A. Grigis

Caractérisation d’opérateurs pseudodifférentiels et applications (d’après R. Beals)

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1975-1976), exp. n° 19, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1975-1976____A20_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU 91120 PALAISEAU

Teléphone . 941.81.60 Poste N°

Télex : ECOLEX 69 15 96 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 5 - 1 9 7 6

CARACTERISATION D'OPERATEURS PSEUDODIFFERENTIELS ET APPLICATIONS,

(d'après R. Beals)

par A. GRIGIS

Exposé n° XIX 13 Avril 1976

Nous donnons ici une vue des principaux résultats de [0], récent article de R. Beals. Notre but a été de montrer le résultat 3) ci-dessous, aussi avons nous parfois restreint la généralité des développements de l'article.

Voici les questions auxquelles R. Beals donne une réponse positive .

1) Dans [6], A. P. Calderon et R. Vaillancourt ont montré que les opérateurs pseudo-différentiels sur $\mathbb{R}^n$ ayant un symbole dans $S^o_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ sont continus $L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$; Beals et Fefferman ont étendu ce résultat à des classes plus générales : $S^o_{\Phi,\varphi}$ ([1],[2],[3]).

On peut se poser le problème suivant : étant donné un opérateur linéaire continu : $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, peut-on dire s'il est un opérateur pseudodifférentiel à symbole dans $S^o_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ (resp $S^o_{\Phi,\varphi}$) en considérant les propriétés de continuité L^2 de ses commutateurs avec $D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$ et la multiplication par $i\,x_j$.

2) Soit P un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 1, admettant une paramétrixe dans $S^o_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$, et Q un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 0.

Est -ce que $P+\varepsilon Q$ admet une paramétrixe pour ε suffisamment petit ?

Plus généralement : un opérateur de $\mathcal{L}^o_{(\Phi,\varphi)}$ qui est un isomorphisme de L^2, admet-il un inverse dans $\mathcal{L}^o_{(\Phi,\varphi)}$?

3) Dans [9], L. Hörmander caractérise les opérateurs pseudo-différentiels d'ordre m à caractéristiques doubles (vérifiant la condition dite "du cône") qui sont hypoelliptiques avec perte d'une dérivée. Il donne des conditions algébriques pour qu'on ait

$$\forall\, K \text{ compact } \quad \forall\, s\ , \quad \exists\, C(K,s) \quad \forall u \in \mathcal{D}_K \quad \|u\|^2_{m-1} \leq C(K,s)(\|Pu\|^2_o + \|u\|^2_{-s}) \ .$$

Lorsque le symbole principal de P s'annule exactement à l'ordre 2 sur une surface régulière (P est dit "transversalement elliptique") il est montré dans [5] que les conditions algébriques de [7], [9] sont suffisantes pour l'existence d'une paramétrixe dans la classe de Boutet de Monvel [4], et qui est en particulier dans $\mathcal{L}^{1-m}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$.

La question est de savoir si c'est encore le cas dans la situation générale ou se place L. Hörmander.

Donc, en résumé, R. Beals établit le lien entre l'existence d'une estimation à priori, et celle d'une paramétrixe.

§ 1. CARACTERISATION DES OPERATEURS DE TYPE $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

On appelle symbole une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \{(x,\xi)\}$. Si a est un symbole, on note

$$a^{(\alpha)}_{(\beta)} = \partial_x^{(\beta)} D_\xi^{(\alpha)} a$$

A l'aide d'un symbole on peut définir un opérateur pseudodifférentiel par

(1.1) $$Au(x) = \int e^{ix\xi} a(x,\xi)\hat{u}(\xi)\,d'\xi$$

$$x.\xi = \Sigma x_j \xi_j \qquad d'\xi = (2\pi)^{-n} d\xi$$

$$\hat{u}(\xi) = \int e^{-ix\xi} u(x)\,dx$$

La formule (1.1) a un sens si $\hat{u} \in \mathcal{E}'$. En particulier on retrouve le symbole

$$a(x,\xi) = e_{-\xi}(x)(A\, e_\xi)(x) \; ; e_\xi(x) = e^{ix\xi} .$$

Nous considérons d'abord les opérateurs de type $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ définis par L. Hörmander [8].

<u>Définition (1.2)</u> : $m \in \mathbb{R}$, $S^m_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ est l'espace des symboles a tels que chaque semi-norme

$$P_{\alpha,\beta}(a) = \sup \langle\xi\rangle^{-m+\frac{|\alpha|-|\beta|}{2}} \left|a^{(\alpha)}_{(\beta)}(x,\xi)\right|$$

soit finie $(\langle\xi\rangle = (1+|\xi|^2)^{1/2})$.

Muni de ces semi-normes $S^m_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ est un espace de Fréchet. On note $\mathcal{L}^m_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ l'espace des opérateurs pseudodifférentiels correspondants. On sait définir la composition et l'adjoint. Les opérateurs de $\mathcal{L}^m_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ sont continus $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$ et s'étendent en des opérateurs continus $\mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$. Pour les espaces de Sobolev ordinaires on a d'après [6] la continuité

$$A \in \mathcal{L}^m_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$$

$$A : H^{s+m} \to H^s \qquad \forall s \in \mathbb{R}.$$

<u>Caractérisation</u> : Notons x_j la multiplication par la fonction coordonnée x_j et $D_j = -i\,\partial/\partial x_j$.

Pour $B : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$, on définit

$$L_jB = [ix_j, B] = ix_jB - iBx_j$$

$$M_jB = [D_j, B] = D_jB - BD_j$$

Si $\alpha, \beta \in (\mathbb{Z}_+)^n$ sont des multi-indices, on pose

$$B^{(\alpha)}_{(\beta)} = L_1^{\alpha_1} \ldots L_n^{\alpha_n} M_1^{\beta_1} \ldots M_n^{\beta_n} B$$

bien sûr $B^{(o)}_{(o)} = B$.

<u>Théorème (1.3)</u> : Une application linéaire $B : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ est dans $\mathcal{L}^o_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ si et seulement si, pour tous $\alpha, \beta \in (\mathbb{Z}_+)^n$, l'opérateur $B^{(\alpha)}_{(\beta)}$ a une extension continue :

$$H^{\frac{|\beta|-|\alpha|}{2}} \to H^o = L^2 .$$

Preuve : La condition est nécessaire car si $B = b(x,D)$ est dans $\mathcal{L}^{o}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$, $B^{(\alpha)}_{(\beta)}$ appartient à $\mathcal{L}^{\frac{|\beta|-|\alpha|}{2}}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ et a pour symbole $b^{(\alpha)}_{(\beta)}$.

Réciproquement nous supposons que les $B^{(\alpha)}_{(\beta)}$ remplissent les conditions ci-dessus. Nous cherchons d'abord une écriture formelle du symbole b, écriture valable par exemple si B est continu : $\mathcal{S}' \to \mathcal{S}$.

Soit $g \in \mathcal{S}$, $g(0) = 1$, telle que $\hat{g}$ ait son support contenu dans $|\xi| \leq 1$ et $g(x) = g(-x)$.

Posons $g_x(y) = g(y-x)$. Si $u \in \mathcal{S}$, on a

$$u(x) = u(x)g_x(x) = \iint e^{i(x-y)\xi} g_x(y)u(y)\,dy\,d\xi$$

$$= \iint e^{-iy\xi} e_\xi(x) g_y(x)\,dy\,d\xi$$

Donc formellement on obtient

$$Bu(x) = \iint e^{-iy\xi} B(e_\xi g_y)(x)\, u(y)\, dy\, d\xi$$

$$= \iint e^{i(x-y)\xi} b_o(x,y,\xi) u(y)\,dy\, d\xi$$

$$= \int e^{ix\xi} b(x,\xi)\hat{u}(\xi)\,d\xi .$$

ou

$$b_o(x,y,\xi) = e_{-\xi}(x)\, B(e_\xi\, g_y)(x)$$

et

$$b(x,\xi) = \iint e^{i(x-y)(\eta-\xi)} b_o(x,y,\eta)\,d\eta\, dy \tag{1.4}$$

Maintenant, les conditions sur $B^{(\alpha)}_{(\beta)}$ permettent d'obtenir des estimées L^2 pour b_o considérée comme fonction de x dépendant des paramètres y et ξ. Si on note $\|\ \|_s$ la norme dans H^s on obtient par récurrence

$$\|D^\beta_x\, D^\gamma_y\, D^\alpha_\xi\, b_o\| \leq C_{\alpha\beta\gamma} \sum_{|\delta|+m=|\beta|-|\alpha|} \|e_\xi\, D^\delta g_y\|_{\frac{m}{2}}$$

Sachant que $\hat{g}$ est à support compact, il vient

$$\| D_x^\beta D_y^\gamma D_\xi^\alpha b_o \| \leq C'_{\alpha\beta\gamma} <\xi>^{\frac{|\beta|-|\alpha|}{2}} \quad .$$

On considère en tant que fonction de x,ξ, $b_1(x,\xi,y,\xi_o) = b_o(<\xi_o>^{-\frac{1}{2}}x, <\xi_o>^{\frac{1}{2}}\xi, y)$ dans $U(\xi_o) = \mathbb{R}^n \times V_c(\xi_o)$ ou $V_c(\xi_o)$ est la boule de centre ξ_o et de rayon c où c est une constante assez petite. On obtient pour b_1 et ses dérivées, des majorations L^2, indépendantes de y et de ξ_o. On en déduit donc des majorations L^∞ dans $\mathbb{R}^n \times V_{\frac{c}{2}}(\xi_o)$ et en revenant à b_o.

$$|D_x^\beta D_y^\gamma D_\xi^\alpha b_o| \leq C''_{\alpha\beta\gamma} <\xi>^{\frac{|\beta|-|\alpha|}{2}} \quad . \tag{1.5}$$

Si B est continu $\mathcal{S}' \to \mathcal{S}$, les calculs menant à (1.4) sont corrects et le lemme 4.5 de [2] nous donne à la suite de (1.5)

$$|b_{(\beta)}^{(\alpha)}| \leq C_{\alpha\beta} <\xi>^{\frac{|\beta|-|\alpha|}{2}}$$

les constantes $C_{\alpha\beta}$ dépendent seulement des normes des opérateurs $B_{(\beta)}^{(\alpha)}$.

Dans le cas général, on approxime B par des opérateurs continus $\mathcal{S}' \to \mathcal{S}$.

Soit $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ égale à 1 au voisinage de l'origine. Pour $0 < \varepsilon \leq 1$, on pose

$$p_\varepsilon(x,\xi) = h(\varepsilon x) \qquad q_\varepsilon(x,\xi) = h(\varepsilon\xi)$$

$$P_\varepsilon = p_\varepsilon(x,D) \qquad Q_\varepsilon = q_\varepsilon(x,D) \qquad B_\varepsilon = P_\varepsilon B Q_\varepsilon \quad .$$

Les opérateurs B_ε sont régularisants et leurs symboles b_ε convergent dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ vers un symbole b de $\mathcal{L}^o_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$. Si $u \in \mathcal{S}$.

$$b(x,D)u = \lim_{\varepsilon \to 0} B_\varepsilon(x,D)u = Bu \quad .$$

La démonstration montre que les noyaux des opérateurs $B^{(\alpha)}_{(\beta)}$ définissent la même topologie sur $\mathcal{L}^{o}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ que les semi-normes des symboles.

Remarque (1.6) : En fait on peut démontrer le même résultat pour les opérateurs de $\mathcal{L}^{m}_{\rho,\rho}$ $0 \leq \rho < 1$ et pour des opérateurs plus généraux opérant dans des espaces de Sobolev avec poids.

§ 2. OPERATEURS DE TYPE (Φ,φ)

Nous considérons ici $\Phi,\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ une paire de fonctions poids au sens de [2] d'un type très simple mais qui nous suffira pour les applications.

Nous supposons que Φ et φ sont de classe C^1 (en fait on peut toujours trouver $\hat{\Phi}$ et $\hat{\varphi}$, $\mathcal{C}^{\infty}$ équivalentes à Φ,φ c'est à dire définissant les mêmes espaces), que $\Phi/\varphi = \langle\xi\rangle$, et qu'il existe des constantes c et C telles que

(2.1) $$c\Phi \leq \langle\xi\rangle \leq C\Phi^2$$

(2.2) $$|\nabla_{\xi}\Phi| \leq C, \quad |\nabla_{x}\Phi| \leq C\langle\xi\rangle$$

Ceci suffit pour affirmer que Φ, φ sont des fonctions poids (voir [2] 1.9).

Définition (2.3) : $M,m \in \mathbb{R}$, $S^{M,m}(\Phi,\varphi)$ est l'espace des symboles a tels que chaque semi-norme

$$p_{\alpha\beta}(a) = \sup|a^{(\alpha)}_{(\beta)}\Phi^{-M+|\alpha|}\varphi^{-m+|\beta|}|$$

soit finie.

C'est un espace de Fréchet, on définit les opérateurs correspondants $(\mathcal{L}^{M,m}(\Phi,\varphi))$ et les espaces de Sobolev associés $H^{K,k}$, tout comme au paragraphe 1.

(2.4) Notons qu'étant donné 4 réels M,m,K,k il existe $A \in \mathcal{L}^{M,m}$ isomorphisme topologique

$$A : H^{M+K,m+k} \to H^{K,k} \quad ,$$

Comme au 1 nous pouvons énoncer le théorème :

Théorème (2.5) : Une application linéaire $B : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ est dans $\mathcal{L}^{o,o}$ si et seulement si, pour tous $\alpha,\beta \in (Z_+)^n$ l'opérateur $B^{(\alpha)}_{(\beta)}$ a une extension continue $H^{-|\alpha|,-|\beta|} \to L^2$.

Preuve : La condition est nécessaire car si $B = b(x,D)$ est dans $\mathcal{L}^{o,o}$, alors $B^{(\alpha)}_{(\beta)}$ appartient à $\mathcal{L}^{-|\alpha|,-|\beta|}$ et a pour symbole $b^{(\alpha)}_{(\beta)}$.

Pour démontrer la réciproque, nous commençons par remarquer :

$$\Phi \geq \langle\xi\rangle^{1/2} \qquad \varphi \geq \langle\xi\rangle^{-1/2}$$

Si on note que $H^{\frac{|\beta|-|\alpha|}{2}} \subset H^{-|\alpha|,-|\beta|}$ on voit que B satisfait les conditions du théorème (1.3) donc que $B = b(x,D)$ avec $b \in S^{o}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$.

Ceci prouve le cas $N = 0$ de l'assertion

$$(*)_N \qquad |b^{(\alpha)}_{(\beta)}| \leq C_{\alpha\beta N}(\Phi\varphi)^{-\frac{N}{2}} \langle\xi\rangle^{\frac{|\beta|-|\alpha|}{2}} \quad \text{pour } |\alpha - \beta| = N$$

Supposons $(*)_N$ démontrée pour $N = M-1 \geq 0$ et supposons $|\alpha' + \beta'| = M$. Soit $b' = b^{(\alpha)}_{(\beta)}$ $a' = \Phi^{|\alpha'|}\varphi^{|\beta'|}$ et soit B', A' les opérateurs correspondants.

Alors

$$(B'A')^{(\alpha)}_{(\beta)} = \Sigma\binom{\alpha}{\beta}\binom{\gamma}{\delta}B^{(\alpha'-\gamma+\alpha)}_{(\beta'-\delta-\beta)}\,A'^{(\gamma)}_{(\delta)}$$

Vu les hypothèses sur B et la définition de A' on a

$$(B'A')^{(\alpha)}_{(\beta)} : H^{-|\alpha|,-|\beta|} \to L^2$$

et donc $B'A' \in \mathcal{L}^{o}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$.

D'après le calcul symbolique pour les opérateurs de type $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ B' A' a pour symbole p avec

$$p - a'b' - \sum_{o<|\alpha|<N} (\alpha!)^{-1} b'^{(\alpha)} a'_{(\alpha)} \in S^{o}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} .$$

Vu l'hypothèse de récurrence, on en déduit que $a'b' \in S^{o}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$. Et de

$$(a'b')^{(\alpha)}_{(\beta)} = \Sigma \binom{\alpha}{\beta}\binom{\gamma}{\delta} b^{(\alpha'-\gamma+\alpha)}_{(\beta'-\delta+\beta)} a'^{(\gamma)}_{(\delta)}$$

on déduit

$$|b^{(\alpha'+\alpha)}_{(\beta'+\beta)}| \leq C_{\alpha\beta}(a')^{-1} \langle\xi\rangle^{\frac{|\beta|-|\alpha|}{2}} = C_{\alpha\beta}(\Phi\varphi)^{-N/2} \langle\xi\rangle^{\frac{|\beta+\beta'|-|\alpha+\alpha'|}{2}}$$

donc on a prouvé $(^*)_M$ et donc $(^*)_N$ pour tout $N \geq 0$.

Enfin étant donné α, β posons $N = (\alpha+\beta)$ et appliquons $(^*)_N$

$$|b^{(\alpha)}_{(\beta)}| \leq C_{\alpha\beta_N}(\Phi\varphi)^{-\frac{N}{2}} \langle\xi\rangle^{\frac{|\beta|-|\alpha|}{2}} = C_{\alpha\beta N}\, \Phi^{-|\alpha|}\varphi^{-|\beta|} .$$

cqfd.

Nous considérons maintenant des opérateurs pseudo-différentiels qui sont des isomorphismes topologiques entre espaces de Sobolev.

<u>Lemme (2.6)</u> : Si $A \in \mathcal{L}^{o,o}$ est un isomorphisme topologique en tant qu'opérateur de $L^2 = H^{o,o}$, alors c'est un isomorphisme topologique dans $H^{M,m}$ pour tout $M,m \in \mathbb{R}$.

<u>Preuve</u> : Nous considérons d'abord le cas $m = -M$. Nous pouvons supposer $M \geq 0$ (le cas $M < 0$ s'obtenant par passage à l'adjoint). Nous allons montrer que si $(^*)_{M,m}$ A est un isomorphisme topologique dans $H^{M,m}$ est vrai pour $-m = M \geq 0$ alors $(^*)_{N,-N}$ est vrai si $M \leq N \leq M + \frac{1}{2}$.

On sait que A est continu dans $H^{N,-N}$ et qu'il est injectif (car $H^{N,-N} \subset H^{M,-M}$). Soit $v \in H^{N,-N}$, et $u \in H^{M,-M}$ tel que $Au = v$.

Soit $P \in \mathcal{L}^{\varepsilon,-\varepsilon}_{N,-N}$ ayant pour symbole $\langle\xi\rangle^{\varepsilon} = \Phi^{\varepsilon}_{M,-M}\varphi^{-\varepsilon}$ ou $\varepsilon = N - M \leq \frac{1}{2}$.
P est un isomorphisme topologique de H sur H . D'après (2.3) on voit que $[A,P] = AP - PA$ est dans $\mathcal{L}^{\varepsilon - \frac{1}{2}, -\varepsilon + \frac{1}{2}} \subset \mathcal{L}^{o,o}$

$$Pu = PA^{-1}v = A^{-1}Pv + A^{-1}[A,P]A^{-1}v \in H^{M,-M} .$$

Donc $u \in H^{N,-N}$ et A est surjective comme opérateurs dans $H^{N,-N}$.

On finit la démonstration en montrant que $(*)_{K,k}$ implique $(*)_{K+\varepsilon\,,\,k+\varepsilon}$ pour tout ε , $0 \leq \varepsilon \leq 1$, à l'aide d'un opérateur $Q \in \mathcal{L}^{\varepsilon,\varepsilon}$ isomorphisme topologique de $H^{K+\varepsilon,k+\varepsilon}$ sur $H^{K,k}$.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème fondamental.

Théorème (2.7) : Supposons que $A \in \mathcal{L}^{o,o}$ soit un isomorphisme topologique de $L^2 = H^{o,o}$. Alors l'inverse est dans $\mathcal{L}^{o,o}$.

Preuve : Soit B l'inverse. Si P opère $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$ et $\mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ (comme D_j ou ix_j), alors

$$L_p B = [P,B] = B[A,P]B$$

Donc les opérateurs $\beta^{(\alpha)}_{(\beta)}$ s'expriment comme combinaisons linéaires de produits de la forme

$$B\pi(A^{\alpha(j)}_{\beta(j)}\ B) \quad \Sigma\alpha(j) = \alpha \quad \Sigma\,\beta(j) = \beta.$$

Les opérateurs $A^{\alpha(j)}_{\beta(j)}$ sont continus de $H^{M-|\alpha(j)|,m-|\beta(j)|}$ dans $H^{M,m}$ et le lemme montre que B (inverse de A) est un isomorphisme topologique de $H^{M,m}$. Donc $B^{(\alpha)}_{(\beta)}$ est continu $H^{-|\alpha|,-|\beta|}$ dans L^2 et par le théorème (2.5) B est dans $\mathcal{L}^{o,o}$.

Remarque (2.8) : En utilisant des isomorphismes entre espaces de Sobolev (2.4), on entend de suite le théorème à un opérateur de $\mathcal{L}^{M,m}$ isomorphisme de $H^{K+M,k+m}$ sur $H^{K,k}$.

§ 3. PARAMETRIXES

Théorème (3.1) : Soit P un opérateur aux dérivées partielles (différentiel) d'ordre $m \geq 2$ à coefficients dans $\mathcal{C}^\infty(\pi)$, π ouvert de $\mathbb{R}^n$. On suppose que son symbole p_m s'annule à l'ordre 2 au moins en tout point de la variété caractéristique :

$$\Sigma = \{(x,\xi) : p_m(x,\xi) = 0 \quad \xi \neq 0\},$$

et qu'il existe un cône Γ convexe propre tel que pour tout $(x,\xi) \in \pi \times \mathbb{R}^n$, $p_m(x,\xi)$ appartienne à Γ. Supposons que pour chaque compact $K \subset \pi$, $\forall s \in \mathbb{R}$, il existe une constante $C_{(K,s)}$ tel que

(3.2) $$\|u\|_{m-1} \leq C_{(K,s)}(\|Pu\| + \|u\|_{-s}) \quad u \in \mathcal{D}_K .$$

Alors P a une paramétrixe à gauche dans $S^{1-m}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$.

Preuve : L'hypothèse du cône permet de montrer

(3.3) $$|p_m^{(\alpha)}|^2 \leq C\,|p_m|\,\langle\xi\rangle^{m-2} \quad |\alpha| = 1$$

$$|p_{m_{(\beta)}}|^2 \leq C\,|p_m|\,\langle\xi\rangle^{m} \quad |\beta| = 1 \qquad \langle\xi\rangle = (1 + |\xi|^2)^{1/2}$$

(C constante convenable)

On peut alors montrer que (3.2) implique l'hypoellipticité avec perte d'une dérivée de P (voir [7]). D'ailleurs, Hörmander ([7]) donne des conditions algébriques sur P, faisant intervenir le symbole sous-principal, pour que (3.2) soit vérifiée.

Nous construisons des fonctions poids.

Soit $a(x,\xi) = |p_m(x,\xi)| + \langle\xi\rangle^{m-1}$

$\Phi = [a\langle\xi\rangle^{2-m}]^{1/2} \qquad \varphi = \Phi\langle\xi\rangle^{-1}$

Alors $\Phi\varphi^{-1} = \langle\xi\rangle$ et $\Phi \geq \langle\xi\rangle^{1/2}$ donc $\varphi \geq \langle\xi\rangle^{-1/2}$

et aussi $\Phi\varphi = a\langle\xi\rangle^{1-m} \geq 1$.

Les estimées (3.3) et (3.4) montrent

$$|\Phi^{(\alpha)}_{(\beta)}| \leq C\,\Phi^{1-|\alpha|}\,\varphi^{-|\beta|} \qquad |\alpha+\beta| = 1$$

$$|\varphi^{(\alpha)}_{(\beta)}| \leq C\,\varphi^{1-|\beta|}\,\Phi^{-|\alpha|} \qquad |\alpha+\beta| = 1 .$$

Ceci montre que Φ et φ sont des fonctions poids locales (qu'on peut prolonger à $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$). D'autre part on voit aisément que $P \in \mathcal{L}^{m,2-m}(\pi)$.

La proposition (9.11) de [2] montre qu'une norme admissible sur $H^{m,2-m}$ est donnée par $\|Pu\| + \|u\|_{m-1}$. Donc on obtient

$$\forall K \subset \pi \qquad \forall s \in \mathbb{R} \qquad \exists\, C(K,s)$$

$$\|u\|_{m,2-m} \leq C(\|Pu\| + \|u\|_{-s}) \qquad u \in \mathcal{D}_K .$$

Soit π_o un ouvert relativement compact dans π_1. Soit une fonction $\varphi \geq 0$, $\varphi \in \mathcal{D}(\pi_1)$ $\varphi \equiv 1$ sur π_o . Posons $\hat{P} = P\varphi$. On a donc

$$\|\varphi u\|^2_{m,2-m} \leq C((\hat{P}^* \hat{P}u,u) + (S^* Su,u) \qquad u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

où S est compact de $H^{m,2-m}$ dans L^2 .
Soit R un isomorphisme $H^{m,2-m} \to L^2$.
Soit S l'opérateur pseudodifférentiel de symbole $(1+\xi^2)^{-\frac{s}{2}}$.
On obtient

$$\|u\|^2_{m,2-m} \leq C(\hat{P}^* \hat{P}u,u) + (S^* Su,u)) + ((1-\varphi)R^* Ru,u) + (\varphi R^* R(1-\varphi)u,u)$$

soit

$$\|u\|^2_{m,2-m} \leq C'(Qu,u).$$

Donc Q est un isomorphisme topologique de $H^{m,2-m}$ sur $H^{-m,m-2}$ et d'après le théorème (2.7), il a un inverse $Q^{-1} \in \mathcal{L}^{-2m,2m-4}$. Si on se restreint à π^o, on obtient

$$Q^{-1}(P^* P + S^* S) \equiv I$$

soit $(Q^{-1}P^*)P \equiv I - Q^{-1}S^* S$.

Or $Q^{-1}S^*S$ est d'ordre strictement négatif, c'est-à-dire appartient à $\mathcal{L}^{-\varepsilon}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$, $\varepsilon > 0$.

Donc la série de Neumann donne une paramétrixe à gauche pour P.

cqfd.

BIBLIOGRAPHIE

[0] R. Beals : Characterization of pseudodifferential operators and applications, à paraître.

[1] R. Beals : Spatially inhomogeneous pseudodifferential operators II C.P.A.M. 27 (1974) 161-205.

[2] R. Beals : A general calculus of pseudodifferential operators. Duke Math. J. 42 (1975) 1-42.

[3] R. Beals and C. Fefferman : Spatially inhomogeneous pseudodifferential operators I. C.P.A.M. 27 (1974) 1-24.

[4] L. Boutet de Monvel : Hypoelliptic operators with double characteristics and related pseudodifferential operators. C.P.A.M. 27 (1974) 585-639.

[5] L. Boutet de Monvel, A. Grigis et B. Helffer : Parametrixes d'opérateurs pseudodifferentiels à caractéristiques multiples. A paraître dans Astérisque.

[6] A. P. Calderon and R. Vaillancourt : On the boundedness of pseudodifferential operators. J. Math. Soc. Japan 23 (1971) 374-378.

[7] A. Grigis : Hypoellipticité et paramétrixes pour des opérateurs pseudodifferentiels à caractéristiques doubles. A paraître dans Astérisque.

[8] L. Hörmander : Pseudodifferential operators and hypoelliptic equations. Proc. Symp. Pure Maths. vol. 10, vol. 10, AMS Providence, R.I. 1966, p.138-183.

[9] L. Hörmander : A class of pseudodifferential operators with double characteristics, Math. Annalen 217 (1975) 165-188.