; \ell_o, \ell) I_m$.

§ II. LES CONDITIONS DE BONNE DECOMPOSITION

1) La condition de bonne décomposition pour les opérateurs $k(x^o, x; D_{x^o}, D_x)$ dans $\mathcal{O}_m(\Omega)$.

Fixons H_o un des facteurs H_s $(1 \leq s \leq \sigma)$.

Proposition 1 : Quel que soit $h_o \in \mathcal{O}_1(\Omega)$ de symbole principal H_o, il existe des opérateurs $e_j \in \mathcal{O}_m(\Omega)$ $(0 \leq j \leq \tau)$ et des nombres entiers β_j $(0 \leq j \leq \tau)$ avec $\beta_o = q^o$ tels que

$$(2.1) \qquad \begin{cases} k = \sum_{j=o}^{\tau} e_j (h_o)^{\beta_j} \\ k \underset{\tau - j}{\sim} \sum_{\rho = o}^{j} e_\rho \; (h_o)^{\beta_\rho} \quad \text{pour tout } j = 0, \dots, \tau-1. \end{cases}$$

(on dit que dans $\mathcal{O}_m(\Omega)$, $p \underset{\theta}{\sim} q$ si $p - q \in \mathcal{O}_m^{\theta - 1}(\Omega)$).

Définition 2 : k est dit bien décomposable par rapport à H_o si les nombres β_j vérifient les inégalités $\beta_j \geq \beta_o - j$. Alors l'expression (2-1) réalise une bonne décomposition de k par rapport à H_o dans $\mathcal{O}_m(\Omega)$.

Proposition 2 : Si k possède une bonne décomposition par rapport à H_o, toute décomposition par rapport à H_o est une bonne décomposition.

Proposition 3 : k est bien décomposable par rapport à chaque H_s $(1 \leq s \leq \sigma)$ dans $\mathcal{O}_m(\Omega)$ si et seulement si il existe des opérateurs $h_1, \dots, h_\sigma \in \mathcal{O}_1(\Omega)$ de symboles principaux respectivement $H_1, \dots, H_\sigma$ et des opérateurs $e_o, \dots, e_\tau \in \mathcal{O}_m(\Omega)$ tels que :

$$(2.2) \qquad \begin{cases} k = \sum_{j=o}^{\tau} e_j \; h_1^{[q' - j]_+} \dots h_\sigma^{[q^\sigma - j]_+} \quad \text{et} \\ k \underset{\tau - j}{\sim} \sum_{\rho = o}^{j} e_\rho \; h_1^{[q' - \rho]_+} \dots h_\sigma^{[q^\sigma - \rho]_+} \quad (0 \leq j \leq \tau) \end{cases}$$

où $[r]_+ = r$ si $r \geq 0$ et 0 sinon.

Proposition 4 : Si k possède une décomposition de la forme:

$$(2.3) \qquad \begin{cases} k = \sum_{j=o}^{\tau} e_j \; h_{\alpha_1^j} \, h_{\alpha_2^j} \dots h_{\alpha_{u_j}^j} \\ k \underset{\tau - j}{\sim} \sum_{\rho = o}^{j} e_\rho \; h_{\alpha_1^\rho} \, h_{\alpha_2^\rho} \dots h_{\alpha_{u_\rho}^\rho} \quad (0 \leq j \leq \tau) \end{cases}$$

où $u_j = \sum_{s=1}^{\sigma} [q^s - j]_+$.

α^j est une bijection : $\{1,\dots,u_j\} \to \{\underbrace{1,\dots,1}_{[q^1-j]_+ \text{ fois}};\dots;\underbrace{\sigma,\dots,\sigma}_{[q^\sigma-j]_+ \text{ fois}}\}$

$\alpha^j(i) = \alpha_i^j$,

$h_s \in \mathcal{O}_1(\Omega)$ a pour symbole principal H_s ,

$e_j \in \mathcal{O}_m(\Omega)$

alors k est bien décomposable par rapport à chaque H_s $(1 \leq s \leq \sigma)$ dans $\mathcal{O}_m(\Omega)$.

<u>Proposition 5</u> : Si k possède une décomposition de la forme :

$$(2.4) \quad \begin{cases} k = \sum_{j=0}^{\tau} e_1^j \, h_{\alpha_1^j} \, e_2^j \, h_{\alpha_2^j} \dots e_{u_j}^j \, h_{\alpha_{u_j}^j} \, e_{u_j+1}^j \\ k \underset{\tau-j}{\sim} \sum_{\rho=0}^{j} e_1^\rho . h_{\alpha_1^\rho} . e_2^\rho . h_{\alpha_2^\rho} \dots e_{u_\rho}^\rho . h_{\alpha_{u_\rho}^\rho} \, e_{u_\rho+1}^\rho \qquad (0 \leq j \leq \tau) \end{cases}$$

où $h_s \in \mathcal{O}_1(\Omega)$ a pour symbole principal H_s $(1 \leq s \leq \sigma)$ et $e_i^j (0 \leq j \leq \tau \ ; \ 1 \leq i \leq u_j + 1)$ appartient à $\mathcal{O}_m(\Omega)$, alors k est bien décomposable par rapport à chaque H_s $(1 \leq s \leq \sigma)$ dans $\mathcal{O}_m(\Omega)$.

La définition 2 a été introduite et les propositions 1, 2 et 3 prouvées par J. C. de Paris [9] dans le cas scalaire $(m = 1)$; les démonstrations s'adaptent facilement au cas m entier quelconque et se prolongent aux propositions 4 et 5.

Nous allons maintenant étudier la bonne décomposition dans un espace d'opérateurs $\mathcal{O}'_m(\Omega)$ plus grand que $\mathcal{O}_m(\Omega)$.

2) <u>L'espace d'opérateurs</u> $\mathcal{O}'_m(\Omega)$ [16]

On désigne par

$$\boxed{\mathcal{E}_{[0,X^0]}(S^r)} \qquad (r \text{ réel})$$

l'espace des fonctions $\mathcal{E} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega \times R^n)$ telles que, quel que soient l'entier ρ, les n-uples d'entiers μ et ν, il existe $C_{\rho,\mu,\nu}$ constante positive telle que

$$\forall x^o \in [0,X^o],\ \forall x \in R^n,\ \forall \ell \in R^n \Rightarrow |D^{\rho}_{x^o}\, D^{\mu}_x\, D^{\nu}_{\ell}\, \varepsilon(x^o,x;\ell)| \leq C_{\rho,\mu,\nu}(1+|\ell|^2)^{\frac{r-|\nu|}{2}}$$

$$\boxed{\mathcal{E}_{[0,X^o]}(\mathcal{S}^r)}$$

l'espace des opérateurs pseudo-différentiels en x, scalaires, dépendant du paramètre $x^o \in [0,X^o]$, $\varepsilon(x^o,x;D_x)$ dont le symbole $\varepsilon(x^o,x;\ell)$ appartient à $\mathcal{E}_{[0,X^o]}(S^r)$. On a :

$$\mathcal{E}_{[0,X^o]}(\mathcal{S}^r) \subset \mathcal{E}^{\infty}_{[0,X^o]}[\mathcal{L}^r(\mathcal{D}^{-\infty}_{L^2},\mathcal{D}^{-\infty}_{L^2})], \text{ où } \mathcal{D}^{-\infty}_{L^2} = \underset{\overrightarrow{s\in R}}{\bigcup} \mathcal{D}^{s}_{L^2}$$

muni de la topologie inductive limite est un espace de Silva [15], $\mathcal{L}^r(\mathcal{D}^{-\infty}_{L^2},\mathcal{D}^{-\infty}_{L^2})$ est l'e.v.t.l.c. des applications linéaires continues L d'ordre r de $\mathcal{D}^{-\infty}_{L^2}$ dans $\mathcal{D}^{-\infty}_{L^2}$, c'est-à-dire que L est la limite d'un système inductif d'applications formé pour les restrictions L^{s-r}_s de L à $\mathcal{D}^s_{L^2}$ dans $\mathcal{D}^{s-r}_{L^2}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}^{s'}_{L^2} \arrow[r, hook, "i^{s}_{s'}"] \arrow[d, "L^{s'-r}_{s'}"'] \arrow[dr, phantom, "C"] & \mathcal{D}^{s}_{L^2} \arrow[r, hook, "i_s"] \arrow[d, "L^{s-r}_{s}"] \arrow[dr, phantom, "C"] & \mathcal{D}^{-\infty}_{L^2} \arrow[d, "L"] \\
\mathcal{D}^{s'-r}_{L^2} \arrow[r] & \mathcal{D}^{s-r}_{L^2} \arrow[r, hook] & \mathcal{D}^{-\infty}_{L^2}
\end{tikzcd} \qquad (s' > s)$$

muni des semi normes $\|L\|^{s-r}_{s} = \sup\limits_{\|u\|_s \leq 1} \|Lu\|_{s-r}$, et $\mathcal{E}^{\infty}_{[0,X^o]}[\mathcal{L}^r(\mathcal{D}^{-\infty}_{L^2},\mathcal{D}^{-\infty}_{L^2})]$ est l'espace des applications de $[0,X^o]$ dans $\mathcal{L}^r(\mathcal{D}^{-\infty}_{L^2},\mathcal{D}^{-\infty}_{L^2})$ indéfiniment différentiable par rapport à $x^o \in [0,X^o]$.

Soit $\varepsilon^{(i)}_{x^o}(x^o,x;D_x)$ la dérivée $i^{\text{ème}}$ de $\varepsilon(x^o,x,D_x) \in \mathcal{E}_{[0,X^o]}(\mathcal{S}^r)$ par rapport à x^o, alors $\varepsilon^{(i)}_{x^o}(x^o,x;D_x) \in \mathcal{E}_{[0,X^o]}(\mathcal{S}^r)$ et a pour symbole $\varepsilon^{(i)}_{x^o}(x^o,x;\ell)$.

D'autre part, θ étant un entier fixé, $\underset{\overrightarrow{s\in R}}{\bigcup} \mathcal{E}^{\theta}_{[0,X^o]}(\mathcal{D}^{s}_{L^2})$ est aussi un espace de Silva égal à $\mathcal{E}^{\theta}_{[0,X_o]}(\mathcal{D}^{-\infty}_{L^2})$ et tout

$\varepsilon(x^0,x;D_x) \in \mathcal{E}_{[0,X^0]}(S^r)$ opère continument sur cet espace comme un opérateur d'ordre r : on note $\varepsilon(x^0,x;D_x) \in \mathcal{L}^r(\mathcal{E}^\theta_{[0,X^0]}(\mathcal{D}^{-\infty}_{L^2}), \mathcal{E}^\theta_{[0,X^0]}(\mathcal{D}^{-\infty}_{L^2}))$

et on a

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}^\theta_{[0,X^0]}(\mathcal{D}^{s'}_{L^2}) \arrow[r, hook, "{}^\theta i^s_{s'}"] \arrow[d, "\varepsilon"] \arrow[dr, phantom, "\text{(C)}"] & \mathcal{E}^\theta_{[0,X^0]}(\mathcal{D}^{s}_{L^2}) \arrow[r, hook, "{}^\theta i_s"] \arrow[d, "\varepsilon"] \arrow[dr, phantom, "\text{(C)}"] & \mathcal{E}^\theta_{[0,X^0]}(\mathcal{D}^{-\infty}_{L^2}) \arrow[d, "\varepsilon"] \\
\mathcal{E}^\theta_{[0,X^0]}(\mathcal{D}^{s'-r}_{L^2}) \arrow[r, hook, "{}^\theta i^{s-r}_{s'-r}"] & \mathcal{E}^\theta_{[0,X^0]}(\mathcal{D}^{s-r}_{L^2}) \arrow[r, hook, "{}^\theta i^{s-r}_{s'-r}"] & \mathcal{E}^\theta_{[0,X^0]}(\mathcal{D}^{-\infty}_{L^2})
\end{tikzcd}$$

On introduit aussi

$$\boxed{\mathcal{E}_{[0,X^0]}(\mathcal{L}^{-\infty}) = \mathcal{E}^\infty_{[0,X^0]}[\mathcal{L}(\mathcal{D}^{-\infty}_{L^2}, \mathcal{D}^{+\infty}_{L^2})]}$$

qui est l'espace des applications indéfiniment dérivables de $[0,X^0]$ dans l'e.v.t.l.c. $\mathcal{L}(\mathcal{D}^{-\infty}_{L^2}, \mathcal{D}^{+\infty}_{L^2})$ des applications linéaires continues L de $\mathcal{D}^{-\infty}_{L^2}$ dans $\mathcal{D}^{+\infty}_{L^2} = \bigcap_{s\in R} \mathcal{D}^s_{L^2}$ avec la topologie engendrée par les semi normes $\|L\|^{s_2}_{s_1} = \sup_{\|u\|_{s_1}\leq 1} \|Lu\|_{s_2}$ $(s_1 \in R, s_2 \in R)$ <u>on a les propriétés suivantes:</u>

Si $g \in \mathcal{E}_{[0,X^0]}(\mathcal{L}^{-\infty})$, alors quelque soit $i \in N$, la dérivée $i^{\text{ème}}$ de g par rapport à x^0, $g^{(i)}_{x^0}$ admet un noyau $G_i(x^0,x;x') \in \mathcal{F}([0,X^0], \mathcal{B}^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n))$ [6].

Quel que soit $\theta \in N$, g opère continument :

$$\mathcal{E}^\theta_{[0,X^0]}(\mathcal{D}^{-\infty}_{L^2}) \to \mathcal{E}^\theta_{[0,X^0]}(\mathcal{D}^{+\infty}_{L^2}) = \bigcap_{s\in R} \mathcal{E}^\theta(\mathcal{D}^s_{L^2})$$

C'est un opérateur d'ordre arbitraire .

Soit $\mathcal{E}_{[0,X^0]}(S^{-\infty}) = \bigcap_{r\in R} \mathcal{E}_{[0,X^0]}(S^r)$. on a $\forall r \in R$.

$$\mathcal{E}_{[0,X^0]}(S^r) \cap \mathcal{E}_{[0,X^0]}(\mathcal{L}^{-\infty}) = \mathcal{E}_{[0,X^0]}(S^{-\infty})$$

$$\mathcal{E}_{[0,X^0]}(S^{\infty}) \underset{\neq}{\subset} \mathcal{E}_{[0,X^0]}(\mathcal{L}^{-\infty}) .$$

$$\boxed{\mathcal{E}_{[0,X^0]}(\mathcal{L}^r)} \quad [6$$

est l'espace des opérateurs $\lambda(x^0,x;D_x)$ de la forme :

$$\lambda(x^0,x;D_x) = \varepsilon(x^0,x;D_x) + g(x^0) \text{ avec } \varepsilon \in \mathcal{E}_{[0,X^0]}(S^r) \text{ et } g\in \mathcal{E}_{[0,X^0]}(\mathcal{L}^{-\infty})$$

Il a les propriétés suivantes :

Soit $\lambda \in \mathcal{E}_{[0,X^0]}(\mathcal{L}^r)$; on dit que $\varepsilon(x^0,x;\ell)$ est un symbole de λ, il est unique modulo $\mathcal{E}_{[0,X^0]}(S^{-\infty})$.

i) λ opère continuement : $\mathcal{E}^\theta_{[0,X^0]}(\mathcal{D}^{-\infty}) \to \mathcal{E}^\theta_{[0,X^0]}(\mathcal{D}^{-\infty})$ comme un opérateur d'ordre r.

ii) λ admet un adjoint $\lambda^* \in \mathcal{E}_{[0,X^0]}(\mathcal{L}^r)$ au sens suivant :

$$(\lambda u,v)_{L^2(R^n)} = (u,\lambda^* v)_{L^2(R^n)} \quad u \in \mathcal{D}^\infty_0(R^n),\ v\in \mathcal{D}^\infty_0(R^n),$$

λ^* admet un symbole ε^* tel que :

$$\forall\ N \text{ entier},\ \varepsilon^*(x^0,x;\ell) - \sum_{j=0}^{N-1} \varepsilon^*_j(x^0,x;\ell) \in \mathcal{E}_{(0,X^0)}(S^{r-N})$$

$$\text{avec } \varepsilon^*_j(x^0,x;\ell) = \sum_{|\alpha|=j} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \ell}\right)^\alpha \overline{\varepsilon(x^0,x;\ell)} \in \mathcal{E}_{[0,X^0]}(S^{r-j})$$

$$(\lambda^*)^{(i)}_{x^0} = (\lambda^{(i)}_{x^0})^* \quad \forall i \in N.$$

Soient $\lambda_1 \in \mathcal{E}_{[0,X^0]}(\mathcal{L}^{r_1})$ et $\lambda_2 \in \mathcal{E}_{[0,X^0]}(\mathcal{L}^{r_2})$ de symboles respectifs $\varepsilon_1(x^0,x;\ell)$ et $\varepsilon_2(x^0,x;\ell)$.

iii) $\lambda_1\lambda_2 \in \mathcal{E}_{[0,X^0]}(\mathcal{L}^{r_1+r_2})$ a un symbole $\mu(x^0,x;\ell)$ tel que $\forall$ N entier.

$\mu(x^0,x;\ell) - \sum_{j=0}^{N-1} \mu_j(x^0,x;\ell) \in \mathcal{E}_{[0,X^0]}(S^{r_1+r_2-N})$ avec

$$\mu_j(x^o,x;\ell) = \sum_{|\alpha|=j} \frac{1}{\alpha!}\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \ell}\right)^\alpha \varepsilon_1(x^o,x;\ell)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \varepsilon_2(x^o,x;\ell)$$

$$(\lambda_1.\lambda_2)^{(1)}_{x^o} = (\lambda_1)^{(1)}_{x^o}.\lambda_2 + \lambda_1.(\lambda_2)^{(1)}_{x^o}.$$

$$[\lambda_1,\lambda_2] \in \mathcal{E}_{[0,X^o]}(\mathcal{L}^{r_1+r_2-1}).$$

Toutes ces définitions et ces propriétés se transportent des opérateurs scalaires aux opérateurs matriciels $m \times m$. On note alors les espaces d'opérateurs matriciels de la façon suivante :

$$\mathcal{E}_{[0,X^o]}(S^r_m),\ \mathcal{E}_{[0,X^o]}(\mathcal{S}^r_m),\ \mathcal{E}_{[0,X^o]}(\mathcal{L}^{-\infty}_m),\ \mathcal{E}_{[0,X^o]}(\mathcal{L}^r_m).$$

On a aussi : $[\lambda_1,\lambda_2] \in \mathcal{E}_{[0,X^o]}(\mathcal{L}_m^{r_1+r_2-1})$ si $\lambda_1 \in \mathcal{E}_{[0,X^o]}(\mathcal{L}^{r_1})$ et $\lambda_2 \in \mathcal{E}_{[0,X^o]}(\mathcal{L}_m^{r_2})$. On désigne enfin par :

$$\boxed{\mathcal{E}_{[0,X^o]}(\Lambda^r_m)}$$

le sous-espace des opérateurs $\lambda_r(x^o,x;D_x)$ de $\mathcal{E}_{[0,X^o]}(\mathcal{L}^r_m)$ ayant un symbole $\varepsilon_r(x^o,x;\ell) \in \mathcal{E}_{[0,X^o]}(S^r_m)$ développable en symboles $\varepsilon_{r,j}(x^o,x;\ell) \in \mathcal{E}_{[0,X^o]}(S^{r-j}_m)$ homogène de degré $r-j$ par rapport à ℓ pour $|\ell| \geq 1$ au sens que :

$$\forall N \text{ entier},\ \varepsilon_r(x^o,x;\ell) - \sum_{j=o}^{N-1} \varepsilon_{r,j}(x^o,x;\ell) \in \mathcal{E}_{[0,X^o]}(S^{r-N}_m)$$

($\Rightarrow$ les symboles $\varepsilon_{r,j}(x^o,x;\ell)$ sont uniques pour $|\ell| \geq 1$).

$$\boxed{\mathcal{O}'^{\theta}_m(\Omega)}$$

l'espace des opérateurs $p(x^o,x;D_{x^o},D_x)$ de la forme

$$p(x^o.x;D_{x^o}.D_x) = \sum_{i=o}^{\theta} \lambda_{\theta-i}(x^o,x;D_x)D^i_{x^o} \text{ où } \lambda_{\theta-i}(x^o.x;D_x) \in \mathcal{E}_{[0,X^o]}(\Lambda^{\theta-i}_m)$$

$p(x^o.x;D_{x^o},D_x)$ opère continument de $[\mathcal{E}^\tau_{[0,X^o]}(\mathcal{D}^{+\infty}_{L^2})]^m$ dans $[\mathcal{E}^{\tau-\theta}_{[0,X^o]}(\mathcal{D}^{+\infty}_{L^2})]^m$ $(\theta \leq \tau)$.

p possède un adjoint appartenant à $\mathcal{O}'^{\theta}_m(\Omega)$, on a aussi

$$\mathcal{O}'^{\theta_1}_m(\Omega).\mathcal{O}'^{\theta_2}_m(\Omega) \subset \mathcal{O}'^{\theta_1+\theta_2}_m(\Omega) .$$

En appelant symbole principal homogène pour $|\ell| \geq 1$ de
$p(x^o,x;D_{x^o},D_x) = \sum_{i=o}^{\theta} \lambda_{\theta-i}(x^o,x;D_x)D^i_{x^o}$ l'expression
$\sigma(p) = P(x^o,x;\ell_o,\ell) = \sum_{i=o}^{\theta} \varepsilon_{\theta-i}(x^o,x;\ell)\ell_o^i$, on a :

i) $\sigma(p)$ est homogène de degré θ et unique (pour $|\ell| \geq 1$).

ii) $\sigma(p\,q) = \sigma(p)\sigma(q)$ pour $|\ell) \geq 1$ si $p \in \mathcal{O}'^{\theta}_m(\Omega)$ et $q \in \mathcal{O}'^{\theta'}_m(\Omega)$.

iii) Soit $p = \sum_{i=o}^{\theta} \lambda_{\theta-i} D^i_{x^o}$ et $q = \sum_{i=o}^{\theta} \mu_{\theta-i} D^i_{x^o}$ alors $p \underset{\theta}{\simeq} q$ (c'est-à-dire $p-q \in \mathcal{O}'^{\theta-1}_m(\Omega)$) si et seulement si $\sigma(p) = \sigma(q)$ pour $|\ell| \geq 1$ et $\lambda_o = \mu_o$.

$$\boxed{\mathcal{O}'_m(\Omega) = \bigcup_{\theta \in \mathbb{N}} \mathcal{O}'^{\theta}_m(\Omega)}$$

on dira que $p \in \mathcal{O}'^{\theta}_m(\Omega)$ est unitaire si $\lambda_o(x^o,x;D_x) = I_m$. Enfin si $p \in \mathcal{O}'^{\theta}_m(\Omega)$ et $q \in \mathcal{O}'^{\theta'}_1(\Omega)$, on a $[p,q] \in \mathcal{O}^{\theta+\theta'-1}_m(\Omega)$ si et seulement si $[\lambda_o,\mu_o] = 0$ (par exemple si p ou q unitaire).

Considérons les opérateurs $k'_1 = \dfrac{k_1}{H_1^{q'}\dots H_\sigma^{q^\sigma}(x^o,x;1,0)}$ et

$k'_2 = \dfrac{k_2}{H_1^{q'}\dots H_\sigma^{q^\sigma}(x^o,x;1,0)}$. Ils sont de la forme

$k'(x^o,x;D_{x^o},D_x) \in \mathcal{O}^{\tau}_m(\Omega) \subset \mathcal{O}'^{\tau}_m(\Omega)$ unitaire et de symbole principal diagonal
$K'(x^o,x;\ell_o,\ell) = (H'_1)^{q^1}\dots(H'_\sigma)^{q^\sigma} I_m$ où $H'_s(x^o,x;\ell_o,\ell) = \dfrac{H_s(x^o,x;\ell_o,\ell)}{H_s(x^o,x;1,0)}$.

On pose $(H'_1)^{q^1}\dots(H'_\sigma)^{q^\sigma} = \pi_\tau(x^o,x;\ell_o,\ell) = \prod_{i=1}^{\tau_\sigma} (\ell_o - p_o^i(x^o,x;\ell))^{\lambda_i}$.

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(R^n)$ qui vaut 0 pour $|\ell| \leq 1/2$ et 1 pour $|\ell| \geq 1$.

On pose $\begin{cases} \Delta_\tau(x^o,x;\ell_o,\ell) = \prod_{i=1}^{\tau_\sigma} (\ell_o - p_o^i(x^o,x;\ell)\varphi(\ell))^{\lambda_i} \\ K'_i(x^o,x;\ell_o,\ell) = \ell_o - p_o^i(x^o,x;\ell)\varphi(\ell) \quad (1 \leq i \leq \tau_\sigma) \end{cases}$

on a $\begin{cases} \Delta_\tau = \Pi_\tau \text{ et homogènes de degré } \tau \text{ pour } |\ell| \geq 1 \\ \text{les } K'_i \text{ sont homogènes de degré 1 et premiers entre eux deux à deux} \\ \text{dans } R[\ell_o] \text{ pour } |\ell| \geq 1. \end{cases}$

3) La condition de bonne décomposition pour les opérateurs $k'(x^o,x;D_{x^o},D_x)$ dans $\mathcal{O}'_m(\Omega)$. Fixons K'_o un des facteurs $K'_i (1 \leq i \leq \tau_\sigma)$. [16]

Proposition 1' : Quel que soit $k'_o \in \mathcal{O}'_1(\Omega)$ unitaire, de symbole principal K'_o (pour $|\ell| \geq 1$), il existe des opérateurs $e'_j \in \mathcal{O}'_m(\Omega)$ $(0 \leq j \leq \tau)$ et des nombres entiers β'_j $(0 \leq j \leq \tau)$ avec $\beta'_o = \lambda_o$ tels que

$$(2.1)' \qquad \begin{cases} k' = \sum_{j=o}^{\tau} e'_j (k'_o)^{\beta'_j} \\ k' \underset{\tau-j}{\sim} \sum_{\rho=o}^{j} e'_\rho (k'_o)^{\beta'_\rho} \quad \text{pour tout } 0 \leq j \leq \tau. \end{cases}$$

On a $\Delta = (K'_1)^{\lambda_1} \ldots (K'_o)^{\lambda_o} \ldots (K'_{\tau_\sigma})^{\lambda_{\tau_\sigma}} = E'_o \times (K'_o)^{\lambda_o}$. Soit e'_o de symbole $E'_o . I_m$ alors $\gamma'_1 = k' - e'_o (k'_o)^{\lambda_o} \in \mathcal{O}'^{\tau-1}_m(\Omega)$;
$\gamma'_1 = \lambda^1_o (x^o,x;D_x) D^{\tau-1}_{x^o} + \sum_{i=1}^{\tau-1} \lambda^1_i (x^o,x;D_x) D^{\tau-1-i}_{x^o}$ admet un symbole principal Γ'_1 ; en faisant la division suivant les puissances décroissantes dans $R[\ell_o]$ de Γ'_1 par K'_o, on met Γ'_1 sous la forme $\Gamma'_1 = (K'_o)^{\beta'_1} \times E'_1 (|\ell| \geq 1)$ (avec β'_1 éventuellement nul). On forme alors
$e'_1 = \lambda^1_o (x^o,x;D_x) D^{\tau-1-\beta'_1}_{x^o} + \sum_{i=1}^{\tau-1-\beta'_1} \mu^1_i D^{\tau-1-\beta'_1-i}_{x^o}$ de symbole principal E'_1.
On a $k' - e'_o (k'_o)^{\beta'_o} - e'_1 (k'_o)^{\beta'_1} \in \mathcal{O}^{\tau-2}_m(\Omega)$. (Si $\gamma'_1 \in \mathcal{O}'^{\tau-2}_m(\Omega)$, on prend $e'_1 = 0$ et β'_1 aussi grand que l'on veut et la même formule est encore valable). Après un nombre fini de telles opérations, on trouve l'expression (2.1)'.

Parallèlement au paragraphe II.1. on introduit la

Définition 2' : k' est dit bien décomposable par rapport à K'_o si les nombres β'_j introduits dans la proposition 1' vérifient les inégalités $\beta'_j \geq \beta'_o - j$. Alors l'expression (2.1)' réalise une bonne décomposition de k' par rapport à K'_o dans $\mathcal{O}'_m(\Omega)$.

et on démontre les propositions 2', 3', 4' et 5' obtenues en remplaçant $\mathcal{O}_m(\Omega)$ par $\mathcal{O}'_m(\Omega)$, k par k', h_s $(1\leq s\leq\sigma)$ par k'_i $(1\leq i\leq\tau_\sigma)$, H_s par K'_i et q^s par λ_i, e_j par e'_j $(0\leq j\leq\tau)$ enfin e^j_i par e'^j_i $(0\leq j\leq\tau; 1\leq i\leq u_j+1)$.
En particulier, la proposition 4' s'écrit :

<u>Proposition 4'</u> Si k' possède une décomposition de la forme :

$$(2.3)'\quad\begin{cases} k' = \sum_{j=o}^{\tau} e'_j\, k'_{\alpha^j_1}\, k'_{\alpha^j_2}\cdots k'_{\alpha^j_{u'_j}} \\ k'_{\tau-j} \sim \sum_{\rho=o}^{j} e'_\rho\, k'_{\alpha^\rho_1}\, k'_{\alpha^\rho_2}\cdots k'_{\alpha^j_{u'_j}} \quad (0\leq j\leq\tau)\end{cases}$$

où $u'_j = \sum_{i=1}^{\tau_\sigma} [\lambda_i - j]_+$

α^j est une bijection : $[1,\ldots,u'_j] \to [\underbrace{1,\ldots,1}_{[\lambda_1-j]_+\text{ fois}};\ldots;\underbrace{\tau_\sigma,\ldots,\tau_\sigma}_{[\lambda_{\tau_\sigma}-j]_+\text{ fois}}]$

$\alpha^j(i) = \alpha^j_i$

$k'_i \in \mathcal{O}'_1(\Omega)$ a pour symbole principal $K'_i (1\leq i\leq\tau_\sigma)$ et unitaire

$e'_j \in \mathcal{O}'_m(\Omega)$ $(0\leq j\leq\tau)$

alors k' est bien décomposable par rapport à chaque $K'_i (1\leq i\leq\tau_\sigma)$ dans $\mathcal{O}'_m(\Omega)$.

Nous allons à présent formuler une décomposition particulière du type (2.3)' de l'opérateur k'.

4) <u>k' et la condition C</u>

On considère la suite finie $(s_i)_{1\leq i\leq\chi}$ strictement croissante à valeurs dans $[1,\ldots,\sigma]$ définie par :
τ_{s_1} est le plus petit τ_s tel que $q^{s+1} < q^1, \ldots, \tau_{s_i}$ est le plus petit τ_s tel que $q^{s+1} < q^{s_{i-1}+1}$ $(2\leq i\leq x-2), \ldots, \tau_{s_{\chi-1}}$ est le plus petit τ_s tel que $q^{s+1} = q^\sigma$, $s_\chi = \sigma$.

On a $\tau_{s_1} < \tau_{s_2} < \ldots < \tau_{s_{\chi-1}} < \tau_{s_\chi} = \tau_\sigma$, $q^{s_i} = \lambda_{\tau_{s_i}}$ $(1\leq i\leq\chi)$ et

$\lambda = q^1 = \lambda_1 = \lambda_2 \; \dots \; \lambda_{\tau_{s_1}} = q^{s_1} > \lambda_{\tau_{s_1}+1} \dots \lambda_{\tau_{s_2}} = q^{s_2} > \dots > \lambda_{\tau_{s_{\chi-2}}+1} = \dots$

$= \lambda_{\tau_{s_{\chi-1}}} = q^{s_{\chi-1}} > \lambda_{\tau_{s_{\chi-1}}+1} \dots \lambda_{\tau_{s_\chi}} = q^{s_\chi} = q^\sigma$. On pose

$\rho_i = \lambda_{\tau_{s_i}} - \lambda_{\tau_{s_i}+1} = q^{s_i} - q^{s_{i+1}}$ $(1 \le i \le \chi - 1)$, $\rho_\chi = q^\sigma$. On a

$\tau = \sum_{i=1}^{\chi} \rho_i \tau_{s_i}$ et $\lambda = q^1 = \sum_{i=1}^{\chi} \rho_i$.

Pour des commodités d'écriture, on convient de poser aussi :

$$\tau_{s_{\chi+1}} = \tau_\sigma + 1, \quad \rho_{\chi+1} = 0 .$$

Soit $p_o^i(x^o,x;D_x) \in \mathcal{E}_{[0,X^o]}(S^1)$ l'opérateur pseudodifférentiel scalaire de symbole $p_o^i(x^o,x;\ell)\varphi(\ell) \in \mathcal{E}_{[0,X^o]}(S^1)$. On considère les opérateurs de $\mathcal{O}'_i(\Omega)$ suivants $\partial_i = D_{x^o} - p_o^i(x^o,x;D_x)$ $(1 \le i \le \tau_\sigma)$

$\delta_o = 1$, $\delta_1 = \partial_1$, $\delta_2 = \partial_2\partial_1, \dots, \delta_{\tau_{s_1}} = \partial_{\tau_{s_1}}\partial_{\tau_{s_1}-1}\dots\partial_2\partial_1, \delta_{\tau_{s_1}+1} =$

$\partial_1\delta_{\tau_{s_1}}, \dots, \delta_{\rho_1\tau_{s_1}} = (\delta_{\tau_{s_1}})^{\rho_1}, \delta_{\rho_1\tau_{s_1}+1} = \partial_1\delta_{\rho_1\tau_{s_1}}, \dots, \delta_{\rho_1\tau_{s_1}+\tau_{s_2}} = \partial_{\tau_{s_2}}\dots\partial_1\delta_{\rho_1\tau_{s_1}}$

$,\dots, \delta_{\rho_1\tau_{s_1}+\rho_2\tau_{s_2}} = \delta_{\rho_2\tau_{s_2}} \cdot \delta_{\rho_1\tau_{s_1}}, \dots, \delta_{\rho_1\tau_{s_1}+\dots+\rho_i\tau_{s_i}} = \delta_{\rho_i\tau_{s_i}}\dots\delta_{\rho_1\tau_{s_1}}, \dots,$

$\delta_\tau = \delta_{\rho_\chi\tau_{s_\chi}}\dots\delta_{\rho_1\tau_{s_1}} = \overline{\omega}_\tau$.

On a $k'_\tau \sim I_m\overline{\omega}_\tau$ car k' et $I_m\overline{\omega}_\tau$ sont unitaires et de même symbole principal homogène pour $|\ell| \ge 1$; $k' - I_m\overline{\omega}_\tau \in \mathcal{O}'^{\tau-1}_m$. En développant les δ_i $(1 \le i \le \tau - 1)$, on calcule de proche en proche par récurrence sur i :

$D^i_{x^o} = \delta_i + \sum_{j=1}^{i} \varepsilon^i_j(x^o,x;D_x)\delta_{i-j}$ avec $\varepsilon^i_j \in \mathcal{E}_{[0,X^o]}(\Lambda^j_1)$, et

$k' = I_m\overline{\omega}_\tau + \sum_{i=o}^{\tau-1} b_i(x^o,x;D_x)\delta_{\tau-1-i}$ avec $b_i \in \mathcal{E}_{[0,X^o]}(\Lambda^i_m)$, b_i a donc un symbole $\beta_i(x^o,x;\ell) \in \mathcal{E}_{[0,X^o]}(S^i_m)$ développable en symboles

$\beta_{i,j}(x^o,x;\ell) \in \mathcal{E}_{[0,X^o]}(S_m^{i-j})$ homogènes de degré i-j par rapport à ℓ pour $|\ell| \geq 1$ (si $\beta_i \in \mathcal{E}_{[0,X^o]}(S_m^{i-n_i})$ alors $\beta_{i,j}(x^o,x;\ell) = 0$ pour $|\ell| \geq 1$ et $0 \leq j \leq n_i - 1$; on convient de choisir alors $\beta_{i,j} \equiv 0$ pour $0 \leq j \leq n_i - 1$) : on peut écrire :

$$b_i(x^o,x;D_x) = \sum_{j=o}^{i-1} \beta_{i,j}(x^o,x;D_x) + b_i'(x^o,x;D_x)$$

avec $b_i'(x^o,x;D_x) \in \mathcal{E}_{[0,X^o]}(\Lambda_m^o)$. On pose :

$$b_{i,j}(x^o,x;D_x) = \beta_{i,j}(x^o,x;D_x) \in \mathcal{E}_{[0,X^o]}(S_m^{i-j}) \;,$$

de symbole $\beta_{i,j}(x^o,x;\ell) = b_{i,j}(x^o,x;\ell)$ pour $j = 0,\ldots,i-1$

$$b_{i,i}(x^o,x;D_x) = b_i'(x^o,x;D_x) \in \mathcal{E}_{[0,X^o]}(\Lambda_m^o) \;.$$

D'où l'expression de k' :

$$\begin{aligned} k' &= I_m \tilde{\omega}_\tau + \sum_{i=o}^{\tau-1} \sum_{j=o}^{i} b_{i,j}(x^o,x;D_x)\,\delta_{\tau-1-i} \\ &= I_m \tilde{\omega}_\tau + \sum_{j=o}^{\tau-1} \sum_{i=j}^{\tau-1} b_{i,j}(x^o,x;D_x)\,\delta_{\tau-1-i} \end{aligned}$$

<u>Définition 3</u> : k' vérifie la condition C si :

$$b_{\rho_{\chi+1}\tau_{s_{\chi+1}}+\ldots+\rho_\alpha\tau_{s_\alpha}+\beta\tau_{s_{\alpha-1}}+v,\ \rho_{\chi+1}+\ldots+\rho_\alpha+\beta-1}(x^o,x;\ell) \equiv 0$$

pour tout $1 < \alpha \leq \chi+1$, $0 \leq \beta < \rho_{\alpha-1}$, $0 \leq v \leq \tau - 1 - \rho_{\chi+1}\tau_{s_{\chi+1}} - \ldots - \rho_\alpha\tau_{s_\alpha}\beta\tau_{s_{\alpha-1}}$.

5) <u>Théorème 2</u> : Il y a équivalence entre les assertions suivantes :

i) k' vérifie la condition C.

ii) k' est bien décomposable par rapport à chaque K_i' $(1 \leq i \leq \tau_\sigma)$ dans $\mathcal{O}_m'(\Omega)$.

iii) k' est bien décomposable par rapport à chaque H_s' $(1 \leq s \leq \sigma)$ dans $\mathcal{D}_m'(\Omega)$.

iv) k' est bien décomposable par rapport à chaque H_s' $(1 \leq s \leq \sigma)$ dans $\mathcal{D}_m(\Omega)$.

v) k est bien décomposable par rapport à chaque H_s $(1 \leq s \leq \sigma)$ dans $\mathcal{D}_m(\Omega)$.

Démonstration

i) $\Rightarrow$ ii)

En effet si k' vérifie la condition C, la décomposition

$$k' = I_m \varpi_\tau + \sum_{j=o}^{\tau-1} \sum_{i=j}^{\tau-1} b_{i,j}(x^o,x;D_x)\delta_{\tau-1-i} \text{ est du type(2.3)'}.$$

ii) $\Rightarrow$ i)

On a $k' \underset{\tau-r}{\sim} I_m \varpi_\tau + \sum_{j=o}^{r-1} \sum_{i=j}^{\tau-1} b_{i,j}\,\delta_{\tau-1-i}$ $(0 \leq r \leq \tau)$ et k' étant bien décomposable par rapport à K_i' $(1 \leq i \leq \tau_\sigma)$ dans $\mathcal{O}_m'(\Omega)$, il existe des opérateurs $e_\rho' \in \mathcal{O}_m'(\Omega)$ $(0 \leq \rho \leq \tau)$ et $k_s' = \partial_s (1 \leq s \leq \tau_\sigma)$ tels que

$$k' \underset{\tau-r}{\sim} \sum_{\rho=o}^{r} e_\rho' k_1'^{(\lambda-\rho)_+} \dots k_{\tau_\sigma}'^{(\lambda_{\tau_\sigma}-\rho)_-} \qquad (0 \leq r \leq \tau).$$

La condition C se décompose en $\lambda - 1$ sous conditions car $r - 1 = \rho_{\chi+1} + \dots + \rho_\alpha + \beta - 1$ varie de 0 à $\lambda - 2$.

Démontrons par récurrence sur r que ces sous conditions sont satisfaites :

Pour $r = 1$, on a

$$I_m \varpi_\tau + \sum_{i=o}^{\tau-1} b_{i,o}\,\delta_{\tau-1-i} \underset{\tau-1}{\sim} e_o' k_1'^{\lambda_1} \dots k_{\tau_\sigma}'^{\lambda_{\tau_\sigma}} + e_1' k_1'^{(\lambda_1-1)_+} \dots k_{\tau_\sigma}'^{(\lambda_{\tau_\sigma}-1)_+}$$

D'où

$$I_m \varpi_\tau - e_o' k_1'^{\lambda_1} \dots k_{\tau_\sigma}'^{\lambda_{\tau_\sigma}} + \sum_{i=o}^{\tau_\sigma-1} b_{i,o}\,\delta_{\tau-1-i} + \sum_{i=\tau_\sigma}^{\tau-1} b_{i,o}\delta_{\tau-1-i} \underset{\tau-1}{\sim} e_1' k_1'^{(\lambda_1-1)_+} \dots k_{\tau_\sigma}'^{(\lambda_{\tau_\sigma}-1)_+}$$

Ces deux opérateurs de $\mathcal{O}_m'^{\,\tau-1}(\Omega)$ ont donc même symbole principal pour $|\ell| \geq 1$ à savoir $E_1'(K_1')^{(\lambda_1-1)_+} \dots (K_{\tau_\sigma}')^{(\lambda_{\tau_\sigma}-1)_+}$, on démontre que :

$$\left.\begin{aligned} & I_m \varpi_\tau \underset{\tau-1}{\sim} \psi_s (\partial_s)^{(\lambda_s-1)_+} \\ & e_o' k_1'^{\lambda_1} \dots k_{\tau_\sigma}'^{\lambda_{\tau_\sigma}} \underset{\tau-1}{\sim} \psi_s' (k_s')^{(\lambda_s-1)_+} \end{aligned}\right\} \quad \text{tout } s \in [1,\tau_\sigma].$$

Donc $I_m \varpi_\tau - e_o' k_1'^{\lambda_1} \dots k_{\tau_\sigma}'^{\lambda_{\tau_\sigma}}$ a un symbole principal divisible par $K_s'^{(\lambda_s-1)_+}$ pour tout $s = 1,\dots,\tau_\sigma$ et $|\ell| \geq 1$. D'autre part $\sum_{i=o}^{\tau_\sigma-1} b_{i,o}\delta_{\tau-1-i}$

a aussi un symbole principal divisible par $K_s'^{(\lambda_s-1)_+}$ pour $|\ell| \geq 1$ dans $R[\ell_o]$. On en conclut que le symbole principal de $\sum_{i=\tau_\sigma}^{\tau-1} b_{i,o}\,\delta_{\tau-1-i}$ doit être aussi divisible par $K_s'^{(\lambda_s-1)_+}$ $(s=1,\dots,\tau_\sigma)$ pour $|\ell| \geq 1$, ce qui n'est possible qu'à la condition :

$b_{i,o}(x^o,x;\ell) \equiv 0$ tout $i = \tau_\sigma,\dots,\tau-1$ qui est la première des sous-conditions de C.

On démontre de la même façon que si les r-1 premières sous-conditions sont satisfaites ($1 \leq r \leq \lambda-1$) alors la $r^{\text{ème}}$ condition l'est aussi.

k' vérifie donc la condition C.

Les équivalences avec les autres assertions se démontrent à l'aide des propositions de II.1 et II.3 [16].

6) Décomposition en opérateurs portés par les bicaractéristiques

Soit $\mathcal{M}_m$ l'ensemble des sommes finies de monômes $\omega_{j^i}.\partial_{j_1}\partial_{j_2}\dots\partial_{j_i}$ $(0 \leq i \leq \tau-1;\ \partial_{j_o} = 1)$ à coefficients à gauche les opérateurs ω_{j^i} de $\mathcal{E}_{[0,X^o]}(\Lambda_m^o)$, et $\partial_{j_1},\dots,\partial_{j_i}$ étant choisis arbitrairement dans l'ensemble

$$\{\underbrace{\partial_1,\dots,\partial_1}_{\lambda_1 \text{ fois}}\ ;\ \underbrace{\partial_2,\dots,\partial_2}_{\lambda_2 \text{ fois}};\dots;\underbrace{\partial_{\tau_\sigma},\dots,\partial_{\tau_\sigma}}_{\lambda_{\tau_\sigma} \text{ fois}}\}$$

Proposition 6 : k' vérifie la condition C si et seulement si $\omega' = k' - I_m\,\omega_\tau \in \mathcal{M}_m$. La démonstration de cette proposition est très longue et très technique [16].

§ III. RESOLUTION DU PROBLEME DE CAUCHY POUR LES OPERATEURS k' BIEN DECOMPOSABLES

Proposition 7 : Si k' est bien décomposable par rapport à $H_1',\dots,H_\sigma'$ dans $\mathcal{J}_m(\Omega)$ alors le problème de Cauchy posé par le système

(3.1) $$k'z = f' \quad \text{avec} \quad f' \in \mathcal{E}^o_{[0,X^o]}(\mathcal{D}^\infty_{L^2})^m$$

et les données de Cauchy sur l'hyperplan $x^o = 0$, notées $z_i \in [\mathcal{D}^\infty_{L^2}]^m$, $i=0,\dots,\tau-1$ admet une solution et une seule $z \in \mathcal{E}^\tau_{[0,X^o]}[\mathcal{D}^\infty_{L^2}]^m$.

Démonstration : On montre d'abord le lemme suivant :

Lemme 1 : [14] On désigne par s les monômes de $\mathcal{M}_1$ de la forme $s = \partial_{\sigma_1} \partial_{\sigma_2} \ldots \partial_{\sigma_i}$ $(0 \leq i \leq \tau - 1)$. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que

(3.2) $$\sum_{s \in \mathcal{M}_1} \| s\,u\,(x^o,.)\|_p^2 \leq C\{\sum_{s \in \mathcal{M}_1} \|su(0,.)\|_p^2 + \int_o^{x^o} \|\omega_\tau u(x'^o,.)\|_p^2 dx'^o\}$$

pour tout $u \in \mathcal{E}^\tau_{[0,X^o]}(\mathcal{D}^{p+\tau}_{L^2})$ et tout $x^o \in [0,X^o]$.

On prouve la proposition 1 en se ramenant à un problème de Cauchy à données nulles par le changement de fonctions inconnues défini par $z = \beta' + \sum_{i=o}^{\tau-1} \frac{(x^o)^i}{i!} \beta_i$. Notons ce problème :

(3.3) $$\begin{cases} k'z' = f'' \\ z'_o = \ldots = z'_{\tau-1} = 0 \end{cases}$$

on résoud d'abord le problème

(3.4) $$\begin{cases} \bar{\omega}_\tau u = f'' \\ u_o = \ldots = u_{\tau-1} = 0 \end{cases}$$

équivalent au système

(3.5) $$\begin{cases} D_{x^o} u - p_o^1(x^o,x;D_x)u = v^1 \\ D_{x^o} v^1 - p_o^2 v^1 = v^2 \\ \vdots \\ D_{x^o} v^{\tau-1} - p_o^{\tau\sigma} v^{\tau-1} = f'' \\ u_o = v'_o = \ldots = v_o^{\tau-1} = 0 \end{cases}$$

$\forall p \in R$, $f'' \in \mathcal{E}_{[0,X^o]}(\mathcal{D}^p_{L^2})^m \Rightarrow v^{\tau-1}$ existe et appartient à $\mathcal{E}^1_{[0,X^o]}(\mathcal{D}^{p-1}_{L^2})^m$ $\Rightarrow v^{\tau-2}$ existe et appartient à $\mathcal{E}^2_{[0,X^o]}(\mathcal{D}^{p-2}_{L^2})^m \Rightarrow \ldots \Rightarrow$ u existe et appartient à $\mathcal{E}^\tau_{[0,X^o]}(\mathcal{D}^{p-\tau}_{L^2})^m$ d'après S. Mizohata [8] ; on a donc une solution u de (3.4) dans $\mathcal{E}^\tau_{[0,X^o]}(\mathcal{D}^\infty_{L^2})^m$.

On résoud alors le problème (3.3) par la méthode des approximations successives avec la relation de récurrence :

(3.6) $$\begin{cases} \bar{\omega}_\tau z'^{\alpha+1} = f'' - \omega' z'^{\alpha} \qquad \alpha = 0,1,\ldots \ (z'^o = 0) \\ \text{Données de Cauchy nulles sur } x^o = 0 \end{cases}$$

Le lemme 1 assure la convergence de ce processus dans $\mathcal{E}^{\tau}_{[0,X^o]}(\mathcal{D}^{\infty}_{L^2})^m$ par une inégalité du type

$$\sum_{s\in \mathcal{M}_1} \|s(z'^{\alpha+1} - z'^{\alpha})\|_p^2 < M\frac{(c' X^o)^{\alpha}}{\alpha!}$$

D'où l'existence d'une solution z du problème (3.1). L'unicité résulte aussi du lemme 1; de plus

Proposition 8 : [14] La solution z du problème de Cauchy (3.1) vérifie l'inégalité d'énergie :

$$\sum_{j=o}^{\tau-\lambda} \|D^j_{x^o} z(x^o,.)\|^2_{p+\tau-\lambda-j} \leq C\{\sum_{j=o}^{\tau-\lambda} \|D^j_{x^o} z(0,.)\|^2_{p+\tau-1-j} + \int_o^{x^o} \|k' z(x'^o,.)\|_p^2 dx'^o\}$$

§ IV. DEMONSTRATION DU THEOREME 1

On se ramène à un problème à données nulles par un premier changement de fonctions inconnues $y = y' + \sum_{i=o}^{\tau-1} \frac{(x^o)^i}{i!} y_i$:

(4.1)
$$\begin{cases} h y' = f' \\ y'_o = \dots = y'_{\tau-1} = 0 \end{cases}$$

par le second changement de fonctions : $y' = a_1 z$ on obtient le système

(4.2)
$$\begin{cases} k_1 z = f' \\ z_o = \dots = z_{\tau-1} = 0 \end{cases}$$

équivalent à

(4.3)
$$\begin{cases} k'_1 z = \dfrac{f'}{H_1^{q'_1}\dots H_\sigma^{q^\sigma}(x^o,x;1,0)} = f'' \\ z_o = \dots = z_{\tau-1} = 0 \end{cases}$$

La proposition 7 assure une solution $z \in \mathcal{E}^{\tau}_{[0,X^o]}(\mathcal{D}^{\infty}_{L^2})^m$ à ce système et par suite une solution

$$y = a_1 z + \sum_{i=o}^{t-1} \frac{(x^o)^i}{i!} y_i \in \mathcal{E}^t_{[0,X^o]}(\mathcal{D}^\infty_{L^2})^m \text{ au système (1.1).}$$

L'unicité de la solution y dans $\mathcal{E}^t_{[0,X^o]}(\mathcal{D}^\infty_{L^2})^m$ se démontre par la méthode de Holmgren, en vérifiant que l'adjoint de l'opérateur bien décomposable $k_2 - a_2 h$ est aussi bien décomposable grâce au théorème 2 et la proposition 6 [16].

BIBLIOGRAPHIE

R. Berzin

[1] C. R. Acad. Sc., t.280 (17 Février 1975) série A, p.443 à 445.

[2] C. R. Acad. Sc., t.281 (13 Octobre 1975) série A, p.637 à 640.

I. Demay

[3] C. R. Acad. Sc., t.278 , série A, 1974, p.771.

D. Gourdin

[4] C. R. Acad. Sc., Paris, t.278, 1974, p.269-272

[5] C. R. Acad. Sc., Paris, t.282, 1976, fascicule 18.

H. Kumano-go

[6] Remarks on pseudo differential operators, J. Math. Soc. Japan, 21, 413-439 (1969).

J. Leray

[7] Hyperbolic differential equations, cours de Princeton, 1954.

S. Mizohata

[8] Systèmes hyperboliques, Journal of the Math Soc. of Japan, vol.II, n°3, july 1959.

J. C. De Paris

[9] Problèmes de Cauchy asymptotique. Lien avec l'hyperbolicité. Séminaire Goulaouic-Schwartz 1972-73, exposé 20.

V. M. Petkov

[10] Le problème de Cauchy et la propagation des singularités pour une classe des systèmes hyperboliques non symétrisables. Séminaire Goulaouic-Lions-Schwartz 1974-75, exposé 5.

J. Vaillant

[11] Annales de l'Institut Fourier, t.15, fasc. 2, 1965, p.225-311.

[12] J. Maths Pures et Appliquées, t.51, 1971, p.25 à 51.

H. Whitney

[13] Analytic extensions of differentiable functions defined inclosed sets. Trans. Am. Math. Soc. 36, 63-89 (1934).

K. Yoshida

[14] Energy inequalities and finite propagation speed of the Cauchy problem for hyperbolic equations with constantly multiple characteristics. Proc. Japan Acad. 50 (1974) p.561-565.

R. Matagne
[15] Les espaces de Silva, Bull. Soc. Royale Sciences Liège 33ème année n°12, 1964, p.754-768.

D. Gourdin
[16] A paraître.

A. Lax
[17] Communications on Pure and Applied Math. Vol.9, 1956, p.135-169.