Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

D. S. Tartakoff

Sur la régularité locale des solutions de l'équation $\Box_b u = f$

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1975-1976), exp. nº 9, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1975-1976____A10_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91120 PALAISEAU

Téléphone : 941.81.60 - Poste N°

Télex : ECOLEX 69 15 96 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 5 - 1 9 7 6

SUR LA REGULARITE LOCALE DES SOLUTIONS DE L'EQUATION $\Box_b u = f$.

par D. S. TARTAKOFF

Exposé n° IX

13 Janvier 1976

On sait que les opérateurs différentiels sous-elliptiques sont C^∞ hypoelliptiques et même Gevrey-hypoelliptiques (jusqu'à un certain degré) mais en général pas analytique-hypoelliptiques. (voir [1], [2], [4], [6], [7], et [9]). En effet l'exemple de Baouendi et Goulaouic ([1]) perd seulement une demie dérivée et n'est pas hypoelliptique dans la classe de Gevrey G^s si $1 \leq s < 2$. Le but du travail annoncé ici est de démontrer que l'opérateur $\square_b$, le Laplacien complexe "du bord", dans certains cas, en particulier le cas strictement pseudo-convexe, a de meilleures propriétés de régularité. Il faut remarquer que la situation étudiée ici est purement locale ; globalement (dans le cas où la variété est strictement pseudo-convexe et compact), l'opérateur $\square_b$ est analytique hypoelliptique ([10]), comme l'est le problème $\bar\partial$-Neumann ([3]).

On suppose donnée une variété hermitienne M de classe G^s (une fonction g(x) est de classe G^s dans ω si elle est dans $C^\infty(\omega)$ et, au voisinage $\omega_{x_0} \subset \omega$ de chaque point x_0, il existe C tel que $\sup_{\omega_{x_0}} |D^\alpha g(x)| \leq C^{|\alpha|}|\alpha|!^s$ pour tout multi-index α) et de dimension $2n-1$, $n \geq 3$, avec $n-1$ champs de vecteurs Y_j complexes de classe G^s tels que $Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \bar Y_1, \ldots, \bar Y_{n-1}$, T sont indépendants, T aussi de classe G^s, et $T = \bar T$. On suppose que le système $\{Y_j\}$ est formellement intégrable, c'est à dire que

$$[Y_i, Y_j] \; (= Y_i Y_j - Y_j Y_i) \equiv 0 \text{ - modulo } \bar Y_1, \ldots, \bar Y_{n-1}, T$$

Alors on peut définir l'opérateur $\bar\partial_b$ localement sur les fonctions par $\bar\partial_b g = \sum_{i=1}^{n-1} (\bar Y_i g)\bar\zeta_i$ (où $\{\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}, \bar\zeta_1, \ldots, \bar\zeta_{n-1}, \tau\}$ forme une base orthogonale de 1-formes sur M duale à $\{Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \bar Y_1, \ldots, \bar Y_{n-1}, T\}$) ; sur une forme (de type $(0,1)_b$) $\sigma = \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i \bar\zeta_i$, $\bar\partial_b$ est défini par

$$\bar\partial_b \sigma = \sum_{i,j=1}^{n-1} (\bar Y_j \sigma_i)\bar\zeta_i \wedge \bar\zeta_j$$

+ des termes où les σ_i ne sont pas dérivés, termes donnés uniquement par la condition que $\bar\partial_b^2 = 0$, etc. Avec l'aide d'une métrique de classe G^s, on forme les adjoints, $\bar{\partial}_b^*$, des $\bar{\partial}_b$ et ensuite le Laplacien complexe ("du bord")

$$\Box_b = \bar{\partial}_b \bar{\partial}_b^* + \bar{\partial}_b^* \bar{\partial}_b .$$

L'estimation que nous allons utiliser est la suivante

$$(1) \qquad \sum_{j=1}^{n-1} \|Y_j v\|_o^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \|\bar{Y}_j v\|_o^2 + \|v\|_o^2 \leq C(\Box_b v.v)_o + C'\|v\|_{-1}^2$$

pour toute forme v de type $(0,q)_b$, $v \in C_o^\infty(\omega)$, où $\| \ \|_o$ et $\| \ \|_{-1}$ désignent respectivement la norme L^2 et la norme de Sobolev d'ordre -1 dans M. Cette estimation est vraie (d'après Kohn) si les conditions Z(q) et Z(n - q - 1) sont satisfaites ; Z(r) veut dire : la forme de Levi a au moins $r+1$ valeurs propres positives ou au moins $n - r$ valeurs propres négatives, où la forme de Levi, c_{ij} est donnée par

$$[Y_i, \bar{Y}_j] = \sqrt{-1}\, c_{ij} T \quad \text{modulo } Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \bar{Y}_1, \ldots, \bar{Y}_{n-1}$$

(En tout cas, (1) est satisfait dans le cas où M est strictement pseudo-convexe ($c_{ij} > 0$) et $n \geq 3$, $1 \leq q \leq n-1$).

Théorème 1 : Soit $s > 1$ et soit (1) satisfait pour un ouvert $\omega \subset M$. Soit $\det((c_{ij})) \neq 0$ dans $\bar{\omega}$ et $\Box_b u = f \in G^s_{(\omega)}$, $u \in C^\infty(\omega)$. Alors $u \in G^s(\omega)$.

Remarque : Toutes les classes G^s, $s > 1$, contiennent des fonctions à support compact. Dans un certain sens, c'est à cause de cela que le cas s = 1 (analytique réel) reste ouvert. Mais presque les mêmes méthodes donnent le

Théorème 2 : Il existe une classe quasi-analytique $C^L \underset{\neq}{\subset} \bigcap_{s>1} G^s$ telle que, en remplaçant G^s par C^L partout, le résultat du théorème 1 reste vrai.

(Une classe $C^L = C^{\{L(k)\}} \subset C^\infty$ est définie par : $f \in C^L$, s'il existe C_f tel que pour tout α, localement $|D^\alpha f| \leq C_f^{|\alpha|} L(|\alpha|)$). La classe est quasi-analytique si elle ne contient aucune fonction (sauf 0) dans C_o^∞).

Quelques lemmes

Lemme 1 : Pour que u soit dans $G^s(\omega)$, il faut et il suffit qu'il existe une constante C telle que, pour n'importe quelle composition Op(p) de p opérateurs choisis parmi les $\overset{(-)}{Y}_1,\ldots,\overset{(-)}{Y}_{n-1}, T$, $|Op(p)u| \le C^p(p!)^s$.

La démonstration de ce lemme qui dans le cas s = 1 ne dit rien d'autre qu'un changement analytique de variables conserve la classe de fonctions analytiques, se réduit facilement au lemme suivant :

Lemme 2 : Soit dans $\mathbb{R}$, $h(x), g(x) \in G^s$, $s \ge 1$, alors il existe une constante telle que pour tout $r = 1,2,\ldots,$

$$|(h(x)D)^r g(x)| \le C^r(r!)^s .$$

Démonstration : On écrit $(hD)^r g = h\,D(hD)^{r-1}g$; et on prend comme hypothèse de récurrence

$$(2) \qquad (D^a(hD)^b g| \le C_0 C_1^a C_2^b\ (a+b)!^s$$

pour $a > a_0$, $a+b \le r$, où C_1 et C_2 seront choisis de facon convenable mais indépendantesde r. Pour $b = 0$, $a \le r$, on sait que $|D^a g| \le C_g^a a!^s$, C_g indépendant de r. et en général, si $b \le r - a_0$:

$$D^{a_0}(hD)^b g = h\,D^{a_0+1}(h\,D)^{b-1}g + \\ + \sum_{i=1}^{a_0} \binom{a_0}{j}(D^j h)D^{a_0-j+1}(hD)^{b-1}g$$

qu'on peut estimer par :

$$\sup|h|\ C_0 C_1^{a_0+1} C_2^{b-1}(a_0+b)\,!^s + \\ + \sum_{j=1}^{a_0} \binom{a_0}{j} C_h C_h^j\, j\,!^s\, C_0\, C_1^{a_0-j+1}\, C_2^{b-1}\,(a_0-j+b)!^s \\ = C_0 C_1^{a_0} C_2^b\,(a_0+b)!^s H$$

où $H \le C_h(C_1/C_2) + \sum_{j=1}^{a_0} \binom{a_0}{j} C_h(C_h/C_1)^j (C_1/C_2)_j\,!^s(a_0-j+b)!^s$

et si on choisit $C_1 \ge 2C_h$, et $C_2 \ge 2\,C_h C_1$, on obtient $H \le 1$ parce que

$\binom{a_o}{j} \leq \binom{a_o}{j}^s$ si $s \geq 1$. Il est à remarquer que cette démonstration ne marche pas quand $s < 1$.

Lemme 3 : Si la forme de Levi est inversible et $\psi(x)$ est une fonction de classe C^∞ quelconque. on peut modifier T comme suit :

$$T' = \psi T + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j(x) Y_j + \sum_{j=1}^{n-1} \bar{\alpha}_j \bar{Y}_j$$

de façon que pour tout k,

$$[T', \overset{(-)}{Y_k}] \equiv 0 \text{ modulo } \overset{(-)}{Y_1}, \ldots, \overset{(-)}{Y_{n-1}} .$$

Démonstration : Désignant par $|_T$ les composants sur T, on veut que

$$[\psi T + \Sigma \alpha_j Y_j + \Sigma \bar{\alpha}_j \bar{Y}_j , \bar{Y}_k]|_T = 0$$

c'est à dire que

$$\psi[T, Y_k]|_T - Y_k(\psi) T - \Sigma \bar{\alpha}_j c_{kj} T = 0$$

Mais l'inversibilité de $((c_{kj}))$ donne les α_j ponctuellement (et de classe G^s si $\psi \in G^s$).

Démonstration du théorème : On doit considérer deux sortes de dérivations d'ordre p : T^p et celles qu'on va désigner par $Op(p, \geq r)$ avec $r \geq 1$, c'est à dire celles de la forme $Y_{i_1} Y_{i_2}, \ldots, Y_{i_j} T Y_{i_{j+1}} T \ldots$ ou il y a au moins r Y_j. Pour localiser les deuxièmes, on prend $Q \in G^s$ égal à 1 dans $\omega_o \subset\subset \omega$ et à support contenu dans ω . Avec l'hypothèse (1) on peut écrire $Op(p, \geq r) = Y_j Op(p - 1 , \geq r - 1)$ modulo des termes d'ordre $p - 1$ avec moins de T, et pour le terme principal on a

$$\|Y_j Op(p-1, \geq r - 1)u\|^2_{\omega_o} \leq \|Y_j Q \; Op(p - 1, \geq r - 1)u\|^2_{o} \leq$$

$$\leq C(\Box_b Q \, Op(p - 1, \geq r-1)u, \; Q \, Op(p - 1, \geq r - 1)u)_o$$

+ un terme d'ordre $\leq p - 1$

Alors on fait passer les Q à droite (puisque $\Box_b = \Box_b^*$), et on a pour tout v :

$$|\mathrm{Re}(\Box_b Qv, Qv)_o| \leq |\mathrm{Re}(\Box_b v, Q^2 v)_o| + \|Q' v\|_o^2$$

où Q' désigne une dérivée de φ, par exemple $(Y_k Q)$, et en général on va écrire :

$$Q^{(\tau)} = Op(\tau)Q .$$

On laisse ici de côté l'estimation de cette classe de dérivations parce que c'est exactement comme le cas elliptique (l'estimation (1) peut être considérée comme elliptique dans les directions Y_j et $\bar{Y}_j$. Il y a des erreurs, pourtant, de la forme

$$\sum_{i=1}^{p} \binom{p}{\ell} C^{\ell} \| a^{(\ell)} Q^{(1)} T^{p-\ell} u\|_o^2$$

c'est à dire, pour chaque ℓ, il y a $\binom{p}{\ell} C^{\ell}$ termes de la forme indiquée, où a désigne un des coefficients des $\overset{(-)}{Y}_j$ ou de T. Ainsi il faut (et il suffit) de montrer que $\|T^p u\|_{\mathrm{supp}\, Q} \leq CC^p p!^s$, ce qui est en tous cas plus difficile.

<u>L'estimation de $\|T^p u\|$</u>.

On prend une autre $Q \in G^s$, égale à un dans le support de l'autre et à support compact dans ω. D'après le lemme 3, on trouve $T_Q = QT + \Sigma \alpha_j Y_j + \Sigma \beta_j \bar{Y}_j$, de classe G^s tel que $[T_Q, \overset{(-)}{Y}_j] \equiv 0$ modulo $Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \bar{Y}_1, \ldots, \bar{Y}_{n-1}$. Alors, on a, d'après (1) :

$$\sum_{j=1}^{n-1} \|Y_j T_Q^p u\|_o^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \|\bar{Y}_j T_Q^p u\|_o^2 + \|T_Q^p u\|_o^2 \leq C(\Box_b T_Q^p u, T_Q^p u)_o + C' \|T_Q^{p-1} u\|_o^2$$

$$\leq C\{\varepsilon \|T_Q^p u\|_o^2 + C_\varepsilon \|T_Q^p \Box_b u\|_o^2\} + C' \|T_Q^{p-1} u\|_o^2 + A$$

où A désigne ce qui reste :

$$A = |([\Box_b, T_Q^p] u, T_Q^p u)|$$

Les autres termes sont faciles à contrôler parce que le lemme 2 nous donne le contrôle de $\|T_Q^p \Box_b u\|_o^2$ quand $\Box_b u \in G^s$. Le commutateur s'exprime :

$$[\Box_b, T_Q^p] = \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} C^k \underbrace{[[\Box_b, T_Q], T_Q] \ldots]}_{k} T_Q^{p-k}$$

et chaque $[\ldots[[\Box_b, T_Q], \ldots, T_Q]$ s'exprime comme somme de C^k termes, $C = C(n)$ de la forme

$$(Q^{(1)}D)^k a \overset{(-)}{Y}_i \overset{(-)}{Y}_j,\ ((Q^{(1)}D)^k a)' \overset{(-)}{Y}_i \quad \text{ou} \quad ((Q^{(1)}D)^k a)''$$

D'après le lemme 2, on sait qu'on peut majorer ces coefficients des $\overset{(-)}{Y}_j$, et leurs dérivées, de "facon Gevrey" ; on fait passer un $\overset{(-)}{Y}_i$ à droite, on emploie l'inégalité de Schwartz à poids, et on obtient pour tout $\varepsilon > 0$,

$$(1-\varepsilon) I_{p,Q} \overset{\text{def}}{\equiv} (1-\varepsilon)\Big\{\sum_{j=1}^{n-1} \|Y_j T_Q^p u\|_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \|\bar{Y}_j T_Q^p u\|_0$$

$$+ \|T_Q^p u\|_0\Big\} \leq C_\varepsilon\Big\{\|T_Q{}^p \Box_b u\| + \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} C^k C_Q C_Q^k k!^s I_{p-k,Q}\Big\}$$

d'où, avec $\varepsilon = 1/2$, et $\Box_b u = f$,

$$I_{p,Q} < C'\Big\{C_f C_f{}^p p!^s + \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} C'_Q{}^{k+1} k!\ I_{p-k,Q}\Big\}.$$

Maintenant c'est très facile, puisque quand

$$s \geq 1,\ \binom{p}{k} \leq p!^s/k!^s(p-k)!^s \ ;$$

on fait la récurrence :

$$(3) \qquad I_{q,Q} \leq C_0 C_1^q q!^s \qquad q < p$$

et on trouve immédiatement que si on choisit $C_o \geq 2C'C_f$, $C_1 \geq C_f$, $C_o \geq 2C_Q$ et $C_1 \geq 2C_Q$, on a (3) aussi dans le cas $q = p$. Q. E. D.

Le cas quasi-analytique est plus difficile parce que une telle classe ne contient aucune fonction (sauf 0) à support compact. Mais il y a un théorème de Boman qui dit que (localement) l'intersection de toutes les classes non quasi-analytiques (voir théorème 2, ci-dessus) telles que $L(k)/k! \nearrow$ est la classe $C^{L(k)}$ avec $L(k) = k \log k$, et le théorème de Denjoy-Carleman nous dit que cette classe est quasi-analytique. L'idée est de démontrer le théorème 1 avec G^s remplacé par chaque classe C^L où $L(k)/k! \nearrow$; dans ce cas on a aussi l'analogue de $\binom{p}{k} \leq \binom{p}{k}^s$, c'est-à-dire

$\binom{p}{k} \leq \frac{L(p)}{L(k)L(p-k)}$, et les autres considérations sont les mêmes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. S Baouendi, C. Goulaouic : Analyticity for degenerate elliptic equations and applications, Symp. in Pure Math., vol. 23 (1971), 79-84.

[2] M. Derridj : Sur la régularité G^2 au bord des solutions du problème de Neumann pour l'opérateur $\bar{\partial}$, to appear.

[3] M. Derridj, D. Tartakoff : On the global real analyticity of solutions to the $\bar{\partial}$-Neumann problem, to appear .

[4] J. J. Kohn : Harmonic integrals on strongly pseudo-convex manifolds, I and II, Annals of Math. 78, n° 1 (1963), pp. 112-147 and 79 n° 3 (1974) pp. 450-472.

[5] J. J. Kohn : Global regularity for $\bar{\partial}$ on weakly pseudo-convex manifolds, Trans. A. M. S. 181, pp. 273-291.

[6] J. J. Kohn, L. Nirenberg : Non coercive boundary value problems, Comm. Pure Appl. Math. 18 (1965), pp. 443-492.

[7] C. B. Morrey, L. Nirenberg : On the analyticity of the solutions of linear elliptic systems of partial differential equations, Comm. Pure Appl. Math. 10 (1957), pp. 271-290.

[8] M. Sato, T. Kawai, M. Kashiwara : Microfunctions and pseudo-differential equations in vol.287 of Lecture Notes in Mathematics, Springer, 1973.

[9] D. Tartakoff : Gevrey hypoellipticity for subelliptic boundary value problems, Comm. Pure Appl. Math. 26 (1973), pp.251-312.

[10] D. Tartakoff : On the global real analyticity of solutions to $\Box_b$ on compact manifolds, to appear.
