Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

F. TREVES

Équations elliptiques fuchsiennes du second ordre et valeurs propres asymptotiques (suite)

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1974-1975), exp. n° 2, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1974-1975____A2_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - L I O N S - S C H W A R T Z

1 9 7 4 - 1 9 7 5

EQUATIONS ELLIPTIQUES FUCHSIENNES DU SECOND ORDRE ET VALEURS PROPRES ASYMPTOTIQUES

(suite)

par F. TREVES

Exposé n° II

13 Novembre 1974

§ 1. REPRESENTATION DE L'OPERATEUR A L'ETUDE SOUS FORME DE MATRICE TRIANGULAIRE

Dans ce paragraphe, nous montrons comment l'on tire parti des relations de concatenation (30) de l'exposé précédent. Rappelons que l'on a :

(1) $$P^j = (X^j t - \sigma^j)Y^j + c^j \quad ,$$

(2) $$Y^j P^j = P^{j+1} Y^j + R^j,$$

(3) $$R^j = [Y^j, c^j] = O(t^\infty),$$

et $P^o = P$. Nous raisonnerons systématiquement, dans l'espace des microfonctions $\mathfrak{J}/\mathcal{E}$ (voir exposé n°1, (3)). Nous décomposons cet espace en somme directe

(4) $$\mathfrak{J}/\mathcal{E} = (\mathrm{Ker}\ Y^j) \oplus (\mathrm{Im}\ Y^{j*}) \quad ,$$

où Im Y^{j*} est identifiée à l'image du projecteur orthogonal $I - \pi_{Y^j}$ (exp. n°I, (18)). En passant il faut noter que Y^{j*}, l'adjoint de Y^j, est hypoelliptique, c'est-à-dire que la préimage de $\mathcal{E}$ par Y^{j*} est contenue dans $\mathcal{E}$ (du moins au voisinage de $t = 0$; nous négligeons systématiquement ce qui se passe pour t grand). Nous composons les deux membres de (2) avec K_{Y^j} par la droite (Exp. n°I, (16)). En tenant compte de (3), nous pouvons appliquer la prop. 1 de l'exposé n° I : ainsi $R^j K_{Y^j}$ is regularizing. On déduit donc de (2) :

(5) $$P^j \mathrm{Ker}\ Y^j \subset \mathrm{Ker}\ Y^j \qquad (\mathrm{mod}\ \mathcal{E}!).$$

On pose

(6) $$S^o = I \ , \quad S^j = Y^{j-1} \ldots Y^o (j \geq 1),$$

(7) $$M^j = \mathrm{Im}\ S^{j*} \ , \ N^j = M^j \cap \mathrm{Ker}\ S^{k+1},$$

donc

(8) $$M^j = N^j \oplus M^{j+1}.$$

On note que Ker S^{j+1} est la préimage de Ker Y^j par S^j et donc, puisque Im S^{j*} est "l'orthogonal" de Ker S^j,

(9) S^j induit une bijection de N^j sur Ker Y^j .

D'autre part, trivialement S^j applique bijectivement $M^j = (\mathrm{Ker}\ S^j)^{\perp}$ sur $\mathfrak{J}/\mathcal{E}$ (S^j est surjective ; chaque Y^k est surjectif).

En tout cas, quelque soit $j = 0, 1, \ldots,$

(10) $$\mathfrak{J}/\mathcal{E} = N^o \oplus \ldots \oplus N^j \oplus M^{j+1}.$$

D'autre part, on déduit de (2) :

(11) $$S^j P = P^j S^j + R'^j,$$

où l'on a :

(12) $$R'^j = \sum_{k=1}^{j} R_k^j\, j_t^{j-k} \quad , \ R_k^j \in \Psi^k.$$

On va démontrer le résultat suivant :

(13) $\forall$ j, k $\geq$ 1, la restriction de R'^j à Ker S^k est régularisante.

On se base sur les lemmes suivants :

Lemme 1 : Soient $w \in \Psi^o$, $Z = Y - w$. Etant donné n'importe quel opérateur $F \in \Psi^m (m \in \mathbb{R})$ il en existe un autre, $E \in \Psi^m$, tel que

(14) $$Y E K_Z = F K_Z \quad \text{(mod opérateurs régularisants)}.$$

Démonstration : On a

$$YEK_Z = (E_t - [b,E])K_Z + E\, Y\, K_Z.$$

Comme $YK_Z = wK_Z$, il suffit de résoudre

$$E_t - [b,E] + Ew = F . \tag{15}$$

Ceci peut se faire (en regardant les parties homogènes successives des deux membres), mais, en général, seulement modulo des éléments de Ψ^m plats en $t = 0$. Soit R un tel élément, et supposons que (15) soit vérifié avec $F + R$ au lieu de F. On aura $YEK_Z = (F+R)K_Z$. Mais RK_Z est régularisant, d'après la proposition 1 de l'exposé n° I.

c.q.f.d.

<u>Lemme 2</u> : <u>Soient</u> $j, k \in \mathbb{Z}_+$. <u>Quelque soit</u> $F \in \Psi^m$ <u>il existe un autre opérateur</u> $E_{jk} \in \Psi^m$ <u>tel que</u>

$$S^j E_{jk} K_{Y^k} = F K_{Y^k} \tag{16}$$

Démonstration par récurrence sur $j = 0,1,\ldots$ ($S^0 = \mathrm{Id}$), à partir du lemme 1, en notant que $S^j = Y^{j-1} S^{j-1}$.

<u>Démonstration de (13)</u> : (13) est évident lorsque $k = 0$. On raisonne par récurrence sur $k = 0,1,\ldots$; on applique le lemme 2 : soit $u \in \mathrm{Ker}\, S^{k+1}$, donc tel que $S^k u \in \mathrm{Ker}\, Y^k$, i.e., $S^k u = K_{Y^k} v$ pour un certain v. Il existe E_k tel que $S^k E_k K_{Y^k} = K_{Y^k}$, donc $u - E_k K_{Y^k} v = u_1 \in \mathrm{Ker}\, S^k$. La récurrence sur k implique $R'^j u_1 \in \mathcal{E}$; et $R'^j E_k K_{Y^k}$ est régularisant d'après la proposition 1 de l'exposé n°I.

De (11) et (13) on tire (au sens de $\mathfrak{Z}/\mathcal{E}$)

$$P\, \mathrm{Ker}\, S^j \subset \mathrm{Ker}\, S^j \quad (j = 1,2,\ldots). \tag{17}$$

Ceci entraîne que dans la décomposition en somme directe (10) P est représenté par une matrice triangulaire. En effet, d'après (17), $PN^{j-1} \subset \mathrm{Ker}\, S^j$ n'intersecte $M^j = (\mathrm{Ker}\, S^j)^{\perp}$ qu'à l'origine. Donc, pour que P, opérant sur $\mathfrak{Z}/\mathcal{E}$, soit résoluble, ou bien soit hypoelliptique, il faut et il suffit que chaque élément diagonal de la matrice le représentant le soit. En particulier ceci s'applique aux restrictions de P aux sous-espaces $N^j (j = 0,1,\ldots)$ successifs. Comme $N^j \subset \mathrm{Ker}\, S^{j+1}$ d'après (13) nous savons que la restriction de R'^j (voir 11)) à N^j est régularisante.

Donc, mod $\mathcal{E}$, sur N^j nous avons $S^jP = P^jS^j$. Nous appliquons (9) et concluons que

(18) $\quad$ sur Ker Y^j, $\quad S^jP(S^j)^{-1} = P^j \quad (\text{mod } \mathcal{E})$.

On applique alors le résultat suivant :

Lemme 3 : Si $[Y,c]$ est plat en $t = 0$, on a

(19) $$c(x,t,D_x)\widetilde{K}_Y = \widetilde{K}_Y c(x,0,D_x) \text{(modulo opérateurs régularisants)}.$$

On a posé $\widetilde{K}_Y = K_Y\, \rho(x,D_x)$ avec les notations (16), exposé n°1. On a $Y\widetilde{K}_Y = 0$, pour $t \geq 0$; $\widetilde{K}_Y|_{t=0} = \text{Id}$.

Démonstration . On a

$$Y(c\widetilde{K}_Y) = [Y,c]\widetilde{K}_Y \quad \text{qui est régularisant ,}$$

et $c\widetilde{K}_Y|_{t=0} = c(x,0,D_x)$, d'où, par solution du problème de Cauchy, $c\widetilde{K}_Y = \widetilde{K}_Y\, c(x,0,D_x)$.

c.q.f.d.

D'après le lemme 3 et (18)

(19') $$S^jP(S^j)^{-1}\widetilde{K}_{Y^j} = P^j\widetilde{K}_{Y^j} = c^j(x,t,D_x)\widetilde{K}_{Y^j} = \widetilde{K}_{Y^j}\, c^j(x,0,D_x).$$

Puisque $(\rho^*\rho)^{-1}\, \widetilde{K}^*_{Y^j}\, \widetilde{K}_{Y^j} = \text{Id}$ (de $\mathcal{E}'(\Gamma)$), on conclut :

(20) $$(\rho^*\rho)^{-1}\widetilde{K}^*_{Y^j}\, S^jP(S^j)^{-1}\widetilde{K}_{Y^j} = c^j(x,0,D_x) \quad .$$

Ainsi les propriétés de P restreint au sous-espace N^j $(j = 0,1,\ldots)$ dépendent de celles de l'opérateur pseudo-différentiel $c^j(x,0,D_x)$. On voit facilement que l'on peut considérer ces derniers commes des valeurs propres asymptotiques de $\mathbf{P}$ (nous renvoyons à l'étude du modele commutatif, Ch. II de [4]).

Il reste à étudier la restriction de $\mathbf{P}$ à M^j pour j grand (cf. (10)). Nous utilisons le fait que S^j est une bijection de M^j sur $\mathfrak{J}/\mathcal{E}$ et déduisons de (11) :

$$S^j P (S^j)^{-1} = P^j + R'^j (S^j)^{-1} . \tag{21}$$

Mais maintenant il n'y a plus aucune raison que $R'^j(S^j)^{-1}$ soit régularisant. Cependant, modulo des opérateurs régularisants,

$$R'^j (S^j)^{-1} = R'^j E_{Y^o} \dots E_{Y^{j-1}} ,$$

où les E_{Y^k} sont définis comme dans (20), exposé n°1. Nous appliquons la prop. 2 de ce même exposé : chaque E_{Y^k} fait gagner un degré de régularité, et R'^j en fait perdre au plus j. Nous concluons que $R'^j(S^j)^{-1}$ est un opérateur borné $H^m(\overline{\Omega}) \to H^m(\overline{\Omega})$ (en supposant qu'on l'a multiplié à gauche par une fonction troncante). Comme, de plus, R'^j s'annule (d'ordre infini!) en $t = 0$, on peut choisir l'intervalle $0 \le t \le T$ assez petit pour que la norme de cet opérateur borné soit très petite.

On applique alors le théoreme principal de Bolley et Camus [1] à P^j (il s'étend très facilement à des opérateurs différentiels - pseudo-différentiels du genre examiné ici). On peut car la condition (C) de Bolley et Camus est ici contredite, pour j grand grace au fait (exposé n°1, (40)) que

$$c_o^j(x,0,D_x) = c_o(x,0,D_x) - j\, \mathcal{V}_o(x,0,D_x) . \tag{22}$$

On voit que pour m et j suffisamment grands, $\mathbf{P}^j$ est un isomorphisme de $H_1^{m+2}(\mathbf{R}_+^{n+1})$ sur $H^m(\mathbf{R}_+^{n+1})$. Ici :

$$H_1^{m+2}(\mathbf{R}_+^{n+1}) = \{u \in H^{m+1}(\mathbf{R}_+^{n+1}) \; ; \; t\,u \in H^{m+2}(\mathbf{R}_+^{n+1})\} \tag{23}$$

(on suppose que les coefficients de $\mathbf{P}^j$ ont été modifiés convenablement à l'infini, dans $\mathbf{R}_+^{n+1}$) .

Il s'ensuit que, microlocalement, le membre de droite dans (21) définit un isomorphisme de $H_1^{m+2}(\mathbb{R}_+^{n+1})$ sur $H^m(\mathbb{R}_+^{n+1})$. Ceci est équivalent à des inégalités microlocales, que l'on peut très bien recoller, et entraîne la résolubilité <u>locale</u> (et non plus seulement microlocale) de cet opérateur. Quant à son hypoellipticité (microlocale, i.e. au sens des fronts d'onde) elle découle du fait que ces inégalités restent vraies pour $m \nearrow +\infty$ (avec un terme d'erreur dû à $R'^j(S^j)^{-1}$, et aussi à P^j, peut-être croissant, mais qui n'affecte pas la conclusion ; noter d'ailleurs que P^j est elliptique pour $t > 0$ et que donc seulement ce qui se passe pour t petit compte).

Ceci prouve que les propriétés de résolubilité locale et d'hypoellipticité sont déterminées presque totalement par les propriétés analogues des valeurs propres asymptotiques $c^j(x,0,D_x)$. Presque totalement, mais pas tout-à-fait : supposons par exemple que $c(x,t,D_x) \equiv 0$, c'est-à-dire que

$$\mathbf{P} = (Xt - \sigma)Y \tag{24}$$

Les propriétés de $\mathbf{P}$ sont alors déterminées par celles de $\sigma(x,D_x)$, selon la description donnée dans la section I - 3 de [4] (voir aussi Th. II.2.1 de [4]).

Pour terminer ce paragraphe je ferai remarquer que les valeurs propres asymptotiques $c^j(x,D_x)$ existent effectivement, et "sont" des séries infinies non convergentes au sens classiques (c'est-à-dire, ce sont des opérateurs pseudo-différentiels sur le bord ayant, en général, des parties homogènes de tous degrés) même si l'on part d'un opérateur différentiel très simple, tel que :

$$P = (\partial_t^2 + \partial_x^2)t + \rho(t), \tag{25}$$

où $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ réelle, satisfaisant $\rho^{(j)}(0) \geq 0$ pour tout j. On peut alors montrer que $c(x,D_x) = c(D_x) + \Sigma\, c_j |D_x|^{-j}$, avec

$$c_0 = c_2 = 0,\quad c_1 = \rho(0),\quad c_j \geq \sum_{i=1}^{j-2} \frac{1}{(j-i-1)!}\, \rho^{(i)}(0)\rho^{(j-i-1)}(0) \tag{26}$$

pour $j \geq 3$.

La série $\sum c_j |\xi|^{-j}$ diverge en général.

Enfin il convient de signaler que, en vertu de la formule (22), toutes les valeurs propres asymptotiques $c^j(x,0,D_x)$, sauf une au plus, sont <u>elliptiques d'ordre un</u>. La condition (C) de Bolley et Camus revient à dire qu'il y en a exactement une qui ne l'est pas : ainsi non -(C) signifie que <u>toutes</u> les valeurs propres asymptotiques sont elliptiques d'ordre un. Cela correspond à la situation optimum : $\mathbb{P}$ est hypoelliptique, avec perte d'<u>un</u> degré de dérivabilité tangentielle :

$$\mathbb{P}\, u \in C^{\infty}_{(t)}([0,T[\ ;\ H^{s}_{loc}(\mathbb{R}^n_x)) \Rightarrow$$

$$u \in C^{\infty}_{(t)}([0,T[;\ H^{s+1}_{loc}(\mathbb{R}^n_x))\ .$$

C'est optimum puisque, si, pour un entier j quelconque, $u = (S^j)^{-1}\tilde{K}_{Y^j} u_o$ ($\in$ Ker Y^j), on a (mod $\mathcal{E}$) :

$$S^j P u = P^j \tilde{K}_{Y^j}\, u_o = \tilde{K}_{Y^j}\, c^j(x,0,D_x)u_o,$$

soit $Pu = (S^j)^{-1}\tilde{K}_{Y^j}\, c^j(x,0,D_x)u_o$, et $c^j(x,0,D_x)$ fait gagner un degré de dérivation.

Le raisonnement précédent montre que l'on peut avoir hypoellipticité (tangentielle) et résolubilité locale dans des cas où la condition (C) de Bolley et Camus est satisfaite. Il permet de plus de calculer les symboles totaux des valeurs propres $c^j(x,0,D_x)$ $(j = 0,1,\dots)$.

§ 2. <u>LIEN AVEC LES RELATIONS DE QUANTIFICATION DE MASLOV</u>

Maslov (voir [2]) a rattaché le symbole principal de certaines valeurs propres asymptotiques, pour des opérateurs pseudodifférentiels de type convenable, à des variétés lagrangiennes ad hoc du fibré cotangent. Dans notre cas il s'agit d'opérateurs du type

$$P = (Xt - \sigma)Y + c,$$

mais dont la partie principale, pour t = 0, est "[illegible]-adjointe".

Autrement dit, on suppose que les parties principales

$$X_o = \partial_t - a_o(x,0,D_x), \qquad Y_o = \partial_t - b_o(x,0,D_x)$$

sont liées par la relation $Y_o = - X_o^*$, et de plus, que $\sigma_o \equiv 0$. En négligeant les termes qui appartiennent à $\Psi^o + t\Psi^1 + t^2\Psi^2$, l'opérateur à étudier est de la forme

(27) $$- X_o t X_o^* + c_o(x,0,D_x).$$

Son symbole principal est

(28) $$p(x,t,\xi,\tau) = t|\tau - ia_o(x,0,\xi)|^2 ,$$

tandis que son symbole sous-principal est égal, en $t = 0$, à

(29) $$(\mathrm{Re}\, a_o + c_o)(x,0,\xi).$$

Suivant Maslov, et aussi Rockland [3], nous allons associer avec chaque point $(x,\xi) \in \dot{T}^*\Gamma$ (complément de la section nulle dans le fibré cotangent au dessus de Γ) une famille $\{\gamma_E\}$ $(E > 0)$ à un paramètre de courbes dans le plan $\pi_{x,\xi}$ (à deux dimensions) des variables (t,τ) (plan "transverse" à $\dot{T}^*\Gamma$ dans $\dot{T}^*\Omega$). La courbe γ_E est définie par l'équation :

(30) $$p(x,t,\xi,\tau) = E \quad , \quad t > 0$$

(E est l'énergie, nécessairement > 0). On considère γ_E comme une lagrangienne du plan $\pi_{x,\xi}$ muni de la forme symplectique $dt \wedge d\tau$. On considère les valeurs de E qui satisfont aux relations de quantification

(31) $$\frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_E} \eta = \frac{1}{4} \operatorname{Ind} \gamma_E \mod 1,$$

où $\operatorname{Ind} \gamma_E$ est l'indice de Maslov de γ_E et η une forme de degré un quelconque, telle que $d\eta = dt \wedge d\tau$. En supposant que l'on puisse trouver une fonction régulière $E(x,\xi)$ de $(x,\xi) \in \dot{T}^*\Gamma$ qui, en chaque (x,ξ), satisfait à (31), il existera une valeur propre asymptotique de P dont le symbole principal est

(32) $$-E(x,\xi) + (\mathrm{Re}\ a_o + c_o)(x,0,\xi).$$

Nous faisons les calculs. Tout d'abord nous choisissons $\eta = t\,d\tau$. Dans ce cas on trouve

(33) $$\oint_{\gamma_E} t d\tau = \pi E / [\mathrm{Re}\ a_o(x,0,\xi)].$$

Dans le caclul de l'indice de Maslov de γ_E on se heurte au fait que γ_E n'est pas compact. Mais on va exploiter l'invariance de l'indice de Maslov par transformations canoniques (en dimension deux). On fait le changement de variables

(34) $$t = s^2 , \quad \tau = \sigma/2s ,$$

qui transforme γ_E en l'ellipse

(35) $$\left|\frac{1}{2}\sigma + i a_o(x,0,\xi)s\right|^2 = E$$

avec l'orientation $\circlearrowleft$. Il y a deux points sur cette ellipse à tangente verticale (parallèle à l'axe $O\sigma$) et en chacun de ces points, $\frac{ds}{d\sigma}$ change de signe de + en - (le long de l'ellipse orientée). Ceci donne un indice de Maslov pour l'ellipse égal à 2 et nous prenons

(36) $$\mathrm{Ind}\ \gamma_E = 2 .$$

En remplaçant (33) et (36) dans (31) on obtient

$$\frac{E}{2\,\mathrm{Re}\ a_o(x,0,\xi)} = (j + \frac{1}{2}) \quad , \quad j \in \mathbb{Z}_+ ,$$

et si on tient compte de ceci dans (32), ce symbole devient

$$[c_o - 2j\ \mathrm{Re}\ a_o](x,0,\xi),$$

c'est-à-dire exactement égal à $c_o^j(x,0,\xi)$ dans la situation présente, où $\vartheta_o = 2\,\mathrm{Re}\ a_o$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bolley, P. et Camus, J. - Sur une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérées à plusieurs variables, Bull. Soc. Math. France, Mémoire 34 (1973), 55-140.

[2] Maslov, V. P. - Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques, Dunod Paris 1972.

[3] Rockland, Ch. - Hypoellipticity and eigenvalue asymptotics, à paraître.

[4] Treves, F. - Second-order Fuchsian elliptic equations and eigenvalue asymptotics, Colloque sur les opérateurs intégraux de Fourier, Nice (Mai 1974), à paraître.