P. Grisvard

Régularité de la solution d'un problème aux limites unilatéral dans un domaine convexe

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1975-1976), exp. nº 16, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1975-1976____A17_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91120 PALAISEAU

Téléphone : 941.81.60 - Poste N°

Télex : ECOLEX 69 15 96 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 5 - 1 9 7 6

REGULARITE DE LA SOLUTION D'UN PROBLEME AUX LIMITES UNILATERAL DANS UN DOMAINE CONVEXE

par P. GRISVARD

Exposé n° XVI

9 Mars 1976

§ 1. INTRODUCTION

Cet exposé est consacré à des résultats du type suivant : soit Ω un ouvert convexe quelconque de $\mathbb{R}^n$ et β un graphe maximal monotone dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, alors pour tout $f\in L^2(\Omega)$ il existe une unique solution $u\in H^2(\Omega)$ du problème

$$(1)\qquad \begin{cases} -\Delta u+u=f & \text{p.p. dans } \Omega \\ -\dfrac{\partial u}{\partial \nu}\in\beta(u) & \text{p.p. sur } \Gamma=\partial\Omega. \end{cases}$$

Pour simplifier, on supposera que $\beta(0)\ni 0$. Ici on utilise les notations usuelles, à savoir Δ est l'opérateur de Laplace, $H^2(\Omega)$ est l'espace de Sobolev d'ordre deux relatif à $L^2(\Omega)$ et ν est le champ de vecteur normal sur Γ, sortant de Ω, notion qui sera précisée plus loin.

L'existence d'une solution $u\in H^1(\Omega)$ est bien connue et est obtenue par minimisation sur $H^1(\Omega)$ de la fonctionnelle

$$v\mapsto\varphi(v)=\frac{1}{2}\int_\Omega[|\nabla v|^2+|v|^2]\,dx-\int_\Omega fv\,dx+\int_\Gamma d(v)\,d\sigma\qquad,$$

où ∇ désigne l'opérateur gradient, d est une fonction numérique convexe définie sur $\mathbb{R}$ dont β est le sous-différentiel et $d\sigma$ est la mesure de surface sur Γ. Cette méthode peut être appliquée dès que Γ est localement lipschitzienne si on entend la condition aux limites dans un sens faible.

L'intérêt du résultat présenté ici est seulement la régularité de la solution obtenue qui est dans $H^2(\Omega)$. Des résultats de régularité de ce type ont été obtenus précédemment par <u>Fichera</u> [4] (pour le problème de Signorini en élasticité) et par <u>Brezis</u> [1] qui supposent que Γ est régulière c'est-à-dire C^∞ mais il est clair que leurs démonstrations fonctionnent en supposant Γ borné et de classe $C^{1,1}$ (classe des fonctions à gradient lipshitzien). Comme on le verra plus loin les ouverts considérés ici ont des frontières beaucoup moins régulières. Etant intéressé par la régularité d'une solution dont on sait déjà l'existence, on a travaillé avec l'équation de Laplace modifiée $-\Delta u+u=f$ au lieu de $-\Delta u=f$ pour éviter le problème des conditions de compatibilité sur f assurant l'existence de u.

§ 2. QUELQUES REMARQUES

(i) Il faut d'abord remarquer que Ω a localement la propriété uniforme du cône ; en effet soit B une boule de centre x et de rayon $r > 0$ contenue

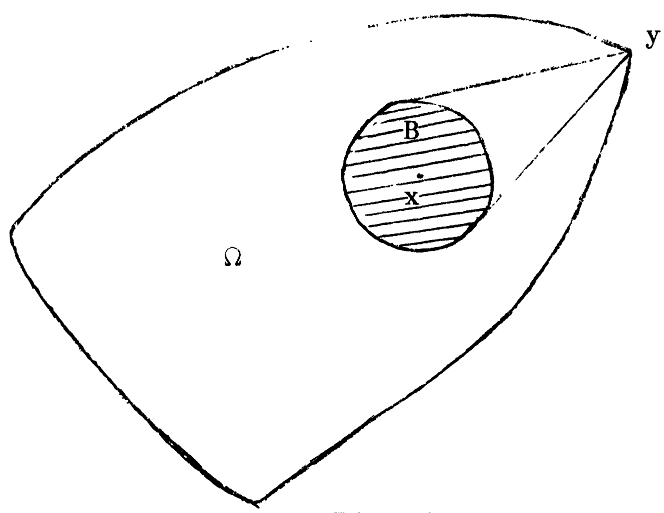

Fig. 1

dans Ω, par convexité Ω contient le cône

$$\{y + t(z - y) \ ; \ t \in]0,1[\ , \ z \in B\}$$

pour tout $y \in \Gamma$. Ceci prouve déjà la propriété du cône simple. Pour voir que la condition est uniforme, on utilise une boule de rayon r/2 contenue dans B ; en la déplaçant à l'intérieur de B on obtient pour les points voisins de y, des cônes d'ouverture et de hauteurs minorées par des nombres strictement positifs et d'axes parallèles entre eux. En conséquence la frontière Γ est localement uniformément lipschitzienne ce qui donne un sens à la mesure $d\sigma$ et au champ de vecteurs ν défini presque partout. D'autre part, l'exemple d'un polygône plan convexe ou d'un polyèdre convexe dans l'espace, montre qu'en général la frontière n'est pas mieux que lipschitzienne.

(ii) Les exemples les plus usuels de problèmes aux limites sont obtenus en choisissant β comme suit :

<u>Dirichlet</u> = $\beta(t) = \emptyset$ si $t \neq 0$ et $\beta(0) = \mathbb{R}$,
<u>Neumann</u> = $\beta(t) = \{0\}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$,
<u>Signorini</u> = $\beta(t) = \{0\}$ pour $t > 0$
$\beta(t) =]-\infty, 0]$ pour $t = 0$
$\beta(t) = \emptyset$ pour $t < 0$

On rappelle que la condition aux limites correspondante (dite condition "ambigue") s'écrit :

$$u \geq 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \geq 0, \quad u\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \qquad \text{p.p. sur } \Gamma .$$

(iii) L'exemple du problème de Dirichlet montre que le résultat énoncé est le meilleur possible au sens suivant : on sait d'après <u>Grisvard</u> [5] par exemple, que si Ω est un polygône plan (éventuellement non convexe) dont le plus grand des angles intérieurs a pour mesure ω, on peut trouver $u \in H^1_o(\Omega)$ solution de $\Delta u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ telle que $u \notin W^{s,p}(\Omega)$ avec $s = \frac{\pi}{\omega} + \frac{2}{p}$, $1 < p < +\infty$. Ceci prouve que si Ω est un convexe quelconque on ne peut pas espérer en général que la solution du problème (1) soit dans $H^s(\Omega)$ avec $s > 2$ ou dans $W^{2,p}(\Omega)$ avec $p > 2$ même si f est donné très régulier. Signalons pour terminer ces remarques que le résultat énoncé ici dans le cas d'un ouvert convexe borné et des conditions aux limites de Dirichlet est dû à <u>Kadlec</u> [6].

§ 3. <u>EXTENSIONS POSSIBLES</u>

La méthode qui sera expliquée plus loin pour prouver le résultat indiqué en 1, s'applique au cas plus général suivant : soit L défini par

$$Lu = \nabla . \mathcal{O} \nabla u$$

où $\mathcal{O}$ est une matrice symétrique définie positive à coefficients uniformément lipschitziens dans $\overline{\Omega}$; on note $\frac{\partial u}{\partial \nu_L}$ la dérivée conormale associée c'est-à-dire

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_L} = \nu . \mathcal{O} \nabla u$$

sur la frontière. On considère également un second graphe γ maximal monotone dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que $\gamma(0) \ni 0$ (pour éviter des complications inutiles). On considère enfin un ouvert borné Ω dans $\mathbb{R}^n$ qui est localement l'image par un difféomorphisme de classe $C^{1,1}$ d'un ouvert convexe, alors pour tout f donné dans $L^2(\Omega)$. Le problème

$$(2) \qquad \begin{cases} - Lu + u + \gamma(u) \ni f & \text{p.p. dans } \Omega \\ - \dfrac{\partial u}{\partial v_L} \in \beta(u) & \text{p.p. sur } \Gamma \end{cases}$$

admet une solution unique dans $H^2(\Omega)$. Parmi les ouverts considérés ici, outre les ouverts réguliers considérés (sans aucune hypothèse de convexité) dans [4], [1], il y a par exemple les polygônes curvilignes plans formés d'arcs de classe $C^{1,1}$ se raccordant suivant des angles convexes et les polyèdres curvilignes dans l'espace formés de morceaux de surfaces de classe $C^{1,1}$ se raccordant suivant des arètes convexes (ex. en fig. 2).

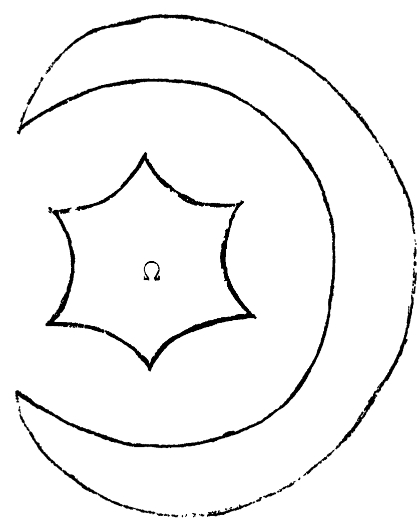

Fig. 2

On pourrait aussi traiter par les mêmes techniques, le cas où Ω a des points de rebroussements vers l'extérieur de Ω.

§ 4 SCHEMA DE DEMONSTRATION

Il y a deux sources de singularités qui sont Ω et β, on s'en débarassera en faisant des approximations. Pour simplifier, on ne considérera ici que le cas où Ω est borné : on approchera Ω à l'aide d'une suite croissante d'ouverts convexes réguliers Ω_m, $m = 1,2,\ldots$ tels que la mesure de $\Omega - \Omega_m$ tende vers zéro lorsque $m \to +\infty$ et tels que les frontières Γ_m soient localement lipschitziennes uniformément par rapport à m. D'autre part on approchera β par ses régularisées au sens de Yosida β_λ définies par $\beta_\lambda = \lambda^{-1}\{1 - (1 + \lambda\beta)^{-1}\}$ pour $\lambda > 0$; ce sont des fonctions non décroissantes uniformément lipschitziennes de constante $1/\lambda$ (cf. par ex. [1]).

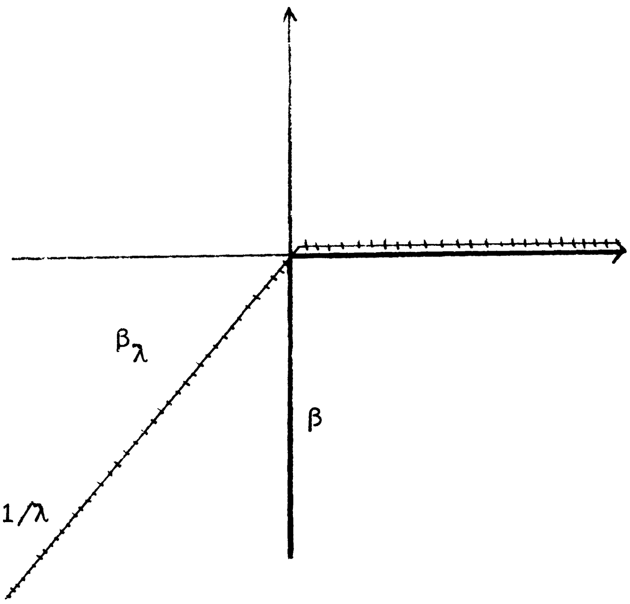

Fig. 3

L'approximation de Yosida correspondant au problème de Signorini est indiquée fig. 3.

On considère le problème approché suivant

$$(3) \qquad \begin{cases} -\Delta u_{\lambda,m} + u_{\lambda,m} = f|_{\Omega_m} & \text{p.p.} \quad \text{dans } \Omega_m \\ -\dfrac{\partial u_{\lambda,m}}{\partial \nu_m} = \beta_\lambda(u_{\lambda,m}) & \text{p.p.} \quad \text{sur } \Omega_m \end{cases}$$

Il s'agit d'une petite perturbation non linéaire d'un problème de Neuman dans un domaine régulier pour lequel la régularité dans $H^2(\Omega_m)$ est bien connue ; par conséquent on vérifie facilement par un argument de point fixe que le problème (3) admet une unique solution

$$u_{\lambda,m} \in H^2(\Omega_m).$$

Maintenant pour traiter le problème proposé, il faut passer à la limite. Ceci est possible grâce aux deux résultats essentiels que voici :

(i) $\quad \|u_{\lambda,m}\|_{H^2(\Omega_m)} \leq \sqrt{5}\,\|f\|_{L^2(\Omega)} \quad , \quad \forall\lambda$ et $\forall m$.

(ii) Il existe $P_m \in L(H^2(\Omega_m);H^2(\mathbb{R}^n))$ opérateur de prolongement (c'est dire $P_m u|_{\Omega_m} = u$) tel que $\overline{\lim_{m\to+\infty}}\, \|P_m\| < +\infty$.

La seconde assertion est prouvée dans Chenais [3] puisque les Ω_m sont lipschitziens uniformément par rapport à m.

Quant à la première assertion, son intérêt n'est pas la valeur folklorique de la constante $\sqrt{5}$ mais le fait que ladite constante ne dépend ni de λ ni de m. La majoration de $\|u_{\lambda,m}\|_{H^1(\Omega_m)}$ est obtenue de la manière usuelle en multipliant dans (3) l'équation par $u_{\lambda,m}$ et en intégrant par parties ; ceci fournit l'habituelle majoration

$$\|u_{\lambda,m}\|_{H^1(\Omega_m)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \quad , \quad \forall\,\lambda \text{ et } \forall\, m.$$

Il reste donc à majorer les dérivées secondes. On suit en cela l'idée de Caccioppoli [2] exposée aussi dans la "seconde inégalité fondamentale" de Ladyzenskaia-Ural'ceva [7] : il s'agit de calculer directement par intégration par parties la quantité

$$\int_{\Omega_m} |\Delta\, u_{\lambda,m}|^2 dx\,.$$

Cependant contrairement aux auteurs mentionnés ci-dessus, on utilisera l'identité précise suivante donnant les intégrales de bord : soit Ω borné à frontière de classe C^2 et $u \in H^2(\Omega)$, on a l'identité

(4) $$\int_\Omega |\Delta u|^2 dx = \int_\Omega |\nabla^2 u|^2 dx$$

$$- 2\int_\Gamma \nabla_T u . \nabla_T \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma + \int_\Gamma B(\nabla_T u;\nabla_T u) d\sigma + \int_\Gamma \operatorname{tr} B \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 d\sigma$$

où $\nabla_T u$ est la projection sur l'hyperplan tangent à Γ de ∇u, B est la seconde forme fondamentale de l'hypersurface Γ, tr B est sa trace ; d'autre part, on a bien entendu

$$|\nabla^2 u|^2 = \sum_{j,k=1}^{n} \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}\right|^2 .$$

On rappelle ici que lorsqu'on choisit les coordonnées de sorte que le point considéré de Γ soit l'origine, et l'hyperplan tangent soit défini par l'équation $x_n = 0$, alors Ω peut être localement défini par une équation de la forme $x_n > \varphi(x_1,\dots,x_{n-1})$, où φ est de classe C^2. Dans cette représentation B est la forme quadratique

$$\xi \to B(\xi,\xi) = \sum_{j,k=1}^{n-1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k}(0)\xi_j \xi_k$$

et

$$\operatorname{tr} B = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j^2}(0)\xi_j^2 .$$

Dans le cas particulier où Ω est convexe, la fonction φ est elle aussi convexe et partout B est positive semi-définie. On déduit alors de (4) l'inégalité

(5) $$\int_\Omega |\nabla^2 u|^2 dx \leq \int_\Omega |\Delta u|^2 dx + 2\int_\Gamma \nabla_T u . \nabla_T \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma$$

Si on revient au problème approché (3), l'inégalité (5) appliquée à Ω_m et $u_{\lambda,m}$ fournit

$$\int_{\Omega_m} |\nabla^2 u_{\lambda,m}|^2 dx \leq \int_{\Omega_m} |u_{\lambda,m} - f|^2 dx - 2\int_{\Gamma_m} \nabla_T u_{\lambda,m} . \nabla_T \beta_\lambda(u_{\lambda,m}) d\sigma$$

$$= \int_{\Omega_m} |u_{\lambda,m} - f|^2 dx - 2\int_{\Gamma_m} \beta_\lambda'(u_{\lambda,m}) |\nabla_T u_{\lambda,m}|^2 d\sigma \leq \int_{\Omega_m} |u_{\lambda,m} - f|^2 dx$$

car $\beta'_\lambda(u_{\lambda,m}) \geq 0$ p.p. sur Γ_m puisque β_λ est non décroissante. Il s'ensuit que

$$\|\nabla^2 u_{\lambda,m}\|_{L^2(\Omega_m)} \leq \|u_{\lambda,m}\|_{L^2(\Omega_m)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

et tenant compte de la majoration déjà obtenue de $\|u_{\lambda,m}\|_{H^1(\Omega_m)}$, on obtient l'inégalité annoncée (i).

Ceci étant, le passage à la limite s'effectue en utilisant des techniques habituelles (en reconnaissance de formes p. ex.) : on note $U_{\lambda,m} = P_{\lambda,m}u_{\lambda,m}$, c'est une suite (par rapport à m) bornée dans $H^2(\Omega)$, par conséquent (après extraction éventuelle d'une sous-suite) on a $U_{\lambda,m} \to u_\lambda$ faiblement dans $H^2(\Omega)$ et fortement dans $H^1(\Omega)$. En considérant (3) comme un problème de minimisation (cf. le début de l'exposé) on constate que $u_\lambda \in H^2(\Omega)$ est solution de

$$\text{(6)} \qquad \begin{cases} -\Delta u_\lambda + u_\lambda = f & \text{p.p. dans } \Omega \\ -\dfrac{\partial u_\lambda}{\partial \nu} = \beta_\lambda(u_\lambda) & \text{p.p. sur } \Gamma. \end{cases}$$

Enfin on a évidemment la majoration

$$\|u_\lambda\|_{H^2(\Omega)} \leq \sqrt{5}\,\|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall\lambda$$

et le passage à la limite par rapport à λ ($\lambda \to 0$) se fait exactement comme dans [1].

§ 5. D'OU VIENT L'IDENTITE (5)

On applique d'abord la formule de Green :

$$\int_\Omega |\Delta u|^2 dx = \int_\Omega \Delta u.\Delta u\, dx = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}\Delta u d\sigma - \int_\Omega \nabla u.\nabla\Delta u\, dx$$

$$= \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}\Delta u\, d\sigma - \int_\Gamma \nabla u.\frac{\partial}{\partial \nu}\nabla u d\sigma + \int_\Omega |\nabla u|^2 dx .$$

On obtiendra (4) en explicitant l'intégrale de bord

$$I = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} \Delta u d\sigma - \int_\Gamma \nabla u . \frac{\partial}{\partial \nu} \nabla u d\sigma$$

On montrera que

$$I = -2\int_\Gamma \nabla_T u . \nabla_T \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma + \int_\Gamma B(\nabla_T u; \nabla_T u) d\sigma + \int_\Gamma \operatorname{tr} B \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 d\sigma .$$

C'est une identité entre formes quadratiques qu'il est plus aisé de déduire de l'inégalité correspondante entre formes bilinéaires ; c'est-à-dire qu'on explicitera

$$I(u;v) = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} \Delta v \, d\sigma - \int_\Gamma \nabla u . \frac{\partial}{\partial \nu} \nabla v \, d\sigma \quad .$$

L'avantage est qu'en utilisant une partition de l'unité, on voit immédiatement que les supports de u et de v peuvent être choisis arbitrairement petits. Ceci permet de supposer qu'au voisinage des supports de u et de v, il existe un système de coordonnées curvilignes orthogonales $(s_1,\dots,s_n)$ tel que la frontière Γ soit définie par $s_n = 0$ et Ω par $s_n < 0$; soient $\tau_1,\dots,\tau_n$ les vecteurs unitaires parallèles à $\frac{\partial M}{\partial s_1},\dots,\frac{\partial M}{\partial s_n}$ (où M est le point courant de coordonnées $s_1,\dots,s_n$), on écrit

$$u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial s_i} \tau_i \ , \ \nabla . \ \phi = \sum_{i=1}^n \tau_i . \frac{\partial \phi}{\partial s_i} \quad ;$$

on en déduit l'expression en coordonnées curvilignes de

$$\Delta v = \nabla . \nabla v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial s_i^2} + \sum_{i,j=1}^n \tau_j . \frac{\partial \tau_i}{\partial s_j} \frac{\partial v}{\partial s_i}$$

et de

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \nabla v = \frac{\partial}{\partial s_n} \nabla v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial s_n \partial s_i} \tau_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial s_i} \frac{\partial \tau_i}{\partial s_n} \quad .$$

D'où

$$I(u;v) = \sum_{i=1}^{n-1} - \int_\Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial s_i \partial s_n} \frac{\partial v}{\partial s_i} + \frac{\partial u}{\partial s_i} \frac{\partial^2 v}{\partial s_i \partial s_n}\right) d\sigma$$

$$+ \int_\Gamma A(\nabla u; \nabla v)\, d\sigma$$

où A est une forme bilinéaire; on a donc

$$I(u;v) = -\int_\Gamma \left(\nabla_T \frac{\partial u}{\partial \nu} . \nabla_T v + \nabla_T u . \nabla_T \frac{\partial v}{\partial \nu}\right) d\sigma$$

$$+ \int_\Gamma A(\nabla u ; \nabla v)\, d\sigma$$

et pour conclure, on voit facilement en coordonnées locales que $A(\xi,\zeta) = B(\xi_T,\zeta_T) + \mathrm{tr}\, B(\xi_\nu,\zeta_\nu)$ où $\xi_T(\zeta_T)$ est la projection de $\xi(\zeta)$ sur l'hyperplan tangent et $\xi_\nu = \xi - \xi_T$, $\zeta_\nu = \zeta - \zeta_T$. Ceci prouve (5).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Brezis : Monotonicity methods in Hilbert spaces and some applications to nonlinear partial differential equations. Contributions to non linear functional analysis, Acad. Press 1971.

[2] Caccioppoli : Limitazioni integrali per le soluzioni di un' equazione lineare ellittica a derivate parziali, Opere Vol. II p. 263-292, Ed. Cremonese, Roma 1963.

[3] Chenais : On the existence of a solution in a domain identification problem, J. of Math. Analysis and Applic., Vol. 52, n° 2, 1975.

[4] Fichera : Unilateral constraints in elacticity, Actes du Congrès International des Mathématiciens, tome 3, p.79-84, 1970.

[5] Grisvard : Behaviour of the solutions of an elliptic boundary value problem in a polygonal or polyhedral domain, Numerical solution of P. D. E. III, Academic Press 1976, p.207-274.

[6] Kadlec : La régularité de la solution du problème de Poisson dans un domaine localement semblable à celle d'un ouvert convexe. J. Tchecoslovaque de Maths., t.14 (89) 1964, p.386-393.

[7] Ladyzenskaia-Ural'ceva : Equations à dérivées partielles de type elliptique, Dunod, Paris 1968.
