Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

M. S. Baouendi
C. Goulaouic

Problèmes de Cauchy pseudo-différentiels analytiques non linéaires

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1975-1976), exp. nº 13, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1975-1976____A14_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91120 PALAISEAU

Téléphone : 941.81.60 - Poste N°

Télex : ECOLEX 69 15 96 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 5 - 1 9 7 6

PROBLEMES DE CAUCHY PSEUDO-DIFFERENTIELS ANALYTIQUES NON LINEAIRES

par M. S. BAOUENDI et C. GOULAOUIC

Exposé n° XIII

16 Février 1976

On donne quelques résultats du type "théorème de Cauchy-Kovalewsky non linéaire" mais pour des problèmes non locaux (plus précisément, pseudo-différentiels en les variables d'espace). On dégage seulement les grandes lignes des démonstrations et on renvoie à [2] pour des résultats plus complets et des démonstrations détaillées.

Soient Γ une variété analytique réelle compacte de dimension n, $T > 0$; soient E et F_j pour $j \in \{1,\dots,k\}$ des fibrés vectoriels analytiques de base Γ ; soient u_o une section du fibré E sur Γ et V un voisinage de u_o dans E ; pour $j \in \{1,\dots,k\}$ on se donne une fonction f_j analytique de $[-T,T] \times V$ dans F_j préservant la projection sur la base Γ et un opérateur P_j pseudo-différentiel analytique d'ordre au plus 1 opérant sur les sections analytiques de F_j à valeurs dans les sections analytiques de E et dépendant analytiquement de $t \in [-T,T]$.

On a alors :

<u>Théorème 1</u> : Il existe $\varepsilon \in]0,T]$ et une unique fonction u analytique de $[-\varepsilon,\varepsilon]$ dans les sections analytiques de E et vérifiant :

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \sum\limits_{j=1}^{k} P_j f_j(t,u) & \text{sur }]-\varepsilon,\varepsilon[\\ u(o) = u_o \ . \end{cases}$$

Dans le cas particulier où les opérateurs P_j sont différentiels, le résultat ci-dessus n'est autre que le théorème de Cauchy-Kovalewsky.

Comme on le constate aisément sur la méthode de démonstration, on peut dans le théorème ci-dessus remplacer l'analyticité en $t \in [-T,T]$ des données par la continuité et obtenir alors u seulement continuement différentiable en t sur $[-\varepsilon,\varepsilon]$.

Comme exemple d'application de ce théorème 1 on peut donner l'existence et l'unicité d'une solution analytique (locale en temps) de l'équation d'Euler (le résultat général C^∞ est montré dans [5]) ; plus précisément : soit Γ une variété riemannienne analytique compacte ; on note $T\Gamma$ le fibré tangent et ∇ la connexion riemannienne de Γ; on désigne par $a(\Gamma)$ l'espace des fonctions analytiques complexes sur Γ et par $a(\Gamma,T\Gamma)$

l'espace des champs de vecteurs analytiques sur Γ.

Etant donnés $u_o \in a(\Gamma, T\Gamma)$ tel que $\operatorname{div} u_o = 0$ et $f \in C([-T,T], a(\Gamma,T\Gamma))$, il existe $\varepsilon \in]0,T]$, $p \in C([-\varepsilon,\varepsilon], a(\Gamma))$ et une unique fonction $u \in C^1([-\varepsilon,\varepsilon], a(\Gamma,T\Gamma))$ solutions de :

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \nabla_u u = \operatorname{grad} p + f & \text{sur }]-\varepsilon,\varepsilon[\\ \operatorname{div} u = 0 & \\ u(o) = u_o & \end{cases}$$

On note d'abord que pour $v \in a(\Gamma,T\Gamma)$ vérifiant $\operatorname{div} v = o$, on a : $\nabla_v v = \operatorname{div}(v \otimes v)$. Pour $v \in a(\Gamma,T\Gamma)$, on note $Pv = v - \operatorname{grad} \Delta^{-1} \operatorname{div} v$ (où le laplacien Δ est défini par $\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad}$) et on vérifie que P est un opérateur pseudodifférentiel analytique d'ordre 0 opérant dans $a(\Gamma,T\Gamma)$ et que l'on a : $Pv = v$ si $\operatorname{div} v = 0$, $\operatorname{div} Pv = 0$ pour tout $v \in a(\Gamma,T\Gamma)$ et $P \operatorname{grad} p = 0$ pour tout $p \in a(\Gamma)$.

Il est alors facile de voir que l'équation (2) équivaut à

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + P \operatorname{div}(u \otimes u) = Pf \\ u(o) = u_o \end{cases}$$

et que l'on peut alors appliquer le théorème 1 ainsi que la remarque sur la régularité en la variable t.

On donne une idée de la démonstration du théorème 1 dans le cas plus simple d'une équation scalaire (c'est-à-dire, plus précisément, lorsque $k = 1$ et $E = F = \Gamma \times \mathbb{C}$). Schématiquement alors la méthode consiste à utiliser un théorème abstrait de Nirenberg [9] et à trouver une chaîne d'algèbres de Banach dont la réunion est $a(\Gamma)$ et telle que les opérateurs pseudo-différentiels analytiques d'ordre d sur Γ ($d \in \mathbb{N}$) y soient singuliers de type d au sens de [9] [11].

Le résultat annoncé ici contient évidemment le théorème 1 de [1] ; il est à noter que les méthodes utilisées dans le cas linéaire ne suffisent pas ici ; en particulier il est nécessaire de changer le choix de la chaîne d'espaces.

§ 1. CHAINES D'ALGEBRES DE BANACH DE FONCTIONS ANALYTIQUES

Soit $\rho \in]0,1[$; on choisit une distance d sur Γ et on note

$$C^{\rho} = \{ u \in C(\Gamma) \; ; \; |||u||| = \sup_{x \in \Gamma} |u(x)| + \sup_{(x,y) \in \Gamma \times \Gamma} \frac{|u(x) - u(y)|}{d(x,y)^{\rho}} < \infty \} \; ;$$

l'espace C^{ρ} muni de la norme $|||\ \ |||$ est une algèbre de Banach.

Soient $X_1, \ldots, X_r$ des champs de vecteurs réels analytiques sur Γ et qui engendrent l'espace tangent en chaque point de Γ ; l'existence de tels champs résulte du plongement analytique de Γ dans un espace $\mathbb{R}^r$ (cf. [8]); pour $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell)$ avec $\alpha_j \in \{1, \ldots, r\}$, on note $|\alpha| = \ell$ et $X^{\alpha} = X_{\alpha_1} \ldots X_{\alpha_\ell}$; on note $\mathfrak{J}$ l'ensemble de tels indices α.

Pour $s > 0$, on note :

$$E_s = \{ u \in C^{\infty}(\Gamma) ; \|u\|_s = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{s^k}{k!} \sup_{\substack{\alpha \in \mathfrak{J} \\ |\alpha| = k}} |||X^{\alpha} u||| < \infty \} .$$

Les espaces E_s, munis de la norme $\|\ \ \|_s$, constituent une chaîne décroissante d'algèbres de Banach (pour u, v dans E_s, on a : $\|uv\|_v \leq \|u\|_s \|v\|_s$). On a d'abord :

Proposition 1 : On a $a(\Gamma) = \bigcup_{s>o} E_s$.

En effet, pour $u \in E_s$, on a :

$$|||(\sum_{j=1}^{r} X_j^2)^k u||| \leq r^k s^{-2k} \|u\|_s \, 2k! \qquad \text{pour} \quad k \in \mathbb{N}$$

et donc $u \in a(\Gamma)$ d'après [6].

Inversement soit $u \in a(\Gamma)$; en utilisant des cartes locales, on montre que u est dans un espace E_s grâce au lemme suivant :

Lemme 1 : Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $u \in a(\Omega)$, $Y_1, \ldots, Y_r$ des opérateurs différentiels d'ordre au plus 1 à coefficients analytiques sur Ω ; pour tout compact $K \subset \Omega$ il existe $C > 0$ tel que

$$\|Y^\alpha u\|_{C^\rho(K)} \leq C^{|\alpha|+1} |\alpha|! \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathcal{J}.$$

La preuve du lemme est un simple calcul consistant à montrer, par récurrence sur α, qu'il existe des constantes C_1 et C_2 telles que l'on ait pour tous $\alpha \in \mathcal{J}$ et $\beta \in \mathbb{N}^n$,

$$\|D^\beta Y^\alpha u\|_{C^\rho(K)} \leq C_1^{|\alpha|+1} C_2^{|\beta|} (|\alpha| + |\beta|)!$$

(on a noté $D^\beta = D_1^{\beta_1} \ldots D_n^{\beta_n}$, $D_j = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$ et $|\beta| = \beta_1 + \ldots + \beta_n$).

§ 2. COMPORTEMENT DES OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS ANALYTIQUES DANS LA CHAINE $(E_s)_{s>o}$.

On montre le résultat :

Proposition 2 : Soit P un opérateur pseudo-différentiel analytique d'ordre d ($d \in \mathbb{N}$); alors P est un opérateur singulier de type d dans la chaîne $(E_s)_{s>o}$, c'est-à-dire qu'il existe $s_o > o$ et $C > o$ tels que, pour $0 < s' < s \leq s_o$, $P \in \mathcal{L}(E_s, E_{s'})$ et

$$\|P\|_{\mathcal{L}(E_s, E_{s'})} \leq \frac{C}{(s - s')^d} .$$

Démonstration :

1) Réduction au cas $d = 0$. Admettons provisoirement la proposition 2 dans le cas $d = 0$. Un calcul simple montre que chaque X_j est un opérateur singulier de type 1 dans la chaîne $(E_s)_{s>o}$.

Il existe des opérateurs pseudo-différentiels analytiques Q et R d'ordre -2 et -1 respectivement, tels que :

$$\left(\sum_{j=1}^{r} X_j^2\right) Q = I + R.$$

Si P est d'ordre 1, les opérateurs $P_j = X_j Q P$ sont d'ordre 0, donc bornés dans la chaîne $(E_s)_{s>0}$; il en résulte qu'alors

$$P = \sum_{j=1}^{r} X_j P_j - RP$$

est singulier de type 1 dans $(E_s)_{s>0}$.

Si P est d'ordre $d > 1$, on peut encore terminer la démonstration en utilisant une paramétrix de l'opérateur elliptique $\sum_{j=1}^{r} X_j^{2d}$.

2) <u>Démonstration de la proposition 2 pour $d = 0$</u> . Soit donc P un opérateur pseudo-différentiel analytique d'ordre 0 sur Γ. Soit $u \in E_s$; on veut estimer $X^\alpha Pu$ pour $\alpha \in \mathfrak{J}$; pour α, β dans $\mathfrak{J}$, on note $\beta \leq \alpha$ lorsque β est une sous-suite de α ; on a

$$X^\alpha Pu = \sum_{\beta \leq \alpha} K_\beta^\alpha X^\beta u \quad ^{\blacklozenge} \qquad ,$$

où K_β^α est un opérateur pseudo-différentiel analytique d'ordre 0 de la forme

$$K_\beta^\alpha = [X_{\gamma_1}, [X_{\gamma_2}, \ldots [X_{\gamma_\ell}, P] \ldots]] \text{ pour } \ell = |\alpha| - |\beta| > 0$$

et

$$K_\alpha^\alpha = P.$$

Un simple calcul de majorations montre que la proposition 2 pour $d = 0$ résulte alors du lemme suivant :

<u>Lemme 2</u> : Soit P un opérateur pseudo-différentiel analytique d'ordre 0 sur Γ ; il existe $M > 0$ tel que l'on ait, pour tout $\gamma \in \mathfrak{J}$,

$$\|K_\gamma\|_{\mathcal{L}(C^\rho(\Gamma), C^\rho(\Gamma))} \leq M^{|\gamma|+1} |\gamma|!$$

où $K_\gamma = [X_{\gamma_1}, [X_{\gamma_2}, \ldots [X_{\gamma_{|\gamma|}}, P] \ldots]]$.

$^{\blacklozenge}$ Dans cette somme, chaque terme est répété le nombre de fois que β peut être extrait de α.

Pour démontrer ce lemme on doit décrire plus précisément les opérateurs pseudo-différentiels analytiques sur Γ (cf. [3] [4] [7]) :

a) Le noyau $\tilde{p}$ de P est analytique sur $\Gamma\times\Gamma$ sauf sur la diagonale.

b) Localement dans un ouvert $\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^n$, le noyau est de la forme

$$(3)\qquad p(x,y) = \sum_{k=o}^{\infty} p_k(x,x-y) + r(x)\,\delta(x-y) + q(x,y)$$

où r,q sont analytiques, chaque $p_k(x,z)$ est pseudo-homogène en z de degré $-n+k$, $\int_{S_{n-1}} p_o(x,z)dz = 0$ (S_{n-1} désignant la sphère unité dans $\mathbb{R}^n$) et, pour tout compact $K\subset\mathcal{U}$, il existe $\varepsilon>0$ tel que chaque p_k est analytique dans le domaine

$$\{(x,z)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n\ ;\ \text{dist}\,(x,K)<\varepsilon \text{ et } |\text{Im}\,z|<\varepsilon\,|\text{Re}\,z|\leq\varepsilon^2\}$$

et la série converge uniformément dans ce domaine.

Pour démontrer le lemme 2, il suffit de montrer que pour tout $x_o\in\Gamma$, il existe un voisinage $\tilde{\Omega}_1$ de ce point et $M>0$ tels que l'on ait, pour tout $v\in C^\rho(\Gamma)$ et tout $\gamma\in\mathfrak{J}$,

$$(4)\qquad \|K_\gamma v\|_{C^\rho(\bar{\tilde{\Omega}}_1)} \leq M_1^{|\gamma|+1}|\gamma|!\ |||v|||\ .$$

Soient $\tilde{\Omega}_1\subset\subset\tilde{\Omega}$ et $\varphi\in C_o^\infty(\tilde{\Omega})$ valant 1 sur un voisinage de $\bar{\tilde{\Omega}}_1$; on note ω le support de $1-\varphi$; on a avec $N=\left[\frac{n+1}{2}\right]$,

$$\|K_\gamma(1-\varphi)v\|_{C^\rho(\bar{\tilde{\Omega}}_1)} \leq \sum_{|\alpha|\leq N}\|X^\alpha K_\gamma(1-\varphi)v\|_{L^2(\tilde{\Omega}_1)}$$

$$\leq \|v\|_{L^2(\Gamma)}\sum_{|\alpha|\leq N}\left(\int_{\tilde{\Omega}_1\times\omega}|X^\alpha\tilde{k}_\gamma(x,y)|^2 d\mu(x)d\mu(y)\right)^{1/2}$$

où $\tilde{k}_\gamma$ est le noyau de K_γ et est donné par

$$\tilde{k}_\gamma(x,y) = (X_{\gamma_1}(x)+X^*_{\gamma_1}(y))\dots(X_{\gamma_{|\gamma|}}(x)+X^*_{\gamma_{|\gamma|}}(y))\tilde{p}(x,y)$$

avec $\int_\Gamma X_j u.v\,d\mu = -\int u.\,X_j^* v\,d\mu$, $d\mu$ étant une mesure de Lebesgue analytique sur Γ. Le lemme 1 (avec n remplacé par 2n), les relations ci-dessus et l'analyticité de $\tilde{p}$ sur $\bar{\tilde{\Omega}}_1\times\omega$ impliquent l'existence de $M_2>0$ tel que

$$\|K_\gamma(1-\varphi)v\|_{C^\rho(\overline{\overline{\Omega}}_1)} \leq |||v|||\quad M_2^{|\gamma|+1}|\gamma|\,!\qquad \text{pour tout } \gamma\in\mathfrak{J}\ .$$

Pour démontrer (4) il suffit donc d'obtenir de bonnes estimations de $K_\gamma\varphi v$ et, par cartes locales, le problème peut s'étudier dans un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$ où la description du noyau de P est donnée par (3) ; on peut supposer que $\mathcal{U}$ contient la boule de centre 0 et de rayon 1 et prendre $K=\{0\}$; pour $\varepsilon>0$ correspondant à ce K, on note $\Omega=\{x\in\mathbb{R}^n\ ;\ |x|<\varepsilon/8\}$; il suffit alors de montrer le lemme :

<u>Lemme 3</u> : Il existe $M_3>0$ tel que l'on ait, pour tout $\gamma\in\mathfrak{J}$ et pour tout $u\in C_o^\infty(\Omega)$,

$$\|\int k_\gamma(x,y)\,u(y)\,dy\|_{C^\rho(\overline{\Omega})} \leq M_3^{|\gamma|+1}|\gamma|\,!\,\|u\|_{C^\rho(\overline{\Omega})}\ ,$$

où k_γ désigne dans la carte locale le noyau de l'opérateur K_γ .

La fonction k_γ est de la forme

(5) $$k_\gamma(x,y) = (Y_{\gamma_1}(x)+Y^*_{\gamma_1}(y))\dots(Y_{\gamma_{|\gamma|}}(x)+Y^*_{\gamma_{|\gamma|}}(y))p(x,y)$$

où Y_j est le champ associé à X_j dans $\mathcal{U}$ et Y^*_j est défini par

$$\int_{\mathcal{U}} Y_j u.v\,dx = -\int_{\mathcal{U}} u.Y^*_j v\,dx \qquad \text{pour } u,v \quad \text{dans } C_o^\infty(\mathcal{U})\ .$$

La contribution de q et $r\delta$ (dans (3)) à k_γ donné par (5) fournit, grâce au lemme 1, une estimation conforme à celle annoncée dans le lemme 3 ; on peut donc supposer

$$p(x,y) = \sum_{k=o}^{\infty} p_k(x,x-y)$$

et alors

$$k_\gamma(x,y) = B_{\gamma_1}\dots B_{\gamma_{|\gamma|}}\Big(\sum_{k=o}^{\infty} p_k(x,z)\Big) \qquad \text{où } z=x-y$$

et $B_j=B_j(x,z,D_x,D_z)$ est, pour $1\leq j\leq r$, un opérateur du premier ordre en D_x et $z_k D_{z_\ell}$ pour $1 \leq k,\ell \leq n$, à coefficients analytiques.

Une démonstration assez technique (pour laquelle on renvoie à [2]) conduit à l'existence d'une constante M_4 telle que l'on ait pour $\gamma \in \mathfrak{J}$

$$\int_{|z|<\frac{\varepsilon}{4}} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} B^{\gamma} p_k(x,z) \right\|_{C^{\rho}(\overline{\Omega})} dz \leq M_4^{|\gamma|+1} |\gamma|!$$

ce qui ramène la démonstration du lemme 3 à l'étude de la contribution de p_o ; pour celle-là, on écrit :

$$B_i(x,z,D_x,D_z) = \mathcal{B}_i(x,D_x,zD_z) + \sum_{j=1}^{n} \mathcal{B}_{i,j}(x,z,D_x,D_z)z_j$$

où $\mathcal{B}_i$ est un opérateur du 1er ordre en D_x et $z_k D_{z_\ell}$ pour $1 \leq k,\ell \leq n$ à coefficents analytiques en x et indépendants de z ; $\mathcal{B}_{i,j}$ est un opérateur du 1er ordre en D_x, $z_k D_{z_\ell}$ pour $1 \leq k,\ell \leq n$ à coefficients analytiques.

On a alors : $B^{\gamma} p_o = \mathcal{B}_{\gamma_1} \ldots \mathcal{B}_{\gamma_{|\gamma|}} p_o + \mathcal{R}_{\gamma} p_o = \mathcal{B}^{\gamma} p_o + \mathcal{R}_{\gamma} p_o$

et on montre que la contribution de $\mathcal{R}_{\gamma} p_o$ se majore comme précédemment celle de $\sum_{k=1}^{\infty} B^{\gamma} p_k$. Pour $\mathcal{B}^{\gamma} p_o$, on obtient le résultat :

<u>Lemme 4</u> : Pour tout $\gamma \in \mathfrak{J}$, $\mathcal{B}^{\gamma} p_o(x,z)$ est une fonction analytique dans $\overline{\Omega} \times (\mathbb{R}^n - \{0\})$, homogène de degré $-n$ en z et vérifiant

$$\int_{S_{n-1}} \mathcal{B}^{\gamma} p_o(x,z)\,dz = 0 \qquad \text{pour tout } x \in \overline{\Omega}.$$

De plus, il existe $M_5 > 0$ tel que l'on ait pour $\gamma \in \mathfrak{J}$ et α,β dans $\mathbb{N}^n$

$$\sup_{\substack{x \in \overline{\Omega} \\ z \in S_{n-1}}} |D_x^{\alpha} D_z^{\beta} \mathcal{B}^{\gamma} p_o(x,z)| \leq M_5^{|\alpha|+|\beta|+|\gamma|+1} (|\alpha|+|\beta|+|\gamma|)!$$

Ce lemme permet, sachant estimer la norme d'un opérateur intégral singulier dans les espaces C^{ρ} , de contrôler comme on le souhaitait la contribution de p_o dans le lemme 3.

Ce qui termine l'esquisse de démonstration de la proposition 2.

§ 3. PROBLEME DE CAUCHY

On montre succinctement comment, à l'aide des propositions 1 et 2, on démontre le théorème 1 dans le cas d'une équation scalaire et avec $k = 1$.

On veut trouver u solution de :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = Pf\,(t,x,u) \\ \\ u(0,x) = u_o(x). \end{cases}$$

On peut d'abord se ramener au cas $u_o = 0$. On montre ensuite qu'il existe $R > 0$ et $s_o > 0$ tels que pour tous $0 < s' < s \leq s_o$, l'application

$$u \longmapsto Pf(t,.,u)$$

est définie de $\{u \in E_s ; \|u\|_s < R\}$ dans $E_{s'}$ et vérifie les hypothèses du théorème 1.1 de Nirenberg [9] dans la chaîne (E_s).

L'application de ce théorème donne alors le résultat annoncé.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. S. Baouendi and C. Goulaouic : Cauchy problems for analytic pseudo-differential operators ; Comm. in P.D.E. (1976).

[2] M. S. Baouendi and C. Goulaouic : Nonlinear global Cauchy problems (to appear).

[3] L. Boutet de Monvel : Opérateurs pseudo-différentiels analytiques et problèmes aux limites elliptiques; Ann. Inst. Fourier 19 (1970) 169-268.

[4] L. Boutet de Monvel and P. Kree : Pseudo-differential operators and Gevrey classes ; Ann. Inst. Fourier 17 (1967) 295-323.

[5] Ebin et Marsden : Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid ; Ann. of Math. 92 (1970) p.102-163.

[6] T. Kotake and N. S. Narasimhan : Fractional powers of a linear elliptic operator ; Bull. Soc. Math. France 90 (1962) 449-471.

[7] W. Margulies : Analytic singular integral operators ; Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967) 391-393.

[8] C. B. Morrey : The analytic embedding of abstract real analytic manifolds ; Annals of Math. 68 (1958) 159-201.

[9] L. Nirenberg : An abstract form of the non linear Cauchy-Kovalewsky theorem. J. Differential Geometry 6 (1972) 561-576.

[10] L. V. Ovcyannikov : Non local Cauchy problem in fluid dynamics ; Actes Congrès Intern. Math. Nice 3 (1970) 137-142.

[11] L. V. Ovcyannikov : A non linear Cauchy problem in a scale of Banach spaces ; Dokl. Akad. Nauk. SSSR 200.4 (1971) : Soviet Math. Dokl. 12. 5 (1971) 1497-1502.