Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

J. M. Bony

Extensions du théorème de Holmgren

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1975-1976), exp. nº 17, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1975-1976____A18_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91120 PALAISEAU

Téléphone : 941.81.60 - Poste N°

Télex : ECOLEX 69 15 96 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 5 - 1 9 7 6

EXTENSIONS DU THEOREME DE HOLMGREN

par J. M. BONY

Exposé n° XVII

16 Mars 1976

Il est bien connu maintenant, depuis les travaux de Sato, Kashiwara, Kawai [9] et Hörmander [5], que le théorème de Holmgren et certaines extensions de celui-ci s'interprètent bien plus clairement en faisant intervenir le concept de spectre singulier analytique.

Nous entreprenons ici d'examiner dans quels cas les extensions à démonstration purement géométrique, données par Bony [2] et Hörmander [6], peuvent être déduites et améliorées par des résultats sur la propagation des singularités. Une réponse positive sera donnée sous des hypothèses de régularité relativement génériques.

Un point particulièrement frappant est que notre théorème principal (3.10) apparaît comme une réplique exacte relativement au spectre singulier analytique, du théorème de Holmgren relativement au support. Il est donc susceptible des mêmes améliorations géométriques (dans le fibré cotangent), et celles-ci à leur tour, en redescendant sur l'espace de base, fournissent d'autres extensions du théorème de Holmgren.

Outre ces arguments géométriques, notre démonstration repose sur deux points :

- un résultat (théorème 5.2) qui aurait pu figurer dans [B. S.] au prix d'un effort minime et qui doit être considéré comme un théorème commun à P. Schapira et à l'auteur.
- un résultat non publié de Kashiwara [7]. Nous tenons à le remercier d'avoir bien voulu nous l'expliquer [8], et ne pouvons que souhaiter le voir publier bientôt l'ensemble de sa belle théorie.

§ 1. THEOREME DE HOLMGREN ET SPECTRE SINGULIER

Dans tout ce papier, $P(x,D_x)$ désignera un opérateur différentiel à coefficients analytiques, défini dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$, d'ordre m et de symbole principal $P_m(x,\xi)$.

On se réfèrera souvent à la situation suivante :

(1.1)
Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant x_o.
$\Phi(x)$ est une fonction réelle de classe C^2 dans Ω, avec $\Phi(x_o) = 0$, et $d\Phi(x) \neq 0$ dans Ω.
$\xi_o = d\Phi(x_o)$ et $\Omega^+ = \{x \in \Omega \mid \Phi(x) > 0\}$.

1.2 <u>Théorème de Holmgren</u> : Soit $u \in \mathcal{B}(\Omega)$ solution de $Pu = 0$. Si on a $P_m(x_o,\xi_o) \neq 0$ et $u|_{\Omega^+} = 0$, on a alors $(u)_{x_o} = 0$ (en désignant par $(u)_{x_o}$ le germe de u en x_o).

Rappelons comment les propriétés du spectre singulier analytique permettent de donner une démonstration simple de ce théorème. Nous ne donnerons pas ici la définition du spectre singulier analytique, défini par Sato pour les hyperfonctions, par Hörmander (sous le nom de analytic wave front) et par Bros-Iagolnitzer (sous le nom de support essentiel) pour les distributions (voir [3] pour l'équivalence). Il nous suffira de rappeler que SSA(u), pour $u \in \mathcal{B}(\omega)$ est un sous-ensemble fermé de $\Omega \times \mathbb{S}^{n-1}$ vérifiant

(1.3) La projection sur Ω de SSA(u) est le support singulier analytique de u.

(1.4) (Prolongement microanalytique). Avec les notations (1.1), soit $u \in \mathcal{B}(\Omega)$ avec $(x_o,\xi_o) \notin SSA(u)$. Alors $u|_{\Omega^+} = 0 \Rightarrow (u)_{x_o} = 0$.

(1.5) (micro-régularité elliptique). On a

$$SSA(u) \subset SSA(Pu) \cup \{(x,\xi) \mid P_m(x,\xi) = 0\}.$$

Le théorème (1.2) est une conséquence immédiate de (1.4) et (1.5). Dans le même ordre d'idées, dans le cas où P_m est réel, Hörmander [4, th.5.3.2] a donné l'extension suivante : si avec les notations (1.1) on a $P_m(x_o,\xi_o) = 0$, et si la bicaractéristique $(x(t),\xi(t))$ issue de (x_o,ξ_o) rentre dans Ω^+ au second ordre (i.e. $\Phi(x(t)) \geq \alpha t^2$, $\alpha > 0$), alors $u|_{\Omega^+} = 0 \Rightarrow (u)_{x_o} = 0$. Le théorème de propagation des singularités : si $(x_o,\xi_o) \in SSA(u)$, toute la bicaractéristique est contenue dans SSA(u), joint à (1.4) permet d'énoncer immédiatement : si $P_m(x_o,\xi_o) = 0$, et si la bicaractéristique rentre dans Ω^+ avant de sortir de Ω, on a $u|_{\Omega^+} = 0 \Rightarrow (u)_{x_o} = 0$ (voir [5], [9]).

Ce papier a pour but de considérer d'autres extensions du théorème de Holmgren, et d'examiner si des résultats de propagation des singularités permettent de les retrouver ou de les améliorer.

§ 2. GEOMETRIE INFINITESIMALE DIRECTE, ET EXTENSIONS DU THEOREME DE HOLMGREN.

2.1 Définition : Fibré cotangent normal à un ensemble fermé F de $\mathbb{R}^n$. On dit que $(x_o,\xi_o) \in T_F^*\mathbb{R}^n$ si $x_o \in F$, et si on peut trouver φ et Ω vérifiant (1.1) tels que $F \cap \Omega^+ = \emptyset$.

2.2 Théorème : Soit F un ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$.

a) Soit Z un champ de vecteurs lipschitzien, de symbole $z(x,\xi)$. On suppose que $z(x,\xi)$ s'annule sur $T_F^*\mathbb{R}^n$. Alors F est réunion de courbes intégrales de Z.

b) Soient $q_1(x,\xi)$ et $q_2(x,\xi)$ homogènes et de classe C^1, s'annulant sur $T_F^*\mathbb{R}^n$. Alors le crochet de Poisson $q = \{q_1,q_2\}$ s'annule également sur $T_F^*\mathbb{R}^n$.

c) (Hörmander). Soit $q(x,\xi)$ réelle homogène et de classe C^1, s'annulant sur $T_F^*\mathbb{R}^n$. Soit $(x_o,\xi_o) \in T_F^*\mathbb{R}^n$ et soit $(x(t),\xi(t))$ la bicaractéristique relative à q issue de (x_o,ξ_o). Alors $x(t)$ ne peut pas quitter F au second ordre, c'est-à-dire que si Φ et Ω vérifient (1.1) avec $F \cap \Omega^+ = \emptyset$, on ne peut avoir $\Phi(x(t)) \geq \alpha t^2$, $\alpha > 0$.

Nous avons démontré la partie a) dans [1] et la partie b) dans [2]. Dans [6], Hörmander a donné une autre démonstration de b) et a démontré c) (le résultat n'y est énoncé que lorsque F est le support d'une distribution, mais on vérifie immédiatement que la seule propriété utilisée est l'annulation de q sur $T_F^*\mathbb{R}^n$).

Ce théorème fournit immédiatement des extensions du théorème de Holmgren, pour lesquelles nous introduisons les notations suivantes :

(2.3)
- Car(P) : variété caractéristique $= \{(x,\xi) \mid P_m(x,\xi) = 0\}$.
- $\mathcal{J}$: idéal caractéristique : ensemble des fonctions $q(x,\xi)$, réelles, homogènes, de classe C^∞, s'annulent sur V.
- $\mathcal{L}\mathcal{J}$: algèbre de Lie engendrée par $\mathcal{J}$: plus petit idéal stable par crochet de Poisson et contenant $\mathcal{J}$.
- $\mathcal{L}^*$ Car(P) : ensemble des zéros communs aux fonctions $r(x,\xi)$, lorsque r parcourt $\mathcal{L}\mathcal{J}$.

2.4 Théorème : Soit u une hyperfonction vérifiant $Pu = 0$ (ou plus généralement, telle que $SSA(u) \subset Car(P)$).

a) Soit Z un champ de vecteurs dont le symbole $z(x,\xi)$ appartient à $\mathcal{L}\mathcal{J}$. Alors le support de u est réunion de courbes intégrales de Z.

b) Avec les notations (1.1), supposons $(x_o,\xi_o) \notin \mathcal{L}^* Car(P)$. Alors $u|_{\Omega^+} = 0 \Rightarrow (u)_{x_o} = 0$.

c) (Hörmander). Avec les notations (1.1), supposons $(x_o,\xi_o) \in \mathcal{L}^* Car(P)$ et supposons qu'il existe $r(x,\xi) \in \mathcal{L}\mathcal{J}$ telle que la bicaractéristique relative à r, issue de (x_o,ξ_o), rentre dans Ω^+ au second ordre. Alors $u|_{\Omega^+} = 0 \Rightarrow (u)_{x_o} = 0$.

La partie a) généralise notre résultat [1,4.2], où nous montrions que si V est définie par $z(x,\xi) = \ldots = z_r(x,\xi) = 0$, le support d'une solution se propage le long des courbes intégrales des champs de vecteurs appartenant à l'algèbre de Lie engendrée par $Z_1,\ldots,Z_r$. Il peut en effet se produire qu'aucun symbole de champ de vecteurs n'appartienne à $\mathcal{J}$, mais qu'il en existe appartenant à $\mathcal{L}\mathcal{J}$. Les parties b) et c) sont les énoncés de [2] et [6].

§ 3. ENONCE DU THEOREME FONDAMENTAL

Nous désignerons par $M = T^*\mathbb{R}^n$ le fibré cotangent à $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure symplectique, de point courant $x^* = (x,\xi)$.

Nous désignerons par W une variété conique régulièrement involutive de M, de codimension B, c'est-à-dire que nous supposerons :

(3.1) W est définie par B équations $r_1(x,\xi) = \ldots = r_B(x,\xi) = 0$, où les r_j sont analytiques et homogènes.

(3.2) en tout point de W, les B + 1 formes $dr_1,\ldots,dr_B, \Sigma\, \xi_i\, dx_i$ sont linéairement indépendantes.

(3.3) On a $\{r_i,r_j\} = 0$ en tout point de W.

Il en résulte que les champs hamiltoniens H_{r_i} sont tangents à W et forment un système de Frobenius sur W. Ils définissent donc localement un feuilletage de W par des feuilles Σ de dimension B que nous nommerons W-bicaractéristiques.

Le fibré tangent normal à W : $(T_W M)_{x_o^*}$ est l'espace quotient $(TM)_{x_o^*}/(TW)_{x_o^*}$. La 2-forme symplectique définit un isomorphisme de $(TM)_{x_o^*}$ sur $(T^*M)_{x_o^*}$ et par passage au quotient définit un isomorphisme :

(3.4) $$(T_W M)_{x_o^*} \cong (T^*\Sigma)_{x_o^*}$$

où Σ est la W-bicaractéristique passant par x_o^*.

(3.6) Nous supposons maintenant que l'on a $W \subset \mathrm{Car}(P)$ et donc $W \subset \mathcal{L}^*\mathrm{Car}(P)$. Soit k le plus grand entier tel que P_m s'annule sur W ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre $k-1$.

3.7 <u>Définition</u> : (vecteur tangent microcaractéristique). Soit $(\delta x, \delta\xi)$ en vecteur tangent à M en $x_o^* = (x_o, \xi_o) \in W$. Nous dirons que $(\delta x, \delta\xi)$ est microcaractéristique si on a :

$$P_m(x_o + \varepsilon\delta x, \xi_o + \varepsilon\delta\xi) = o(\varepsilon^k).$$

On voit facilement que cette propriété ne dépend que de la classe de $(\delta x, \delta\xi)$ dans $(T_W M)_{x_o^*}$.

3.8 <u>Définition</u> : (vecteur cotangent microcaractéristique). Soit Σ une feuille W-bicaractéristique, et $(x_o^*, \eta_o^*) \in T^*\Sigma$. On dit que $(x_o^*, \eta_o^*) \in \mathrm{Microcar}(P)$ si le vecteur de $(T_W M)_{x_o^*}$ associé à η_o^* par l'isomorphisme (3.4) est microcaractéristique au sens de (3.7).

Pour énoncer le théorème fondamental, nous utiliserons les notations suivantes :

(3.9)
- Σ est une feuille W-bicaractéristique, et $(x_o^*, \eta_o^*) \in T^*\Sigma$.
- ω est un ouvert de Σ, contenant x_o^*, φ est une fonction réelle de classe C^2 sur ω, avec $\varphi(x_o^*) = 0$ et $d\varphi \neq 0$ dans ω.
- $\eta_o^* = d\varphi(x_o^*)$ et $\omega^+ = \{x^* \in \omega \mid \varphi(x^*) > 0\}$.

3.10 <u>Théorème</u> : Sous les hypothèses précédentes, soit u solution de $Pu = 0$. On suppose, avec les notations (3.9) que l'on a $(x_o^*, \eta_o^*) \notin$ Microcar(P). Alors $SSA(u) \cap \omega^+ = \emptyset \Rightarrow x_o^* \notin SSA(u)$.

Nous reportons la démonstration au paragraphe 5. Le théorème reste bien sûr valable si on suppose P pseudo-différentiel défini au voisinage de x_o^*, et si on remplace l'hypothèse $Pu = 0$ par $\omega \cap SSA(Pu) = \emptyset$. D'autre part, des arguments géométriques simples permettent de trouver un voisinage ω' de x_o^*, ne dépendant que de ω, ω^+ et Microcar(P) tel que $SSA(u) \cap \omega' = \emptyset$.

§ 4. APPLICATIONS A LA PROPAGATION DES SINGULARITES ET A L'UNICITE DU PROBLEME DE CAUCHY

Les arguments purement géométriques du théorème 2.2 permettent d'apporter immédiatement au théorème 3.10 les améliorations que nous avons énoncées pour le théorème de Holmgren. Nous utiliserons les notations suivantes, où Σ est une feuille W-bicaractéristique.

4.1

Microcar(P) $\subset T^*\Sigma$ est défini en 3.8.

$\mu\mathcal{J}$: idéal microcaractéristique : ensemble des fonctions $q(x^*, \eta^*)$ réelles homogènes de classe C^∞ s'annulant sur Microcar(P).

$\mathcal{L}\mu\mathcal{J}$: algèbre de Lie engendrée par $\mathcal{J}$.

$\mathcal{L}^*$(Microcar(P) : ensemble des $(x^*, \eta^*) \in T^*\Sigma$ tels que l'on ait $r(x^*, \eta^*) = 0$ quel que soit r appartenant à $\mathcal{L}\mu\mathcal{J}$.

4.2 <u>Théorème</u> : Soit u une solution de $Pu = 0$.

a) Soit Z un champ de vecteurs tangent à Σ, dont le symbole $z(x^*, \eta^*)$ appartient à $\mathcal{L}\mu\mathcal{J}$. Alors $SSA(u) \cap \Sigma$ est réunion de courbes intégrales de Z.

b) Avec les notations (3.9), supposons que $(x_o^*, \eta_o^*) \notin \mathcal{L}^*$(Microcar(P). Alors $SSA(u) \cap \omega^+ = \emptyset \Rightarrow x_o^* \notin SSA(u)$.

c) Avec les notations (3.9) supposons que $(x_o^*, \eta_o^*) \in \mathcal{L}^*$Microcar(P) et supposons qu'il existe $r(x^*, \eta^*)$ appartenant à $\mathcal{L}\mu\mathcal{J}$ telle que la "bicaractéristique relative à r" : $x^*(t)$, $\eta^*(t)$ issue de (x_o^*, η_o^*) rentre dans ω^+ au second ordre (i.e. $\varphi(x^*(t)) \geq \alpha t^2$, $\alpha > 0$). Alors $SSA(u) \cap \omega^+ = \emptyset \Rightarrow x_o^* \notin SSA(u)$.

Nous nous limiterons à l'une des applications possibles du théorème 4.2 à l'unicité du problème de Cauchy. En faisant des hypothèses de régularité relativement "génériques", nous allons obtenir un théorème de propagation des singularités, et en conséquence, une nouvelle extension du théorème de Holmgren. Nous ferons les hypothèses suivantes :

(4.2) $\mathrm{Car}(P)$ est une variété analytique de codimension A, définie par $q_1(x,\xi) = \dots = q_A(x,\xi) = 0$, avec $dq_1,\dots,dq_A$ indépendants sur $\mathrm{Car}(P)$.

(4.3) $\mathcal{L}^*\mathrm{Car}\,P = W$ est une variété régulière de codimension B, définie par $r_1(x,\xi) = \dots = r_B(x,\xi)$ où les r_i vérifient (3.1) et (3.2) (la condition (3.3) (involutivité) est automatiquement vérifiée).

(4.4) Le symbole principal P_m s'annule exactement à l'ordre k-1 sur $\mathrm{Car}(P)$, c'est-à-dire que l'on a $|P_m(x,\xi)| \geq C \sum_1^A |q_i(x,\xi)|^k$ au voisinage de $\mathrm{Car}(P)$, avec $C > 0$.

4.5 <u>Théorème</u> : Sous les hypothèses 4.2, 4.3, 4.4, soit u solution de $Pu = 0$. Alors le spectre singulier analytique de u est réunion de feuilles W-bicaractéristiques.

On voit en effet facilement que les directions appartenant à $(T_W M)_{x_o^*}$ qui sont microcaractéristiques (3.7) sont exactement les directions tangentes à V, c'est-à-dire les directions orthogonales à $dq_1,\dots,dq_A$.
Par l'isomorphisme 3.4, on en déduit que
$\mathrm{Microcar}(P) = \{(x^*,\xi^*) \mid h_{q_i}(x^*,\xi^*) = 0,\ i = 1,\dots,A\}$ où les h_{q_i} sont les symboles des champs hamiltoniens H_{q_i}. On a donc, par définition de $W = \mathcal{L}^*\mathrm{Car}\,P$:

$$h_{r_j}(x^*,\xi^*) \in \mathcal{L}\mu\mathcal{J} \qquad j = 1,\dots,B.$$

Il résulte alors de 4.2.a) que $SSA(u)$ se propage le long des courbes intégrales des champs de vecteurs H_{r_j}, et donc est réunion de feuilles W-bicaractéristiques.

On retrouve ainsi, dans le cas où $\mathrm{Car}\,P$ est involutive, le théorème de propagation des singularités de [B.S.].

4.6 Corollaire : Sous les hypothèses 4.2, 4.3, 4.4, soit $u \in \mathcal{B}(\Omega)$ une solution de $Pu = 0$ et soient Ω, Φ, x_o, ξ_o vérifiant les conditions 1.1. Supposons que $(x_o,\xi_o) \in \mathfrak{L}^*\mathrm{Car}(P)$, et supposons qu'il existe $r(x,\xi) \in \mathfrak{L}\mathcal{T}$ telle que la bicaractéristique relative à r issue de (x_o,ξ_o) rentre dans Ω^+ avant de sortir de Ω. Alors

$$u|_{\Omega^+} = 0 \Longrightarrow (u)_{x_o} = 0 \quad .$$

La démonstration est immédiate, compte-tenu de 1.3 et 1.4. On obtient ainsi, sous les hypothèses de régularité 4.2, 4.3, 4.4, une amélioration et une "explication" du théorème de Hörmander (2.4.c). Toutefois, la possibilité d'"expliquer" l'unicité du problème de Cauchy par la propagation des singularités semble limitée par ces hypothèses. Dans le même ordre d'idée, le théorème 2.4.b ne s'"explique" pas par l'absence de singularités : si $(x_o,\xi_o) \in \mathrm{Car}(P) \setminus \mathfrak{L}^*\mathrm{Car}(P)$, on a toujours $(x_o,\xi_o) \notin T^*_{\mathrm{Supp}(u)}\mathbb{R}^n$, mais on peut avoir $(x_o,\xi_o) \in \mathrm{SSA}(u)$.

§ 5. DEMONSTRATION DU THEOREME 3.10

Nous changeons de notations, en remplaçant n-B par n et B par p, en notant $x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_p$ les variables, et ξ_i, τ_j les variables duales. En multipliant P par un opérateur elliptique d'ordre k-m, et en effectuant une transformation canonique transformant W et x_o^* en :

$$W = \{x,t,\xi,\tau) \mid \xi = 0\} \ ; \ x_o^* = (0,0,0,\tau_o) \text{ avec } \tau_o = (1,\ldots,0) \quad ,$$

l'opérateur P se met sous la forme

$$P(x,t,D_x,D_t) = \sum_{|\lambda|=k} A_\lambda(x,t,D_x,D_t)D_x^\lambda + R_{k-1}$$

où les A_λ et R_{k-1} sont des opérateurs pseudo-différentiels d'ordres 0 et k-1, définis au voisinage de x_o^*.

A l'aide d'un changement de coordonnées linéaires en x, on peut supposer que $\eta_o^* = (0,0,\xi_o,0)$ avec $\xi_o = (1,\ldots,1)$, et que l'ensemble des directions $(0,0,\xi,0)$ du cône positif ne sont pas microcaractéristiques, c'est-à-dire :

(5.1) $$\sum_{|\lambda|=k} a_\lambda(x,t,0,\tau)\xi^\lambda \neq 0 \quad \text{pour } \xi_1 \geq 0, \ldots , \xi_n \geq 0, \text{ et } |\xi| \neq 0 \quad .$$

Rappelons quelques notations de [B.S.]. Soit G un cône ouvert convexe de $\mathbb{R}^{n+p}$, dont le polaire est un petit voisinage de $(0,\tau_o)$. Le tube T(G) désigne l'ensemble des points de $\mathbb{C}^{n+p}$ dont la partie imaginaire appartient à G, et $\widetilde{\mathcal{O}}(TG)$, l'espace des germes de fonctions holomorphes dns TG au voisinage de 0.

Si $f \in \widetilde{\mathcal{O}}(TG)$, on note b(f) la microfonction valeur au bord. Rappelons que Pf est défini comme élément de $\widetilde{\mathcal{O}}(TG)$ modulo les fonctions holomorphes au voisinage de l'origine.

On note :

$A = \{-1,+1\}^n$; $\alpha_+ = (1,\ldots,1)$; $\alpha_- = (-1,\ldots,-1)$; $A' = A \setminus \{\alpha_+,\alpha_-\}$

$B = \{\beta \in \{-1,0,1\}^n | \beta_i \neq 0$ sauf pour un $i\}$ pour $i = 1,\ldots,n$, on définit $\hat{i} : A \to B$ par
$$\hat{i}(\alpha_1,\ldots,\alpha_i,\ldots,\alpha_n) = (\alpha_1,\ldots,0,\ldots,\alpha_n) \quad .$$

Enfin $\Gamma_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall\ i,\ \alpha_i x_i > 0\}$ pour $\alpha \in A$

et $D_\beta = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \beta_i \neq 0 \Rightarrow \beta_i x_i > 0\}$ pour $\beta \in B$.

Le théorème suivant va résulter d'arguments développés au paragraphe 6 de [B.S.].

5.2 <u>Théorème</u> : Soit u une microfonction définie au voisinage de x_o^*, solution de $Pu = 0$. On peut alors trouver des fonctions $f_\alpha \in \widetilde{\mathcal{O}}(T(G+\Gamma_\alpha))$, $\alpha \in A'$, telles que l'on ait
$$u = \sum_{\alpha \in A'} b(f_\alpha) \text{ au voisinage de } x_o^* \quad .$$

5.3 Dans une première étape, nous allons montrer qu'il existe u_o définie dans $\omega \times \mathbb{S}^{n-1}$, à support dans $\omega \times K$ (où ω est un voisinage de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^{n+p}$ et K un voisinage compact de $(0,\tau_o)$ dans $\mathbb{S}^{b+p-1}$) telle que
$$Pu_o = \sum_{\alpha \in A'} b(g_\alpha) \quad , \quad g_\alpha \in \widetilde{\mathcal{O}}(T(G+\Gamma_\alpha))$$
$$u = u_o \text{ au voisinage de } x_o^* \quad .$$

Choisissons d'abord u_1 à support dans $\omega\times K$. On a alors Pu_1 à support dans $\omega\times(K\backslash V)$, avec V voisinage de $(0,\tau_o)$ dans $\mathbb{S}^{n+p-1}$. On recouvre $K\backslash V$ par un nombre fini de boules B_i, $i\in I_1\cup I_2\cup I_3$, avec $\tau_o\notin\overline{B_i}$, telles que :

- pour $i\in I_1$, $\overline{B}_i$ ne coupe ni $(G+\Gamma_{\alpha_+})^o$ ni $(G+\Gamma_{\alpha_-})^o$;
- pour $i\in I_2$, l'opérateur P est elliptique dans $\overline{B}_i$;
- pour $i\in I_3$, la boule B_i est centrée en un point $(0,\tau_i)$, et est assez petite.

Cela est possible compte-tenu de (5.1). Soit

$$Pu_1 = \Sigma\, v_i \quad , \quad i\in I_1\cup I_2\cup I_3$$

une décomposition subordonnée.
Pour $i\in I_1$, v_i est somme de $b(g_{i,\alpha})$ avec $\alpha\in A'$.
Pour $i\in I_2$, on peut résoudre $Pu_i = v_i$ à support dans $\overline{B}_i$.
Pour $i\in I_3$, on décompose [B.S., 6.2.1] $v_i = \sum_{\alpha\in A} g_{i,\alpha}$, et en utilisant [B.S., 5.3.1], on résout $Pf_{i,\alpha_+} = g_{i,\alpha_+}$ et $Pf_{i,\alpha_-} = g_{i,\alpha_-}$ (avec $g_{i,\alpha}\in\widetilde{\mathcal{O}}(T(G_i+\Gamma_\alpha))$, en notant G_i le polaire de B_i).

On pose alors

$$u_o = u_1 - \sum_{i\in I_2} u_i - \sum_{i\in I_3}\left[b(g_{i,\alpha_+}) + b(g_{i,\alpha_-})\right]$$

ce qui termine la première étape.

5.4 Soit $u_o = \sum_{\alpha\in A} b(f_\alpha)$ une décomposition de u_o [B.S., 6.2.1]. On a alors $\sum_{\alpha\in A'}(Pf_\alpha - g_\alpha) + Pf_{\alpha_+} + Pf_{\alpha_-} = 0$, et d'après [B.S., 6.2.1], on peut trouver des fonctions $h_\beta\in\widetilde{\mathcal{O}}(T(G+D_\beta))$ telles que

$$Pf_{\alpha_+} = \sum_i h_{\hat{i}(\alpha_+)} \quad \text{(de même pour } f_{\alpha_-}) \quad .$$

On peut alors [B.S., 5.3.1] résoudre $P\varphi_\beta = h_\beta$ lorsque $\beta = \hat{i}(\alpha_+)$ ou $\hat{i}(\alpha_-)$, le polaire de D_β étant formé de directions non microcaractéristiques.
En posant $f'_{\alpha_+} = f_{\alpha_+} - \Sigma\,\varphi_{\hat{i}(\alpha_+)}$ (de même pour f'_{α_-}), et, pour $\alpha\in A'$, en choisissant convenablement les φ_β qu'il faut ajouter aux f_α pour former des f'_α, on obtient

$$u_o = \Sigma\, b(f'_\alpha) \qquad f'_\alpha \in \tilde{\mathcal{O}}(T(G+\Gamma_\alpha))$$

et
$$Pf'_{\alpha_+} = Pf'_{\alpha_-} = 0 \quad .$$

Il résulte alors de [B.S., 5.3.1] que f'_{α_+} et f'_{α_-} appartiennent à $\tilde{\mathcal{O}}(TG+\mathbb{C}^n)$ et peuvent donc être absorbés dans l'un quelconque des autres f'_α, ce qui établit 5.2.

5.5 Il nous reste à décrire brièvement la théorie de Kashiwara [7] [8]. Nous désignons par E l'espace $\mathbb{R}^{n+p} \times \mathbb{S}^{n+p-1}$, et $N = \{(x,t,\xi,\tau) \in E \mid \xi = 0\} \simeq \mathbb{R}^{n+p} \times \mathbb{S}^{p-1}$.

Le faisceau $\mathcal{C}$ des microfonctions est défini sur E, et le faisceau $\mathcal{C}_h$ des microfonctions sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^p$ solutions de $\partial/\partial \bar{z}_j\, u = 0$, est un faisceau sur $\tilde{E} = \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{S}^{2n+p-1}$, à support dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{S}^{p-1}$. On notera π la projection $N \times \mathbb{S}^{n-1} \to N$.

5.6 (Kashiwara) Il existe un faisceau $\mathcal{C}_N^-$ sur $N \times \mathbb{S}^{n-1}$ tel que le diagramme suivant de faisceaux sur N soit exact :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & & & \\
 & & & & \downarrow & & & & \\
 & & & & \mathcal{C}|_N & & & & \\
 & & & & \downarrow{\scriptstyle j} & & & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{C}_h|_N & \longrightarrow & \mathcal{H}^n_N(\tilde{E},\mathcal{C}_h) & \xrightarrow{Sp} & \pi_*(\mathcal{C}_N^-) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

et tel que, si $f \in \tilde{\mathcal{O}}(T(G+\Gamma))$, avec les notations du § 5, on a

$$(5.7) \qquad \text{support}(Sp \circ j \circ b(f)) \subset N \times \Gamma^o$$

au voisinage de $(0,0,\tau_o)$ dans N.

5.8 Théorème (Kashiwara) : Soit u une microfonction sur $\mathbb{R}^{n+p}$ définie au voisinage de $(0,0,0,\tau_o)$ nulle pour $x_n < 0$, et telle que les points $((0,0,\tau_o) ; (0,\dots,0,\pm 1))$ de $N \times \mathbb{S}^{n-1}$ n'appartiennent pas au support de $Sp \circ j(u)$. Alors $u = 0$ au voisinage de $(0,0,0,\tau_o)$.

On voit facilement, par des arguments géométriques standard, que si la restriction de u à la feuille $\xi = 0$, $t = 0$, $\tau = \tau_o$ s'annule dans $\omega \cap \{x_n < 0\}$, alors cette restriction s'annule dans un ouvert ω' ne dépendent que de ω et de support $(sp \circ j(u))$.

5.9 Le théorème 3.10 résulte alors immédiatement de 5.2, 5.7, et 5.8. L'ensemble des théorèmes 5.2 et 5.7 peut être considéré comme une micro-micro-localisation du théorème de régularité des solutions des équations elliptiques, tandis que le théorème 5.8 est une micro-micro-localisation du théorème du prolongement analytique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bony J.M., Principe du maximum, inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés, Ann. Inst. Fourier Grenoble 19, 1 (1969) 277-304.

[2] Bony J.M., Une extension du théorème de Holmgren sur l'unicité du problème de Cauchy, C. R. Acad. Sc. Paris 268 (1969) 1103-1106.

[3] Bony J.M., Propagation des singularité différentiables pour des opérateurs à coefficients analytiques,(à paraître, Astérisque 1976).

[B.S.] Bony J.M. et Schapira P., Propagation des singularités analytiques pour les solutions des équations aux dérivées partielles, Ann. Inst. Fourier Grenoble (1976).

[4] Hörmander L., Linear partial differential operators, Springer (1963).

[5] Hörmander L., Uniqueness theorems and wave front sets for solutions of linear differential equations with analytic coefficients, Comm. Pure and Appl. Math. 24 (1971) 617-704.

[6] Hörmander L., A remark on Holmgren's uniqueness theorem, J. Diff. Geometry 6 (1971) 129-134.

[7] Kashiwara M., Exposé oral au colloque "Hyperfonctions et Physique Théorique" (1973) Nice (non publié).

[8] Kashiwara M., Communications orales, (1973) Nice, (1975) Paris.

[9] Sato M., Kawai T. et Kashiwara M., Hyperfunctions and pseudo-differential equations, Lecture Notes in Math. 287 (1973) Springer 265-529.