Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

P. Charrier
B. Hanouzet
J. L. Joly

Sous-solutions pour un problème unilatéral d'évolution : caractérisation et régularité

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1975-1976), exp. nº 20, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1975-1976____A21_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91120 PALAISEAU

Téléphone : 941.81.60 - Poste N°

Télex : ECOLEX 69 15 96 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 5 - 1 9 7 6

SOUS-SOLUTIONS POUR UN PROBLEME UNILATERAL D'EVOLUTION : CARACTERISATION ET REGULARITE.

par P. CHARRIER, B. HANOUZET
et J. L. JOLY

Exposé n° XX

20 Avril 1976

§ 1. POSITION DU PROBLEME ET ENONCES DES RESULTATS

1. Notations et rappels

Soient Ω un ouvert borné très régulier de $\mathbb{R}^n$, T un nombre réel, $0 < T < +\infty$. On pose :

$$Q =]0,T[\times\Omega \quad , \quad \Sigma =]0,T[\times\partial\Omega .$$

On considère la forme intégrodifférentielle a définie par :

$$a(u,v) = \int_Q \Big(\sum_{1\le j\le n} a_{ij} D_i u\, D_j v + \sum_{1\le i\le n} a_i D_i u . v + a_o uv\Big) dx\, dt \quad ,$$

dans laquelle on suppose que $a_{ij} \in \mathcal{C}^1(\bar{Q})$, $a_i \in \mathcal{C}^o(\bar{Q})$. On suppose aussi que a est coercive sur $L^2(0,T;H^1_o(\Omega))$. On associe à la forme a l'opérateur différentiel :

$$L = \sum_{1\le \substack{i\\ j} \le n} D_j a_{ij} D_i + \sum_{1\le i\le n} a_i D_i + a_o \;,$$

et on pose :

$$E = \frac{\partial}{\partial t} + L .$$

On introduit l'espace :

$$W_t = \{u \in L^2(0,T;H^1_o(\Omega)),\ u' \in L^2(0,T;L^2(\Omega)),\ u(T) = 0\}$$

On donne :

f dans $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$,

u_o dans $L^2(\Omega)$,

f une fonction mesurable de $]0,T[$ dans $L^2(\Omega)$.

On considère les sous-solutions du problème d'obstacle (φ, f, u_o), c'est-à-dire les fonctions u appartenant à $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ et vérifiant :

$$u \leq \varphi \;.\quad u|_{\Sigma} \leq 0 \;.$$

et pour tout $w \in W_T$, $w \geq 0$,

$$-\int_Q u\frac{\partial w}{\partial t}\,dx\,dt + a(u,w) \leq \int_0^T \langle f,w\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_o^1(\Omega)}\,dt + \int_\Omega u_o w(0)\,dx \;.$$

On peut interprêter immédiatement les sous-solutions comme les fonctions de $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ vérifiant :

$$u \leq \varphi \;;\quad u|_\Sigma \leq 0 \;;\; \mathcal{E}u \leq F \;;$$

où $\mathcal{E}$ désigne l'application de $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ dans W'_T définie par :

$$\forall u \in L^2(0\ T;H^1(\Omega)), \qquad \forall\, w \in W_T \;,$$

$$\langle \mathcal{E}u,w\rangle_{W'_T,W_T} = -\int_Q u\frac{\partial w}{\partial t}\,dx\,dt + a(u,w),$$

et F est l'élément de W'_T défini par :

$$\forall\, w \in W_T\,,\ \langle F,w\rangle_{W'_T,W_T} = \int_o^T \langle f,w\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_o^1(\Omega)}\,dt + \int_\Omega u_o w(0)\,dx \;.$$

En supposant que le convexe

$$K(\varphi) = \{u \in L^2(0,T;H_o^1(\Omega));\ u' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega));u \leq \varphi\}$$

est non vide, on a le résultat suivant dû à F. Mignot et J. P. Puel [6] :

<u>Théorème</u> : Il existe une sous-solution maximum.

La présentation de ce résultat en terme de sous-solutions est donnée dans A.Bensoussan et J. L. Lions [2].

On note $\sigma(\varphi, f, u_o)$ la sous-solution maximum. On définit de même les sur-solutions pour (φ, f, u_o) et pour φ convenable, on désigne par $\tau(\varphi, f, u_o)$ la sur-solution minimum.

2. Caractérisation des sous-solutions

Pour interpréter les sous-solutions, nous utilisons les techniques d'ordre de B. Hanouzet et J. L. Joly [5]. On introduit Θ l'ensemble des élements du dual d'ordre de $H^1_o(Q)$ qui admettent un prolongement ordonné sur W_T. On a alors :

Théorème 1 : 1 - Toute sous-solution u du problème d'obstacle (φ, f, u_o) admet une trace u(0) appartenant à $(H^{1/2}_{oo}(\Omega))'$.

2 - Un élément u de $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ est une sous-solution si et seulement si :

$$\begin{array}{ll} Eu - f \in \Theta & \\ u \leq \varphi & \text{p.p. dans } Q \\ u|_\Sigma \leq f & \text{p.p. dans } \Sigma \\ Eu \leq f & \text{dans } H^{-1}(Q) \\ u(0) \leq u_o & \text{dans } (H^{1/2}_{oo}(\Omega))' \end{array}$$

3 - La trace en t = 0 de la sous-solution maximum $\sigma(\varphi, f, u_o)$ est dans $L^2(\Omega)$.

3. Estimation et régularité

On suppose que l'obstacle φ vérifie les propriétés (en plus de $K(\varphi) \neq \emptyset$) :

(1) $\varphi \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$

(2) $(E\varphi) \wedge f \in L^2(Q\,T;H^{-1}(\Omega))$.

Alors $E\varphi$ appartient à $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) + \Theta$ et on peut définir la trace $\varphi(0) \in (H^{1/2}_{oo}(\Omega))'$.

On obtient alors une estimation de la sous-solution maximum qui permet d'obtenir un résultat de régularité.

Théorème 2 : Si φ vérifie (1) (2) et $\varphi(0) \geq u_o$ alors, $\sigma = \sigma(\varphi, f, u_o)$ vérifie :

(3) $(E\varphi) \wedge f \leq E\sigma \leq f$,

(4) $\sigma(0) = u_o$,

et par suite $\frac{\partial \sigma}{\partial t}$ appartient à $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$.

Les inégalités (3) (4) généralisent à σ l'estimation analogue obtenue par P. Charrier et G. M. Troianiello [4] pour la solution forte du même problème d'obstacle, solution qui est cherchée à priori régulière en supposant que l'obstacle lui même est régulier ($E\varphi \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$). Par contre ici, nous n'imposons de régularité qu'à la partie négative de $E\psi$ quand $f = 0$ et nous trouvons a posteriori que la solution σ est régulière. Cette observation que seule importe la régularité de la variation négative du convexe des contraintes n'est pas nouvelle. On la rencontre dans un cadre un peu différent, dans J. J. Moreau [7] qui, pour son étude du problème de la rafle d'un point par un ensemble convexe mobile , remarque qu'une expansion, même brutale, dans l'évolution du convexe n'entraîne aucune singularité de la trajectoire du point mobile. Depuis cette observation a été utilisée par un certain nombre d'auteurs - en particulier H. Attouch et A. Damlamian [1], M. Biroli [3] - dans l'étude des solutions fortes de problèmes d'évolution unilatéraux.

§ 2. SCHEMA DES DEMONSTRATIONS

1. Démonstration du théorème 1

On introduit $H_o^1(Q)^*$ et W_T^* les duals d'ordre respectifs de $H_o^1(Q)$ et W_T. La restriction $\rho : W_T^* \to H_o^1(Q)^*$ est un homomorphisme de Riesz ; on note Θ l'image de W_T^* par cet homomorphisme et on désigne par $\pi : \Theta \to W_T^*$ le prolongement linéaire qui est l'homomorphisme de Riesz inverse à droite minimum de ρ. Si f est un élément positif de Θ on a :

$\forall\, v \in W_T$, $v \geq 0$,

$$\langle \pi f, v\rangle_{W_T', W_T} = \sup_{\substack{0 \leq u \leq v \\ u \in H_o^1(Q)}} \langle f, u\rangle_{H^{-1}(Q), H_o^1(Q)} .$$

Notons α_h, $0 < h < T$, la famille de fonctions définies par :

$$\begin{cases} \alpha_h(t) = \frac{t}{h} , & 0 \leq t \leq h , \\ \alpha_h(t) = 1 , & h \leq t \leq T . \end{cases}$$

Alors, si $f \in \Theta$ et si $v \in W_T$:

(5) $$\langle \pi f, v\rangle_{W'_T, W_T} = \lim_{h\to 0} \langle f, \alpha_h v\rangle_{H^{-1}(Q), H^1_o(Q)} .$$

(Pour plus de détails sur ces questions, on peut consulter [5]).
On a alors le résultat suivant :

<u>Proposition</u> : Soit $u \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$ telle que Eu appartienne à Θ.
Alors u admet une trace à l'origine $u(o) \in (H^{1/2}_{oo}(\Omega))'$ qui est définie par :

$$\forall v \in W_T , \langle \mathcal{E}u, v\rangle_{W'_T,W_T} = \langle \pi Eu, v\rangle_{W'_T,W_T} + \langle u(o), \gamma_o v\rangle_{(H^{1/2}_{oo}(\Omega))', H^{1/2}_{oo}(\Omega)}$$

et u(o) est limite faible dans $(H^{1/2}_{oo}(\Omega))'$ de $T_h u = \frac{1}{h}\int_o^h u(.,t)dt$.

En effet comme $\mathcal{E}u - \pi Eu|_{H^1_o(Q)} = 0$ on peut définir $u(o) = ({}^t\gamma_o)^{-1}(\mathcal{E}u - \pi Eu)$

où γ_o est l'application trace $v \to v(o)$ de W_T sur $(H^{1/2}_{oo}(\Omega))'$. En calculant πEu à l'aide de (5) on obtient :

$$\begin{aligned}
\langle \pi Eu, v\rangle_{W'_T,W_T} &= \lim_{h\to 0} \langle Eu, \alpha_h v\rangle_{H^{-1}(Q),H^1_o(Q)} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(-\int_Q u \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_h v)\,dx\,dt + a(u,\alpha_h v)\right) \\
&= \langle \mathcal{E}u, v\rangle_{W'_T,W_T} - \lim_{h\to 0} \int_\Omega \left(\frac{1}{h}\int_o^h u(x,t)dt\right).v(x,o)dx.
\end{aligned}$$

Plus généralement , on a le résultat suivant (obtenu par translation à partir du précédent).

<u>Proposition</u> : Pour tout élément u de $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ tel que Eu soit dans $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) + \Theta$ on peut définir une trace u(0) dans $H^{1/2}_{oo}(\Omega))'$ comme la limite faible dans cet espace de $T_h u$.
Pour tout f de $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ tel que Eu - f soit dans Θ on a la formule de Green :

$$\begin{aligned}
&\forall v \in W_T , \langle \pi(Eu - f), v\rangle_{W'_T,W_T} = -\int_Q u \frac{\partial v}{\partial t}\,dx\,dt \\
(6)\quad & + a(u,v) - \int_o^T \langle f, v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H^1_o(\Omega)} dt - \langle u(o), v(o)\rangle_{H^{1/2}_{oo}(\Omega))', H^{1/2}_{oo}(\Omega)} .
\end{aligned}$$

Remarque : Si de plus u appartient à $L^\infty(0,T,L^2(\Omega))$ alors la trace $u(0)$ est dans $L^2(\Omega)$.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 1.

Soit u une sous-solution, alors $\mathcal{E}u - F$ est un élément négatif de W_T' donc appartient à W_T^*. Par suite $\rho(\mathcal{E}u - F) = Eu - f$ appartient à Θ. On peut donc définir la trace $u(0)$ dans $(H_{oo}^{1/2}(\Omega))'$.

En utilisant la formule de Green (6) on obtient pour tout $v \in W_T$, $v \geq 0$:

$$<\pi(Eu - f), v>_{W_T', W_T} + <u(o) - u_o, v(o)>_{(H_{oo}^{1/2}(\Omega))', H_{oo}^{1/2}(\Omega)} \leq 0$$

Remplaçant v par $(1 - \alpha_h)v$ et passant à la limite, on obtient pour tout $v \in W_T$, $v \geq 0$:

$$<u(o) - u_o,\ v(o)>_{(H_{oo}^{1/2}(\Omega))', H_{oo}^{1/2}(\Omega)} \leq 0$$

donc $u(o) \leq u_o$.

La réciproque est immédiate à partir de (6).

Pour montrer la dernière partie du théorème, nous utilisons un résultat de [6] : $\sigma(\varphi, f, u_o)$ appartient à $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ et par suite, d'après la remarque qui précède, $\sigma(0)$ appartient à $L^2(\Omega)$.

2. Démonstration du théorème 2

Les hypothèses faites sur φ :

$$\varphi \in L^2(0,T;H^1(\Omega)),$$
$$\varphi \geq v_o\ ,\ v_o \text{ régulière},$$
$$E\varphi \geq (E\varphi) \wedge f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)),$$

permettent de montrer que $E\varphi - (E\varphi) \wedge f$ est dans Θ, il suffit pour cela (cf. [5]) de vérifier que :

$$\forall v \in W_T\ ,\quad v \geq 0,\quad \sup_{h > o} <E\varphi - (E\varphi) \wedge f, \alpha_h v>_{H^{-1}(Q), H_o^1(Q)} < +\infty\ .$$

On peut donc définir $\varphi(0)$ dans $(H_{oo}^{1/2}(\Omega))'$.

Pour montrer (3) et (4) on reprend le plan d'une démonstration donnée par U. Mosco des inégalités analogues dans le cas stationnnaire. On se ramène d'abord par translation au cas où $f = 0$ et $u_o = 0$. L'idée est ensuite de montrer que σ, sous-solution maximum pour $(\varphi, 0, 0)$. est égale à la sur-solution minimum pour $(\sigma, (E\varphi) \wedge 0, 0)$.

1) $\sigma = \sigma(\varphi, 0, 0)$ étant un obstacle convenable (il existe une fonction régulière au-dessus de σ, cf. [6]) on peut définir $\tau = \tau(\sigma, (E\varphi) \wedge 0, 0)$. Mais d'après (1), (2) et $\varphi(0) \geq 0$, φ est une sur-solution pour $(\sigma, (E\varphi) \wedge 0, 0)$ donc $\tau \leq \varphi$.

2) Comme $K(\tau)$ est non vide, on définit $\bar{\sigma} = \sigma(\tau, 0, 0)$. Comme $\tau \leq \varphi$, on a $\bar{\sigma} \leq \sigma$. Mais d'autre part σ est une sous-solution pour $(\tau, 0, 0)$ donc $\sigma = \bar{\sigma}$.

3) Montrons enfin que $\sigma = \tau$. On utilise ici les techniques de [6]. On sait que $\bar{\sigma}$ est limite faible dans $L^2(0,T:H_o^1(\Omega))$ des solutions des problèmes pénalisés :

$$\begin{cases} Ev^{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}(v_{\varepsilon} - \tau)^{+} = 0 \\ v_{\varepsilon}(0) = 0 \end{cases}$$

D'autre part :

$$\forall\, v \in L^2(0,T;H_o^1(\Omega)) \text{ tel que } v' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \text{ et } v \geq \sigma \quad ,$$

on a :

$$\int_Q (v-\tau)\frac{\partial v}{\partial t}\,dx\,dt + a(\tau, v-\tau) + \frac{1}{2}\,|v(o)|^2_{L^2(\Omega)} \geq$$

$$\int_o^T \langle (E\varphi) \wedge 0, v-\tau \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_o^1(\Omega)}\, dt \; .$$

Comme on peut prendre v_{ε} pour fonction test, on obtient :

$$a(v_{\varepsilon}-\tau, v_{\varepsilon}-\tau) + \frac{1}{\varepsilon}\int_Q (v_{\varepsilon}-\tau)^{+}(v_{\varepsilon}-\tau)\,dx\,dt \leq -\int_o^T \langle (E\varphi) \wedge 0, v_{\varepsilon}-\tau \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_o^1(\Omega)}\, dt$$

et par suite : $a(\bar{\sigma}-\tau, \bar{\sigma}-\tau) \leq 0$.

Donc $\overline{\sigma} = \tau$ $(= \sigma)$. On obtient donc par le théorème 1 :

$$(E\varphi) \wedge 0 \leq E\sigma$$
$$0 \leq \sigma(0)$$

d'où (3) et (4).

(3) montre alors que $E\sigma$ est dans $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ et on obtient le résultat de régularité.

Remarques : 1. Dans le théorème 2, on peut remplacer l'hypothèse $\varphi(0) \geq u_o$ par $\varphi(0) \wedge u_o \in L^2(\Omega)$; alors

$$\sigma(\varphi, f, \varphi(0) \wedge u_o) = \sigma(\varphi, f, u_o)$$

et (4) devient :

$$\sigma(0) = \varphi(0) \wedge u_o .$$

2. Si on suppose que l'adhérence dans $L^2(0,T;H_o^1(\Omega))$ de $K(\varphi)$ est égale à l'ensemble $\{v \in L^2(0,T;H_o^1(\Omega));\ v \leq \varphi\}$ alors σ est solution forte de (φ, f, u_o) (cf. [4]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Attouch et A. Damlamian : Solutions fortes d'inéquations variationnelles d'évolution.

[2] A. Bensoussan et J. L. Lions : Ouvrage à paraître.

[3] M. Biroli : Solutions faibles des inéquations d'évolution avec convexes dépendant du temps. C. R. Acad. Sc. Paris, 280, série A, 1975, p.1209 .

[4] P. Charrier et G. M. Troianiello : Un résultat d'existence et de régularité pour les solutions fortes d'un problème unilatéral d'évolution avec obstacle dépendant du temps. C. R. Acad. Sc. Paris, 281, série A, 1975, p.621.

[5] B. Hanouzet et J. L. Joly : Méthodes d'ordre dans l'interprétation de certaines inéquations variationnelles. C. R. Acad. Sc., Paris, 281, série A, 1975, p.373 et à paraître.

[6] **F. Mignot et J. P. Puel** : Solution maximum de certaines inéquations d'évolution paraboliques et inéquations quasi variationnelles paraboliques; C. R. acad. Sc., Paris, 280, série A, 1975, p.259.

[7] **J. J. Moreau** : Rétraction d'une multiapplication. Séminaire d'analyse convexe, Montpellier, 1972, exposé n° 13.
