Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

L. Boutet de Monvel

Intégration des équations de Cauchy-Riemann induites formelles

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1974-1975), exp. n° 9, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1974-1975____A8_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

SEMINAIRE GOULAOUIC-LIONS-SCHWARTZ
1974-1975

INTEGRATION DES EQUATIONS DE CAUCHY-RIEMANN INDUITES FORMELLES

par L. BOUTET DE MONVEL

Exposé n° IX

22 Janvier 1975

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$, de frontière $C^\infty \partial\Omega$. L'ensemble des vecteurs tangents (dérivations) $u \in \mathbb{C} \otimes T\mathbb{C}^n$ qui sont tangents à $\partial\Omega$ et anti-holomorphes (i.e. combinaisons linéaires des $\partial/\partial \overline{Z}_j$) est un sous-fibré vectoriel C^∞ T'' du fibré tangent complexe $\mathbb{C} \otimes T\partial\Omega$, qui vérifie la condition d'intégrabilité de Frobenius (i.e. si Z_1, Z_2 sont deux sections C^∞ de T'', le crochet $[Z_1, Z_2]$ est aussi section de T''). Si Ω est strictement pseudo-convexe, les restrictions à $\partial\Omega$ des fonctions holomorphes dans Ω, et dont les dérivées sont toutes continues sur $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ sont exactement les fonctions $f \in C^\infty(\partial\Omega)$ telles que $Z(f) = 0$ pour tout $Z \in T''$. On dit alors que X est muni d'une structure quasi-complexe (cf. [4]).

Plus généralement, soit X une variété réelle C^∞ de dimension $2n-1$. Une structure presque quasi-complexe sur X est la donnée d'un sous-fibré C^∞ T'' du fibré tangent complexe $\mathbb{C} \otimes TX$, de dimension $n-1$ sur C, tel que T'' et son conjugué $T' = \overline{T''}$ soient linéairement disjoints ; elle est intégrable si de plus T'' vérifie la condition d'intégrabilité de Frobenius. Il est naturel de se demander si une structure presque quasi-complexe intégrable provient (localement) d'une structure quasi-complexe, au moins lorsque l'on fait une hypothèse de pseudo-convexité. Il en est bien ainsi si toutes les données sont analytiques réelles, mais un contre-exemple de L. Nirenberg ([7]) montre que c'est faux pour $n = 2$: il existe un champ de vecteurs $Z = a_1 \partial/\partial x_1 + a_2 \partial/\partial x_2 + a_3 \partial/\partial x_3$ à coefficients C^∞ sur R^3, tel que Z, le conjugué $\overline{Z}$, et le crochet $[Z, \overline{Z}]$ soient linéairement indépendants, et tel que les seules solutions de l'équation $Zf = 0$ soient les fonctions constantes (alors que l'équation $Zf = 0$ doit avoir deux solutions de différentielles linéairement indépendantes si Z définit une structure quasi-complexe). Nous montrons ici qu'au contraire le résultat est vrai si $n > 2$, lorsque X est compact et que la structure presque quasi-complexe vérifie en outre une hypothèse de stricte pseudo-convexité. L'hypothèse de compacité est essentielle dans la démonstration ci-dessous, où elle permet de construire l'analogue d'une décomposition de Hodge-De Rham (celle de J. J. Kohn ([4]), que nous précisons ici grâce à notre étude des opérateurs à caractéristiques doubles [2]). Nous ne savons pas si la version locale du théorème du n°2 (i.e. sans hypothèse de compacité) est vraie. L'hypothèse de pseudo-convexité est elle aussi indispensable ; il est probable qu'elle peut être affaiblie, mais il serait de toute façon peu naturel de s'en dispenser complètement.

§ 1. DESCRIPTION DU PROBLEME : LE CAS "TOUT INTEGRE".

Soit Y un ouvert de $\mathbb{C}^n$, de frontière C^∞ X : Y est défini par une inégalité $\rho < 0$, et X par l'égalité $\rho = 0$, où ρ est une fonction $C^\infty : \mathbb{C}^n \to \mathbf{R}$, et la différentielle $d\rho$ ne s'annule en aucun point de X.

Notons T'' le fibré des vecteurs antiholomorphes tangents à X : les sections C^∞ de T'' sont les champs de vecteurs :

$$\overline{Z} = \Sigma a_j \partial/\partial \overline{z}_j$$

à coefficients $a_j \in C^\infty(X)$, tels que $<\overline{Z}, d\rho> = 0$.

T'' est un fibré vectoriel complexe de dimension (complexe) $n-1$

On dit qu'une fonction $f \in C^\infty(X)$ vérifie les équations de Cauchy-Riemann induites (sur X) si $<\overline{Z}, df> = 0$ pour tout vecteur $Z \in T''$.

Il est clair que si $F \in C^\infty(\overline{Y})$ (i.e. F est C^∞ dans Y, et chaque dérivée de F a une limite sur $X = \partial Y$) est holomorphe dans Y, $f = F|X$ vérifie les équations de Cauchy-Riemann induites. Il y a une réciproque du moins lorsque Y est strictement pseudo-convexe ; rappelons que ceci signifie qu'on a pour tout $x \in X$, et pour tout $h \in \mathbb{C}^n$, non nul, tangent à X en x ($h \in T' \quad \overline{T''}$) on a :

$$\Sigma \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_j \partial \overline{z}_n}(x)\, h_j \overline{h}_k > 0$$

<u>Proposition 1</u> : <u>Supposons</u> Y <u>strictement pseudo-convexe au voisinage d'un point</u> $x \in X$. <u>Si</u> $f \in C^\infty(X)$ <u>vérifie les équations de Cauchy-Riemann induites au voisinage de</u> x, <u>il existe</u> $F \in C^\infty(\overline{Y})$ (<u>unique</u>) <u>holomorphe au voisinage de</u> x (<u>dans</u> Y), <u>telle que</u> $f = F|X$.

Ce résultat est maintenant classique (cf. [1], [3], [5]). Je me contenterai d'indiquer le principe de démonstration

Soit $Y(t)$ la "fonction de Heaviside" : $Y(t) = 0$ si $t < 0$, 1 si $t \geq 0$, et soit μ la forme différentielle à coefficients mesures portées par X :

$$\mu = \bar{\partial}(Y(-\rho))$$

où $\bar{\partial}$ est la partie antiholomorphe de la différentielle extérieure : $\bar{\partial}\omega = \Sigma d\bar{z}_j \wedge \frac{\partial\omega}{\partial\bar{z}_j}$.

Si $F \in C^{\infty}(Y)$ est holomophe dans Y, et si $f = F|X$, on a

$$\bar{\partial}(Y(-\rho)F) = f\mu.$$

où par abus $Y(-\rho)F$ désigne le prolongement de F par 0 hors de Y. Par suite si $f = 0$ au voisinage de x, la fonction qui prolonge F par 0 hors de Y est holomorphe au voisinage de x, donc nulle au voisinage de x, d'où l'assertion d'unicité.

D'autre part on vérifie qu'une fonction $f \in C^{\infty}(X)$ vérifie les équations de Cauchy-Riemann induites si et seulement si

$$\bar{\partial}(f\mu) = 0$$

Donc si f vérifie les équations de Cauchy-Riemann induites au voisinage de x, il existe une distribution F_1 telle que $\bar{\partial}F_1 = f\mu$ au voisinage de x. F_1 est holomorphe hors de X (au voisnage de x), et si de plus Y est strictement pseudo-convexe en x, il existe une fonction F_2 holomorphe au voisinage de x qui coïncide avec F hors de Y : on montre alors que $F = F_1 - F_2$ épond à la question.

Nous dirons ancore qu'une fonction $f \in C^{\infty}(X)$ est holomorphe si elle vérifie les équations de Cauchy-Riemann induites. Il est clair que les fonctions holomorphes séparent les points de X, et que pour tout $x \in X$ il existe des fonctions $f_j \in C^{\infty}(X)$ $(j = 1,\dots,n)$ holomorphes, qui définissent une immersion d'un voisinage de x dans $\mathbb{C}^n$ (on peut prendre par exemple les restrictions à X des fonctions holomorphes linéaires).

Nous exploitons enfin le fait que Y est strictement pseudo-convexe. On a d'après la formule de Taylor :

$$\rho(x+h) = \rho(x) + \mathrm{Re}(\Sigma a_j h_j + \Sigma a_{jk} h_j h_k) + \Sigma b_{jk} h_j \overline{h}_k + O(h^3)$$

(avec $a_j = 2\partial\rho/\partial z_j$, $a_{jk} = \partial^2\rho/\partial z_j \partial z_k$, $b_{jk} = \partial^2\rho/\partial z_j \partial \overline{z}_k$) .

Posons alors

$$g_x(x+h) = -\Sigma a_j h_j - \Sigma a_{jk} h_j h_k$$

Pour $x \in X$ et $x+h \in X$, on a $\rho(x) = \rho(x+h) = 0$, donc

$$g_x(x+h) \quad \Sigma b_{jk} h_j \overline{h}_k + O(h^3)$$

Si de plus Y est strictement pseudo-convexe au voisinage de x, on a

$$\Sigma b_{jk} h_j \overline{h}_k \geq c\|h\|^2 \quad \text{si } h \text{ est tangent à } X$$

Nous avons donc démontré le résultat suivant :

<u>Proposition 2</u> : <u>Pour tout</u> $x \in X$ <u>au voisinage duquel</u> Y <u>est strictement pseudo-convexe</u>, <u>il existe une fonction</u> g_x <u>holomorphe</u>, <u>nulle en</u> x, <u>et telle que</u>

$$\mathrm{Re}\, g_x(z) \geq c\|x-z\|^2$$

<u>au voisinage de</u> x, <u>pour</u> $z \in X$.

§ 2. <u>DESCRIPTION DU PROBLEME : LE CAS "ABSTRAIT"</u>.

Soit X une variété réelle C^∞ , compacte, de dimension $2n-1$.

Soit $T'' \subset TX \otimes \mathbb{C}$ un sous-fibré du fibré tangent complexifié, de dimension $n-1$ (sur $\mathbb{C}$), linéairement disjoint du conjugué $T' = \overline{T''}$. Alors $NX \simeq TX/(TX \cap (T'+T''))$ est un fibré réel de dimension 1 sur X. On suppose que

(2.1) T'' est formellement intégrable ; autrement dit si $\overline{Z_1}$, $\overline{Z_2}$ sont deux sections C^∞ de T'', le crochet $[\overline{Z}_1, \overline{Z}_2]$ est encore une section de T''.

(2.2) Si $Z_1, \ldots, Z_{n-1}$ sont des sections de $T' = \overline{T''}$, qui définissent une base de T' au voisinage d'un point $x \in X$, et si N est une section nulle de NX, on a

$$i[Z_j, \overline{Z_k}] = c_{jk} N \;(\text{mod. } T' + T'')$$

où (c_{jk}) est une matrice hermitienne de fonctions C^∞, et est ou bien positive non dégénérée, ou bien négative non dégénérée au voisinage de x.

Cette deuxième condition est l'analogue de la condition de Levi (pseudo-convexité). Elle ne dépend pas du choix des Z_j Si elle est vérifiée. NX est orientable et on peut en choisir une section globale N qui ne s'annule nulle part sur X, telle que la matrice (c_{jk}) soit partout positive non dégénérée.

Nous dirons encore qu'une fonction $f \in C^\infty(X)$ est holomorphe si $\langle \overline{Z}, df \rangle = 0$ pour toute section $\overline{Z}$ de T''.

Théorème : Supposons $n > 2$, alors

1) Les fonctions holomorphes séparent les points de X,

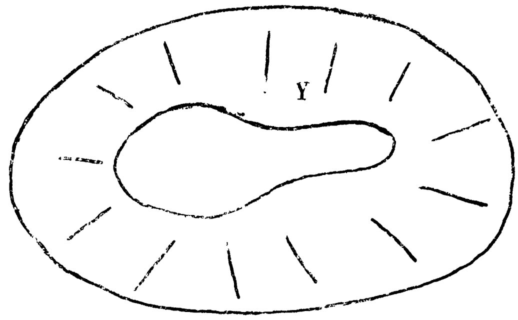
2) Pour tout $x \in X$ il existe n fonctions holomorphes $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ $C^\infty(X)$ telles que $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ définisse une immersion d'un voisinage de x dans $\mathbb{C}^n$ (i. e. les parties réelles et imaginaires des φ_j contiennent un système de coordonnées locales au voisinage de x).

Ainsi pour tout $x \in X$, il existe une immersion Φ d'un voisinage X'_o de x sur le bord X_o d'un ouvert (à frontière C^∞) Y_o de $\mathbb{C}^n$, strictement pseudo-convexe en $\Phi(x)$ (il faut choisir le bon côté de X_o), telle que les coordonnées de Φ soient des fonctions holomorphes : Φ transforme une fonction holomorphe sur X'_o en une fonction holomorphe sur X_o, qui d'après le n°1 est donc un bon modèle local pour la situation ci-dessus.

Globalement, on voit en recollant les modèles locaux du n°1 qu'il existe une variété à bord $\overline{Y} = Y \cup X$ (de bord X), munie d'une strucutre complexe intégrable à coefficients C^∞ jusqu'au bord telle que $\overline{Y}$ soit strictement pseudo-convexe au voisinage de chaque point de X, et que

T'' soit exactement le fibré des vecteurs antiholomorphes tangents à X.

X



Autrement dit, T'' définit une structure presque complexe sur X. Il résulte même d'un théorème de H. Rossi ([8]) que si Y est un voisinage assez petit de X, le spectre maximal Z de l'algèbre O(Y) des fonctions holomorphes de Y est un espace analytique de Stein (à singularités isolées et normales), tel que Z - Y soit relativement compact dans Z : X est donc le bord d'un espace analytique à bord compact, lisse au voisinage de X, et T'' est le fibré des vecteurs anti-holomorphes tangents à X. Ceci précise en partie le lien entre la famille universelle de structures presque complexes intégrables construites par M. Kuranishi [6], et les déformations de singularités isolées.

Le reste de l'exposé est consacré à la démonstration du théorème.

§ 3. LE COMPLEXE ASSOCIE A T''

Si E est un fibré C^∞ sur X, nous noterons $\underset{\sim}{E}$ le faisceau de ses sections C^∞.

Soit $\Omega = \Omega(X) = \underset{\sim}{\Lambda T^* X} \otimes \mathbb{C}$ l'algèbre des formes à coefficients complexes C^∞ sur X. Soit $\mathcal{J} \subset \Omega$ l'idéal engendré par l'orthogonal de T'' dans $\Lambda T^* X \otimes \mathbb{C}$. Dire que T'' est formellement intégrable équivaut à dire que $\mathcal{J}$ est stable par la différentielle extérieure d.

Nous noterons $\overline{D}$ le complexe d'opérateurs différentiels sur $\underset{\sim}{\Lambda T''^*} \simeq \Omega/\mathcal{J}$ déduit de d par passage au quotient : $\overline{D}$ est déterminé, de façon unique, par les conditions

$$\begin{cases} \bar{D}^2 = 0 \\ \bar{D}(\alpha_1\beta) = \bar{D}\alpha_\wedge \beta + \check{\alpha}_\wedge D\beta \qquad (\text{où } \check{\alpha} = (-1)^p\alpha \quad \text{si } \alpha \in \Lambda^p T''^*) \\ \langle \bar{D}\varphi, \bar{Z}\rangle = \langle d\varphi, \bar{Z}\rangle \quad \text{si } \varphi \in C^\infty(X) = \underset{\sim}{\Lambda^o T''^*} \quad , \quad \bar{Z} \in T'' \end{cases}$$

Localement, on peut choisir une base C^∞ $\bar{Z}_1, \dots, \bar{Z}_{n-1}$ de T''. Si $\varepsilon_j (1 \le j \le n-1)$ est la base duale de T''^*, les $\varepsilon_J = \varepsilon_{j_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{j_p}$, où J parcourt l'ensemble des suites croissantes $1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_p \le n-1$, forment une base de $\Lambda T''^*$.

Comme T'' est formellement intégrable, on a

$$[\bar{Z}_j, \bar{Z}_k] = \Sigma\, c^l_{jk}\, \bar{Z}_l$$

Ecrivant $\bar{D}^2\varphi = 0$ pour $\varphi \in C^\infty(X)$, on déduit immédiatement

$$\bar{D}\, \varepsilon_l = -\Sigma\, c^l_{jk}\, \varepsilon_j \wedge \varepsilon_k$$

On a alors

$$\bar{D}(\varepsilon_J) = \Sigma(-1)^{k+1} \varepsilon_{j_1} \wedge \dots \bar{D}\varepsilon_{j_k} \dots \varepsilon_{j_p} \quad ,$$

et, si $\omega = \Sigma f_J\, \varepsilon_J$

$$\bar{D}\omega = \sum_{j,J} \bar{Z}_j f_J \varepsilon_j \wedge \varepsilon_J + \sum_J f_J \bar{D}\varepsilon_J \quad .$$

Dans la situation du n°1, $\bar{D}$ s'identifie au complexe $\bar{\partial}_b$ déduit du complexe de Dolbeault sur l'algèbre $\Omega^{o,\cdot}$ des formes anti-holomorphes à coefficients C^∞ par passage au quotient par l'idéal engendré par ρ et $\bar{\partial}\rho$. Pour cette construction, voir aussi [5], [6]).

On a $e^{-i\varphi}\bar{D}(e^{i\varphi}\omega) = i\bar{D}\varphi_\wedge \omega + \bar{D}\omega$.

Faisant $\xi = d\varphi(x)$, $u = \omega(x)$, on en déduit la formule pour le symbole de $\bar{D}$:

$$\sigma_{\overline{D}}(\xi).u = i\xi\,(\mathrm{mod}\ T''^{*})\wedge u$$

Dans cette situation, l'ensemble (cône) caractéristique est l'ensemble des covecteurs réels $\xi \neq 0$ tels que $\sigma_{\overline{D}}(\xi)$ ne soit pas exact, c'est à dire le sous fibré (vectoriel) réel de codimension $n-1$ de $T^{*}X$ des $\xi \neq 0$ orthogonaux à T'' (donc aussi à $T' = \overline{T''}$). Nous le noterons Σ .

Localement, si T'' a pour base les champs de vecteurs C^{∞} $\overline{Z}_1,\dots,\overline{Z}_{n-1}$, de symboles $\zeta_j = i\langle\overline{Z}_j,\xi\rangle$, Σ est définie par les équations $\zeta_1 = \dots \zeta_{n-1} = \overline{\zeta}_1 = \dots\overline{\zeta}_{n-1} = 0$.

La condition (2.2) (condition de Levi) s'exprime alors comme suit :

(3.1) La matrice hermitienne $\frac{1}{2i}\{\overline{\zeta}_j,\zeta_k\}$ est ou bien définie positive, ou bien définie négative sur Σ.

($\{a,b\}$ désigne le crochet de Poisson : en coordonnées locales $\{a,b\} = \Sigma\,(\frac{\partial a}{\partial\xi_j}\frac{\partial b}{\partial x_j} - \frac{\partial a}{\partial x_j}\frac{\partial b}{\partial\xi_j})$.

Je noterai Σ^{+} (resp. Σ^{-}) la partie de Σ où cette matrice est $\gg 0$ (resp. $\ll 0$) $\Sigma^{\pm}$ est un fibré de fibre $\mathbb{R}^{+}$ (nombres réels > 0) sur X.

Il est commode d'introduire une métrique riemannienne sur X. Nous dirons que la métrique est hermitienne si T' et T'' sont totalement isotropes pour la forme quadratique qui prolonge la métrique à $TX\otimes\mathbb{C}$, ou, ce qui revient au même, si T' et T'' sont orthogonaux pour la forme hermitienne qui prolonge la métrique sur $TX\otimes\mathbb{C}$. Une telle métrique existe toujours. On définit alors le carré de $\overline{D}$ par

$$\square = \overline{D}^{*}\overline{D} + \overline{D}\,\overline{D}^{*}$$

On prouve dans [1] (cf. aussi [5]) le résultat suivant : pour chaque point $(x,\xi)\in\Sigma^{+}$ il existe une transformation canonique ϕ et une transformation intégrale de Fourier F associé à ϕ, elliptique, définis au voisinage de (x,ξ), qui transforme le complexe $\overline{D}$ en complexe

$$D_{+} = \Sigma\, Z_j^{*}\, E_j$$

où E_j est la multiplication extérieure par le j-ième vecteur de base de $\mathbb{C}^{n-1}$ dans $\Lambda\,\mathbb{C}^{n-1}$ et Z_j est l'opérateur pseudodifférentiel

$$Z_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j} + i x_j |D'| \qquad (j = 1,\dots,n-1) \quad \text{sur } \mathbb{R}^{2n-1}$$

($|D'|$ désigne la racine du Laplacien partiel : $\widehat{|D'|f} = (\xi_n^2 + \dots + \xi_{2n-1}^2)^{1/2}\hat{f}$).

Alors, posant $P_o = \Sigma\, Z_j Z_j^*$, on a

$$\square_+ = D_+^* D_+ + D_+ D_+^* = P_o . \mathrm{Id} + F_+ |D'|$$

avec $F_+\big|_{\Lambda^p \mathbb{C}^{n-1}} = p\,\mathrm{Id}_{\Lambda^p \mathbb{C}^{n-1}}$

On y montre de même qu'au voisinage de chaque point de Σ^- il existe une transformation intégrale de Fourier elliptique qui transforme $\bar{D}$ en

$$D_- = \Sigma\, Z_j E_j$$

et qu'on a

$$\square_- = D_-^* D_- + D_- D_-^* = P_o \mathrm{Id} + F_- |D'|$$

avec $F_-\big|_{\Lambda^p \mathbb{C}^{n-1}} = (n-1-p)\,\mathrm{Id}_{\Lambda^p \mathbb{C}^{n-1}}$.

On montre enfin que $P_o + \lambda |D'|$ est hypoelliptique, et possède une paramétrix qui est un opérateur pseudo-différentiel de type 1/2 ♦, sauf si λ est entier pair négatif. Ainsi $\square_+$ (resp. $\square_-$) possède une parametrix, qui est un opérateur pseudo-différentiel de type 1/2, sauf en degré 0 (resp. n-1) . (Les opérateurs Z_j, et les signes, ont été choisis de sorte que le noyau de P_o dans le faisceau des microfonctions, égal au noyau commun des Z_j, est "très gros", décrit par l'opérateur de Hermite H_o de [1]).

♦ i.e. le symbole total $a(x,\xi)$ vérifie des inégalités de la forme

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta a| \leq C_{\alpha\beta} (1 + |\xi|)^{\frac{|\alpha| - |\beta| - 1}{2}}$$

Revenant à la situation initiale, on voit enfin, en utilisant [1], que $\square = \bar{D}^*\bar{D} + \bar{D}\bar{D}^*$ admet une parametrix E, qui est un opérateur pseudo-différentiel de type 1/2, sauf en degré 0 sur Σ^+, et en degré n-1 sur Σ^- (le premier groupe de cohomologie de D à coefficients dans les micro-fonctions est porté par Σ^+, et au contraire le n-1 ième est porté par Σ^-) (E n'est pas l'opérateur obtenu en transportant la paramétrix de $\square_{\pm}$ par opérateur intégral de Fourier elliptique, car on a changé de métrique en cours de route ; il a néanmoins les mêmes propriétés).

Il n'est pas question de reproduire ici la démonstration de ces assertions, qui est trop longue, et se trouve en détail dans [2]. Nous en retiendrons néanmoins la conséquence suivante :
<u>si</u> $n - 1 \neq 1$, <u>c'est à dire si</u> $n > 2$, $\square$ <u>a une parametrix en degré</u> 1.

Comme X est compact, et $\square$ autoadjoint, Ker $\square_1$ est de dimension finie, contenu dans C^∞, et Im $\square_1$ est l'orthogonal (pour le produit scalaire de $L^2(X,T''^*)$) de Ker $\square_1$.

Notons alors E l'opérateur autoadjoint nul sur Ker $\square_1$, et qui induit l'inverse de $\square_1$ sur Im $\square_1$: E est une paramétrix de $\square_1$, donc c'est un opérateur pseudo-différentiel de type 1/2, et en particulier il est continu : $C^\infty \to C^\infty$. En outre

$$\bar{D}\,\bar{D}^*E \text{ est le projecteur orthogonal sur } \mathrm{Im}\,\bar{D} \text{ (en degré 1)}$$
$$\bar{D}^*\bar{D}\,E \text{ est le projecteur orthogonal sur } \mathrm{Im}\,\bar{D}^*$$

(c'est la théorie de Hodge-De Rham pour $\bar{D}$, en degré 1) d'où enfin

<u>Proposition 3</u> : <u>L'opérateur</u> $H = \bar{D}^*E$ <u>est continu</u> : $C^\infty(X,T''^*) \to C^\infty(X)$, <u>et on a</u> $\bar{D}H\omega = \omega$ <u>si</u> $\omega \in \mathrm{Im}\,\bar{D}$.

(Nous avons repris, en la précisant, la décomposition de Hodge-De Rham de J. J. Kohn [4]).

§ 4. FIN DE LA DEMONSTRATION

Par hypothèse, T'' est formellement intégrable. On peut donc trouver au moins des solutions formelles de D. En particulier, pour tout $x \in X$, il existe n fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, telles que les $\bar{D}\varphi_j$ soient nulles d'ordre infini en x, et $\varphi_j(x) = 0$, définissant une immersion d'un voisinage de x dans $\mathbb{C}^n$.

Soit alors X' l'image de ce voisinage de x par $\phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) : X'$ est le bord d'un ouvert Y' de $\mathbb{C}^n$ (au voisinage de $\mathbb{C}(x)$). Dire que les $D\varphi_j$ sont nulles d'ordre infini en x revient à dire que $\phi(T'')$ est tangent d'ordre infini en $\phi(x)$ au fibré des vecteurs antiholomorphes de $\mathbb{C}^n$, tangents à X'. En outre la condition (2.2) implique que Y' est strictement pseudoconvexe au voisinage de $\phi(x)$ (il faut choisir le bon côté). La proposition 2 du n°1 implique donc le résultat suivant :

<u>Proposition 2bis</u> : <u>Pour tout</u> $x \in X$, <u>il existe une fonction</u> g_x <u>telle que</u> $g_x(x) = 0$, <u>que</u> Dg_x <u>soit nulle d'ordre infini en</u> x, <u>et qu'on ait</u> (<u>pour n'importe quelle métrique riemannienne</u>) : $\mathrm{Re}\, g_x(z) \geq c\, d(x,z)^2$ <u>avec</u> $c > 0$.

(On prolonge la fonction du n°1 de sorte que sa partie réelle soit > 0 dans $X - \{x\}$).

Prouvons maintenant la première assertion du théorème : soit

$$\omega_\lambda = \bar{D}\, e^{-\lambda g_x} = -\lambda\, D g_x e^{-\lambda g_x} .$$

Quand λ tend vers $+\infty$, ω_λ tend vers 0 dans $C^\infty(X, T''^*)$, plus vite que toute puissance de $1/\lambda$ (en effet, pour tout N on a $\|\omega_\lambda\| \lesssim \lambda^{1-N} (\lambda d(x,z)^2)^N e^{-c\lambda d(x,z)^2}$, et $t^N e^{-ct}$ est borné pour $t \geq 0$; de même pour les dérivées des coefficients de ω_λ, qui sont des polynômes de λ, dont les coefficients sont sommes de produits de $e^{-\lambda g_x}$ et de fonctions nulles d'ordre infini en x).

D'après la proposition 3, $h_\lambda = H\omega_\lambda$ tend vers 0 (dans $C^\infty(X)$) pour $\lambda \to +\infty$, et on a $\bar{D}h_\lambda = \omega_\lambda$. Soit alors $f_\lambda = e^{-\lambda g_x} - h_\lambda$: on a par construction $\bar{D} f = 0$. En outre on a, pour tout $x' \neq x$, $\lim_{\lambda \to +\infty} f\ (x') = 0$;

et puisque $g_x(x) = 0$, $\lim_{\lambda\to+\infty} f(x) = 1$ donc $f(x') \neq f(x)$ pour λ assez grand.

Prouvons la deuxième assertion : il existe une fonction C^∞ $\phi = (\varphi_1,\ldots,\varphi_n) : X \to \mathbb{C}^n$ avec $\phi(x) = 0$, définissant une immersion au voisinage de x (la dérivée ϕ' est injective) et telle que les $D\varphi_j$ soient nulles d'ordre infini en x. Comme ci-dessus, $\omega_j^\lambda = D(\varphi_j e^{-\lambda g_x})$ tend vers 0 pour $\lambda \to +\infty$, et il existe h_j^λ tendant vers 0 dans $C^\infty(X)$ pour $\lambda \to +\infty$, telle que $\bar{D} h_j^\lambda = \omega_j^\lambda$. Alors $\varphi_j^\lambda = \varphi_j e^{-\lambda g_x} - h_j^\lambda$ est holomorphe ; comme $g_x(x) = \varphi_j(x) = 0$, φ_j et $\varphi_j e^{-\lambda g_x}$ ont mêmes dérivées d'ordre 1 en x ; et comme les dérivées en x de h_j tendent vers 0 pour $\lambda \to +\infty$, la dérivée en x de $\phi^\lambda = (\varphi_1^\lambda,\ldots,\varphi_n^\lambda)$ tend, pour $\lambda \to +\infty$, vers la dérivée de ϕ, donc est injective pour λ assez grand. Ceci achève la démonstration.

Dans [7], Nirenberg suggère de prouver le théorème localement, sans hypothèse de compacité sur X (version locale du théorème). Le théorème prouvé ici est plus facile, où l'hypothèse de compacité assure qu'il y a une décomposition de Hodge-De Rham pour $\bar{D}$.

Ceci dit l'hypothèse de stricte pseudo-convexité est intervenue deux fois de façon essentielle au cours de la démonstration : au n°3, pour la construction de la parametrix de $\bar{D}$, qui est locale, et pour la décomposition de Hodge-De Rham, qui est globale ; et au n°4, pour la constuction de solutions asymptotiques qui, elle, est purement locale.

[1] S. Bochner : Analytic and meromorphic continuation by means of Green's formula. Ann. Math. 44 (1943) 652-673.

[2] L. Boutet de Monvel : Hypoelliptic operators with double characteristics and related pseudo-differential operators. Comm. Pure Appl. Math. 27 (1974).

[3] H. Lewy : On the local character of the solutions of an atypical linear differential equation in 3 variables and a related theorem for functions of 2 complex variables. Ann. Math. 64 (1956) 514-522.

[4] J. J. Kohn : Boundaries of complex manifolds. Proc. of the Conference on Complex Analysis, Minneapolis 1964, 81-94.

[5] J. J. Kohn, H. Rossi : On the extension of holomorphic functions from the boundary of a complex manifold. Ann. Math. 81 (1965) 451-472.

[6] M. Kuranishi : Deformations of isolated singularities and $\bar{\partial}_b$. Preprint, Columbia University.

[7] L. Nirenberg : Conférence au Congrès International sur les Opérateurs Intégraux de Fourier, Nice, Mai 1974. Lecture Notes, Springer Verlag, Berlin.

[8] H. Rossi : Attaching analytic spaces to an analytic space along a pseudo-concave boundary. Proc. of the Conference on Complex Analysis. Minneapolis 1964, 242-253.

[9] M. Sata, T. Kawai, M. Kashiwara : Hyperfunctions and pseudo-differential equations. Lecture Notes 287 (1973) 265-529, Springer Verlag.