SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

V. M. PETKOV

Le problème de Cauchy et la propagation des singularités pour une classe des systèmes hyperboliques non symétrisables

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1974-1975), exp. nº 5, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1974-1975____A4_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (École Polytechnique), 1974-1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (http://sedp.cedram.org) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

SEMINAIRE GOULAOUIC-LIONS-SCHWARTZ
1974-1975

LE PROBLEME DE CAUCHY ET LA PROPAGATION DES SINGULARITES POUR UNE CLASSE DES SYSTEMES HYPERBOLIQUES NON SYMETRISABLES

par V. M. PETKOV

Exposé n° V 4 Décembre 1974

Nous présentons ici des résultats qui étendent à une classe de systèmes hyperboliques non symétrisables des résultats déjà connus pour les équations à caractéristiques de multiplicité constante [1].

En particulier, on introduit une condition, dite condition de Lévi, pour les systèmes, qui se révèle être nécessaire et suffisante pour que le problème de Cauchy soit bien posé. On étudie les noyaux qui résolvent le problème de Cauchy à partir d'opérateurs intégraux de Fourier. Aussi on prouve pour les systèmes étudiés un théorème pour la propagation des singularités, déjà établie dans le cas d'une équation par J. J. Duistermaat - L. Hörmander [4] et J. Chazarain [2].

Nous espérons que nos résultats pourront s'avérer utiles dans l'étude des systèmes hyperboliques singuliers qui apparaissent en théorie des champs quantiques [15].

§ 1. CONDITION DE LEVI POUR LES SYSTEMES HYPERBOLIQUES

Soit X' une variété C^∞ connexe, compacte sans bord de dimension n, $T_- < T_+$, $X = [T_-, T_+] \times X'$ la variété produit et $x = (x_o, x_1, \ldots, x_n) = (x_o, x') \in X$ le point générique de X. On considère un opérateur matriciel

$$P = ID_o + \sum_{j=1}^{n} A_j(x) D_j + B(x)$$

où $D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$, $j = 0, \ldots, n$, I est la $(d \times d)$ matrice d'identité et $A_j(x), B(x)$ sont des matrices $(d\times d)$ avec des éléments de $C^\infty(X)$.

On note $X_t^{\pm}$, X_t les ensembles suivants :

$$X_t^+ = X \cap \{x_o \geq t\},\ X_t^- = X \cap \{x_o \leq t\},\ X_t = X \cap \{x_o = t\} .$$

On se propose d'étudier la problème de Cauchy

$$(C) \qquad \begin{cases} Pu = f \\ u \in \mathcal{D}'(X),\ \text{supp } u \subset X_T^+ \end{cases}$$

Définition 1 : Nous dirons que le problème de Cauchy (C) est bien posé dans $X_T^+, T_- \leq T < T_+$, si les conditions suivantes sont satisfaites :

(E) Pour chaque fonction vectorielle $f \in C^\infty(X)$, $\operatorname{supp} f \subset X_T^+$ il existe une distribution vectorielle $u \in \mathcal{D}'(X)$ qui est solution de (C).

(U) Pour tout $t > T$ si $u \in \mathcal{D}'(X)$ est solution de (C) et $Pu = 0$ dans X_t^- on a aussi $u = 0$ dans X_t^- .

Soit $\xi = (\xi_0, \xi') = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$ les variables duales,

$$A(x,\xi') = \sum_{j=1}^{n} A_j(x)\xi_j, \quad p(x,\xi) = \xi_0 I + A(x,\xi').$$

D'après S. Mizohata [8] (voir aussi [7]) on sait que si (C) est bien posé dans X_T^+ toutes les racines $\xi_0 = \lambda_j(x,\xi')$ de l'équation

$$\det p(x,\xi_0,\xi') = 0 \tag{1}$$

sont réelles pour $x \in X_T^+$, $\xi' \in \mathbb{R}^n$.

D'autre part s'il existe un symbole $S(x,\xi') \in S^0(X \times \mathbb{R}^n)$ (nous utilisons sans les rappeler les notations de L. Hörmander [6]) vérifiant les conditions :

(s_1) $\quad S(x,\xi') = S^*(\alpha,\xi')$,

(s_2) $\quad S(x,\xi') \geq \alpha I$, α est un nombre positif fixe,

(S_3) $\quad S(x,\xi')A(x,\xi') = A^*(x,\xi')S(x,\xi'), x \in X, \ |\xi'| \geq \delta > 0,$

où a^* désigne la matrice adjointe de a, on sait que le problème de Cauchy est bien posé pour P et en plus (C) est bien posé pour chaque opérateur $(P + B_1(x))$, où $B_1(x)$ est une matrice arbitraire avec des éléments de $C^\infty(X)$.

Une condition nécessaire mais non suffisante pour l'existence de symbo'e $S(x,\xi')$ est que la matrice $A(x,\xi')$ doit être semblable à une matrice diagonale à éléments réels en chaque point $(x,\xi') \in X \times \mathbb{R}^n$. Si cette condition n'est pas satisfaite en cas général pour que (C) soit bien posé il faut imposer des conditions sur le symbole sous principal [4].

Dans cet exposé nous allons présenter des résultats, concernant les opérateurs P qui vérifient l'hypothèse

(H) Toutes les racines $\lambda_j(x,\xi')$ de l'équation (1) sont réelles et de multiplicité constante r_j pour $x \in X$, $\xi' \in \mathbb{R}^n \setminus 0$. De plus, nous avons rang $p(x,\lambda_j(x,\xi'),\xi') = d - r_j + \varkappa_j$, où $\varkappa_j$ = const et $\varkappa_j = 0$ si $r_j > 3$

De très nombreux travaux sont consacrés au problème de Cauchy pour les équations hyperboliques à caractéristiques de multiplicité constante (voir pour références [1] [7]). Plus précisément le problème de Cauchy pour les équations de ce type est bien posé si et seulement si l'opérateur satisfait une condition, dite condition de Lévi (il faut remarquer que la nécessité de cette condition était prouvée dans [7] avec une hypothèse d'unicité (U_Γ) plus fort que (U)).

Rappelons cette condition. Soit $P = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)D^\alpha$ un opérateur scalaire, $a_\alpha(x) \in C^\infty(X)$, $a_{m,0,\dots,0} \equiv 1$ et $\xi_0 = \lambda_j(x,\xi')$ les racines de l'équation

$$P_m(x,\xi_0,\xi') = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha = 0.$$

A chaque racine $\lambda_j(x,\xi')$ de multiplicité r_j et à chaque point $\hat{x} \in X$ on peut associer une fonction phase $\varphi_j(x)$, c'est-à-dire la solution de l'équation

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_0} = \lambda_j(x, d_{x'}\varphi_j)$$

dans un voisinage de $\hat{x}$. Alors l'opérateur scalaire P vérifie la condition (L) si pour chaque $f \in C_0^\infty(X)$ et chaque phase φ_j avec $d\varphi_j \neq 0$ sur supp f on a

$$e^{-i\rho\varphi_j}P(f\,e^{i\rho\varphi_j}) = O(\rho^{m-r_j}), \quad \rho \to +\infty. \tag{2}$$

Pour les systèmes hyperboliques une condition de type (2) doit dépendre bien sûr de $\varkappa_j$ parce que si $\varkappa_j = 0$ pour tout j la matrice $A(x,\xi')$ est diagonisable et utilisant (H) on peut construire $S(x,\xi')$, vérifiant (S_1), (S_2), (S_3). On peut alors remarquer que si les vecteurs $R_{k,j}(x,\xi')$, $k = 1,\dots,r_j - x_j$ forment localement une base du noyau de la matrice

$$\mathcal{A}_j(x,\xi') = \lambda_j(x,\xi')I + A(x,\xi')$$

nous n'aurons pour un opérateur matriciel P et $f_k \in C_o^\infty(X)$ que

$$(3) \qquad e^{-i\rho\varphi_j} P\Big(\sum_{k=1}^{r_j - \varkappa_j} f_k(x) R_{k,j}(x,\varphi_x) e^{i\rho\varphi_j}\Big) = O(1), \rho \to +\infty .$$

Afin d'obtenir une asymptotique d'expression [3] de type $O(\rho^{-x_j})$ (ce que nous voudrions) il faut ajouter des termes complémentaires qui sont en gros $O(\rho^{-j})$, $j = 1,\dots,\varkappa_j$.

Dans le cas $r_j = 3$, $\varkappa_j = 1$ nous pouvons choisir localement les vecteurs $R_{k,j}(x,\xi')$, $L_{k,j}(x,\xi')$, $k = 1,2$ de telle manière qu'ils forment des bases dans les noyaux de $\mathcal{A}_j(x,\xi')$ et $\mathcal{A}_j^*(x,\xi')$ et de plus satisfont l'égalité

$$\begin{pmatrix} \langle L_1,R_1\rangle & \langle L_1,R_2\rangle \\ \langle L_2,R_1\rangle & \langle L_2,R_2\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $\langle\ ,\ \rangle$ désigne la produit scalaire dans $\mathbb{C}^d$. Maintenant nous allons formuler notre condition de Lévi pour les opérateurs vérifiant (H).

<u>Définition 2</u> : Nous dirons que l'opérateur P vérifie la condition de Lévi (L) si pour <u>chaque</u> $f \in C_o^\infty(X)$ et <u>chaque phase</u> $\varphi_j(x)$ avec $d\varphi_j \neq 0$ sur supp f <u>il existe</u> une fonction scalaire $g_j(x;\varphi,f)$ et des fonctions vectorielles $V_{k,j}(x;\varphi,f)$, $k = 1,\dots,\varkappa_j$, telles que l'on a

$$e^{-i\rho\varphi_j} P\Big[\Big(f(x)R_{1,j}(x,\varphi_{x'}) + g_j(x;\varphi,f)R_{2,j}(x,\varphi_{x'}) + \sum_{k=1}^{\varkappa_j} V_{k,j}(x;\varphi,f)\rho^{-k}\Big) e^{i\rho\varphi_j}\Big] = O(\rho^{-\varkappa_j}) , \rho \to +\infty .$$

Nous donnerons quelques exemples dans le cas $n = 1$.

Exemple 1

$$P = ID_o + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{pmatrix} D_1 + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

La condition (L) est satisfaite si et seulement si $b_{21}(x) \equiv 0$.

Exemple 2

$$P = ID_o + \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix} D_1 + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

La condition (L) est équivalente aux conditions suivantes :

$$\begin{cases} b_{31}(x) = 0 \ , \quad b_{21}(x) + b_{32}(x) = 0 \ , \\ \dfrac{\partial}{\partial x_o}(b_{21}(x)) + b_{11}(x)b_{32}(x) + b_{21}(x)b_{33}(x) = 0 \end{cases}$$

Exemple 3

$$P = I D_o + \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix} D_1 + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

La condition (L) est équivalente aux consitions suivantes :

$$\begin{cases} b_{21}(x) = 0 \ , \\ b_{23}(x_o', x_1) b_{31}(x_o'', x_1) = 0 \quad \text{si } |x_o' - x_o''| \leq \delta \ , \ \delta > 0. \end{cases}$$

Remarque 1 : Dans le cas $r_j = 2$, $\varkappa_j = 1$ la condition (L) coïncide avec les conditions dans [3], [5].

Remarque 2 : On peut poser la condition (L) pour des opérateurs pseudo-différentiels $P(x, D_x) \in L^j(X)$ pour lesquels le symbole principal $p(x,\xi)$ satisfait (H) et les variétés X_t ne sont pas caractéristiques .

§.2 LE PROBLEME DE CAUCHY POUR LES OPERATEURS VERIFIANT L'HYPOTHESE (H)

Le résultat fondamental est le suivant :

Théorème 1 : Soit P un opérateur vérifiant l'hypothèse (H). Alors

(i) si, pour tout j $\chi_j > 0 \Rightarrow r_j - \chi_j = 1$, la condition (L) est nécessaire et suffisante pour que (C) soit bien posé.

(ii) s'il y a au moins un j_o tel que $\chi_{j_o} > 0 \Rightarrow r_{j_o} - \chi_{j_o} = 2$ la condition (L) est suffisante pour que (C) soit bien posé. Elle est aussi nécessaire si les éléments de $A_j(x)$, $B(x)$ sont des fonctions analytiques dans X_T^+ .

De plus, si (L) est satisfaite, pour toute $f \in C^\infty(X)$, supp $f \subset X_T^+$, il existe une solution $u \in C^\infty(X)$ de (C).

Idée de la démonstration des conditions nécessaires

On peut prouver (voir [7] pour les détails) que si (C) est bien posé dans X_T^+ pour tout $K \subset\subset X$ il existe une constante C et des nombres $p,q \in \mathbb{Z}$ (C, p, q dépendent de K) tels que pour tout $t > T$, toute $u \in C_o^\infty(K_T^+)$ on a

$$\|u\|_{H_p(K_t^-)} \leq C\|Pu\|_{H_q(K_t^-)} ,$$

où $H_s(K_s^-)$ sont les espaces de Sobolev. Voilà pourquoi pour démontrer que la condition (L) est nécessaire, il suffit, sous l'hypothèse que (L) n'est pas satisfaite en un voisinage W d'un point $y \in X$, de construire une solution asymptotique

$$u_\rho(x) = \sum_{k=0}^{N} v_k(x)\rho^{-\frac{k}{\mu}} \exp i\, E(x,\rho),$$

(où $\mu \in N$, $E(x,\rho) = \sum_{j=0}^{\mu-1} \ell_j(x)\rho^{\frac{\mu-j}{\mu}}$, $v_k(x) \in C_o^\infty(W)$ sont des fonctions vectorielles , $\ell_j(x) \in C^\infty(W)$ sont des fonctions scalaires), qui satisfait les conditions suivantes :

(A_1) Pour N_1 assez grand

$$P(u_\rho) = O(\rho^{-N_1}) \exp i\, E(x,\rho),\ \rho \to +\infty .$$

(A_2) Pour $x \in W^-_{y_0}$ on a

$$\operatorname{Im} E(x,\rho) \geq \varepsilon \rho^\sigma (y_0 - x_0 + |y' - x'|^2),\ \varepsilon > 0,\ \sigma > 0$$

Pour construire μ_ρ nous avons utilisé <u>une méthode de "pas vides"</u> [9]. Cette méthode est bien applicable quand il faut trouver une solution asymptotique pour un opérateur avec des <u>blocs de Jordan fixes</u> (ce qui sera le point essentiel dans la construction d'une parametrix pour (C)).

Pour l opérateur dans l'exemple 1 on cherche u_ρ dans la forme

$$u_\rho = \sum_{k=0}^{N} v_k(x) \rho^{-\frac{k}{2}} \exp i\, (x_1 \delta\rho + \ell(x) \rho^{1/2}),\ \delta = \pm 1.$$

Nous posons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors si $v_0 = \sigma^0 R$ (avec σ^0 σ^1 nous noterons des fonctions scalaires) on a pour v_1 le système

$$-\delta A v_1 = \sigma^0 \ell_{x_0} R$$

qui possède une solution sans aucune condition sur $\ell(x), \sigma^0(x)$ ce que nous désignerons comme "pas vide". Si $v_1 = -\delta\, \sigma^0 (\ell_{x_0}) h + \sigma^1 R$ nous aurons pour v_2 le système

$$\delta A v_2 = \sigma^0 [\delta (\ell_{x_0})^2 h + \delta \ell_{x_0} \ell_{x_1} R - BR] - \sigma^1 \ell_{x_0} R$$

Pour résoudre ce système, il faut déteminer $\ell(x)$ par l'équation

$$(\ell_{x_0})^2 (x) = \delta\, B_{21}(x) \quad .$$

En supposant $b_{21}(y) \neq 0$, nous pourrons trouver $\ell(x)$ dans un voisinage W de y, et en choisissant δ nous obtiendrons (A_2). Ensuite, on peut déterminer les fonctions $v_k(x)$ en suivant une méthode standard.

Dans le cas général, pour surmonter les difficultés techniques on emploie un changement de variables convenable et une transformation d'opérateur avec des opérateurs pseudo différentiels elliptiques.

Idée de la démonstration des conditions suffisantes

On se propose de construire une paramétrix pour le problème de Cauchy. Plus précisément pour tout $t \in [T, T_+]$ et $(x_0 - t)$ assez petit on cherche des opérateurs intégraux de Fourier

$$E(t) \in I^{\chi - \frac{1}{4}}([t, x_0] \times X', X'; C(t))$$

à valeurs matrices $(d \times d)$, où $\chi = \max \chi_j$ et $C(t)$ est une relation canonique décrite ci-dessous.

Si nous avons p racines $\lambda_j(x, \xi')$ distinctes, on pose

$$C(t) = \bigcup_{j=1}^{p} C_j(t) \quad ,$$

$$C_j(t) = \{(x, \xi, y', \eta') \in (T^*(X) \setminus 0) \times (T^*(X') \setminus 0) \; ;$$

(x, ξ) appartienne à la bande bicaractéristique de $q_j = \xi_0 - \lambda_j(x, \xi')$ issue de $(t, y', \lambda_j(t, y, \eta'), \eta'))$ (on renvoie pour les détails à [1]).

L'opérateur $E(t)$ doit satisfaire les conditions :

(P_1) $\qquad PE(t) \equiv 0,$

(P_2) $\qquad \gamma_0 E(t) \equiv I,$

où γ_0 désigne la trace sur X_t et le signe $\equiv$ signifie égalité des opérateurs modulo un opérateur à noyau C^∞ (la trace γ_0 sur X_t existe car X_t n'est pas caractéristique pour P).

Soit $(y, \eta') \in T^*(X') \setminus 0$, V un voisinage conique de (y, η'), $Q \in L^0(X')$, $WF'(Q) \subset V$ (on identifie dans la suite les variétés X_t et X'). Alors on peut se ramener (en utilisant une partition de l'unité) à la construction d'une paramétrix microlocale, c'est-à-dire $E(t)$ satisfaisant les conditions (P_1) et

$$(P_3) \qquad \gamma_o E(t) \equiv Q$$

Afin de simplifier le symbole principal de $P(x,\xi)$ on emploie des opérateurs $C,\ D \in L^o(X\times \mathbb{R}^n)$ à valeurs matrices $d\times d$ tels que

$$(t,y,\eta') \notin WF'(I - CD)$$

et de plus le symbole principal de $\widetilde{P} = D\,P\,C$ a une forme de Jordan locale. On prouve qu'on peut à partir d'une paramétrix de $\widetilde{P}$ trouver une paramétrix de P.

Soit $Q_\mu \quad = 1,\dots,d$ des vecteurs colonnes de Q. Alors on cherche $\widetilde{E}(t)$ comme opérateur matrice avec des vecteurs colonnes $E_\mu(t)$ qui satisfait les conditions

$$\widetilde{P}E_\mu(t) \equiv 0$$
$$\gamma_o E_\mu(t) \equiv Q_\mu$$

Enfin chaque $E_\mu(t)$ a une forme

$$E_\mu(t) = \sum_{j=1}^{p} E_{\mu,j}(t)$$

avec

$$E_{\mu,j}(t) \in I^{\varkappa_j-\frac{1}{4}}([t,x_o]\times X',\ X';C_j(t))$$

La construction de $E_{\mu,j}$ se ramène à la construction d'une solution asymptotique

$$\sum_{k=0}^{\infty} F_{\mu,j,k}(x,\xi')e^{i\varphi_j(x,\xi')}$$

où $\varphi_j(x,\xi')$ est la solution de l'équation

$$\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_o} = \lambda(x,d_x,\varphi_j),\quad \varphi_j\big|_{x_o=t} = \sum_1^n x_j\xi_j\ ,$$

$F_{\mu,j,k} \in S^{\varkappa_j - k}(X \times \mathbb{R}^n)$.

Les symboles $F_{\mu,j,k}$ sont déterminés pas à pas par des systèmes algébriques. La condition (L) donne qu'il existe quelques "pas vides". Alors le point essentiel est la démonstration que les conditions nécessaires et suffisantes pour la résolubilité des systèmes algébriques qu'on obtient dans les "pas non vides" sont des équations ou systèmes le long du champ hamiltonien de q_j.

Remarque 3 : Si l'opérateur P vérifie la condition (L) il en est de même pour son adjoint formel P^{*}. Cela permet d'employer une technique standard pour démontrer l'unicité du problème de Cauchy.

Remarque 4 : Evidemment la condition (L) se généralise dans les cas $r_j > 3$, $r_j - \varkappa_j = 1$. Dans la construction de la paramétrix E(t) il n'existe que des difficultés techniques. D'autre part dans les cas $r_j > 3$, $r_j - \varkappa_j \geq 2$ il y a des phénomènes nouveaux et il faut chercher peut être la condition (L) dans une autre forme.

Remarque 5 : Le théorème 1 dans une forme locale était annoncé dans [10]. [11]. Les démonstrations paraîtront dans [12],[13].

§.3 PROPAGATION DES SINGULARITES

Soit $u = (u_1, \ldots, u_d)$ une distribution vectorielle $WF(u) = \bigcup_{j=1}^{d} WF(u_j)$. Si nous posons Pu = f on sait [6] que

$$WF(u) \setminus WF(f) \subset (\det p)^{-1}(0) .$$

Nous préciserons la structure de l'ensemble $WF(u) \setminus WF(f)$ dans le théorème suivant qui est analogue aux théorèmes de [4], [2] pour des équations.

Théorème 2 : Soit P un opérateur vérifiant les conditions (H), (L) et en plus $\varkappa_j \leq 1$ pour $\forall j$. Alors pour $u \in \mathcal{D}'(X)$ et Pu = f l'ensemble $WF(u) \setminus WF(f)$ est inclus dans $(\det p)^{-1}(0)$ et est invariant par le flot bicaractéristique (étant entendu que sur $q_j^{-1}(0)$ on prend le flot associé au champ hamiltonien H_{q_j}).

Ce théorème a été démontré en collaboration avec G. Popov [14].

Idée de la démonstration

Soit $(\hat{x},\hat{\xi}) \in WF(u)\setminus WF(f)$ il suffit de montrer que sur la bicaractéristique qui le contient, il y a un voisinage de ce point inclus dans $WF(u)\setminus WF(f)$.

Soit $\hat{\xi}_o = \lambda_1(\hat{x}.\hat{\xi}')$, $\varkappa_1 = 1$. Alors dans un voisinage conique de $(\hat{x},\hat{\xi})$ on peut se ramener au cas où $d = r_1$ et le symbole principal de P a une forme de Jordan. Ensuite on peut trouver une transformation canonique T d'un voisinage conique de $(\hat{x},\hat{\xi})$ sur un voisinage conique de $(\hat{z},\hat{\zeta}) \in T^*(\mathbb{R}^{n+1})\setminus 0$ telle que

$$(\zeta_o \circ T)(x,\xi) = \xi_o - \lambda_1(x,\xi')$$

D'après J. J. Duistermaat - L. Hörmander [4] il existe des opérateurs intégraux de Fourier

$$A \in I^o(X,\mathbb{R}^{n+1};\Gamma') \ , \quad B \in I^o(\mathbb{R}^{n+1},X;(\Gamma^{-1})')$$

tels que

$$(\hat{x},\hat{\xi}) \notin WF'(AB-I) \text{ et } (\hat{z},\hat{\zeta}) \notin WF'(BA-I),$$

où Γ est une partie conique fermée de graphe de T.

Soit $\widetilde{P} = BPA$ son symbole principal est

$$\begin{pmatrix} \zeta_o & & q(z,\zeta) \\ & \ddots & \\ & & \zeta_o \end{pmatrix} = \zeta_o I + Q(z,\zeta),$$

où $q(z,\zeta) \in S^1(\mathbb{R}^{n+n}\times \mathbb{R}^{n+1})$. Bien sûr on prouve que la condition (L) est invariante par toutes les transformations employées.

Soit $\widetilde{B} = \widetilde{P} - ID_o$, $\widetilde{B} - Q - \widetilde{B}_o \in L^{-1}(\mathbb{R}^{n+1})$. Pour se débarasser de l'opérateur $\widetilde{B}$ on prouve l'existence d'un opérateur $G(z,D) \in L^1(\mathbb{R}^{n+1})$ elliptique à valeurs matrices $(r_1 \times r_1)$ tel que

$$\widetilde{P}G - GID_o \in L^{-\infty}(\mathbb{R}^{n+1}) \ .$$

Le point essentiel c'est de démontrer que l'équation matriciel

$$\frac{\partial g(z,\zeta)}{\partial z_o} = \frac{1}{i}(Q(z,\zeta) + \tilde{B}_o(z,\zeta))g(z,\zeta)$$

a une solution $g(z,\zeta) \in S^1(\mathbb{R}^{n+1})$. Posons

$$M(z,\zeta) = \frac{1}{i}\int_{z_o}^{z_o} (Q(\tau,z',\zeta) + \tilde{B}_o(\tau,z',\zeta))d\tau .$$

On prouve que la condition (L) entraîne $(M(z,\zeta))^k \in S^1(\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1})$ pour tout $k = 1,2....$ et on cherche $g(z,\zeta)$ dans la forme

$$g(z,\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(M(z,\zeta))^k}{k!}$$

Ensuite le théorème est ramené à l'opérateur $I\,D_o$ pour lequel le résultat est bien connu [4].

Si $x_1 = 0$ la démonstration est pareille et plus simple.

Remarquons enfin qu'à partir de résultats obtenus , on peut étendre à l'opérateur P les résultats de [4] concernant la résolubilité de l'équation $Pu = f$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Chazarain : Annales de l'Institut Fourier, 24- 1 (1974), 173-202.

[2] J. Chazarain : Annales de L'institut Fourier, 24- 1 (1974), 203-223.

[3] I. Demay :C. R. Acad. Sc., 278 (1974), 771-773 .

[4] J. J. Duistermaat et L. Hörmander : Acta Math., 128 (1972), 183-269.

[5] D. Gourdin : C. R. Acad. Sc., 278 (1974), 269-272.

[6] L. Hörmander : Acta Math., 127, 1-2 (1971). 72-183.

[7] V. Ivrii et V. Petkov : Uspehi Math. nauk, 29. 5 (1974), 1-70.

[8] S. Mizohata : J. Math. Kyoto Univ.. 1 (1961), 109-127.

[9] V. Petkov : Thèse, Université de Moscou (1972).

[10] V. Petkov : Dokl. Akad. Nauk SSSR, 209 (1973), 795-797.

[11] V. Petkov : Exposé au II Conf. de Société Math. de Bulgarie, Sofia (1974), 167-173.

[12] V. Petkov : Conditions nécessaires pour que le problème de Cauchy soit bien posé pour les systèmes hyperboliques non symétrisables, à paraître dans Travaux de Séminaire I. G. Petrovskij, Moscou (1975).

[13] V. Petkov : Parametrix pour le problème de Cauchy pour une classe des systèmes hyperboliques, à paraître.

[14] V. Petrov, G. Popov : Propagation des singularités pour les systèmes hyperboliques non symétrisables, à paraître.

[15] A. Wightman : Proceedings of symposia in Pure Math., AMS, v.23 (1973), 441-477.