M. Kashiwara

Sur la b-fonction

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1974-1975), exp. nº 25, p. 1-4

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1974-1975____A23_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - L I O N S - S C H W A R T Z
1 9 7 4 - 1 9 7 5

SUR LA b-FONCTION

par M. KASHIWARA

Exposé n° XXV

28 Mai 1975

§ 0. INTRODUCTION

Soient X une variété lisse et f une fonction régulière sur X. L'ensemble des polynômes b(s) d'une variable s tel qu'il existe un opérateur $P(s) = \Sigma P_j(x,D_x)s^j$ satisfaisant $P(s)f^{s+1} = b(s)f^s$ est un idéal de $\mathbb{C}[s]$. On appelle son générateur la b-fonction de f(X) et on écrit $b_f(s)$.

M. Sato a introduit les notions de "a-fonction", "b-fonction" et "c-fonction" quand il a étudié les transformées de Fourier et les ζ-fonctions associées aux invariants relatifs sur des espaces vectoriels préhomogènes. Bernstein a introduit indépendamment de Sato, la b-fonction et démontré que tout polynôme a sa fonction b(s) non nulle. J. E. Björk a généralisé ce résultat aux fonctions holomorphes.

L'auteur a démontré le théorème suivant :

Théorème : Soient X' une variété lisse, $F : X' \to X$ un éclatement de centre contenu dans les zéros de f, et $f' = f \circ F$. Alors

$$b_f(s) \mid b_{f'}(s)b_{f'}(s+1)\ldots b_{f'}(s+N)$$

pour un entier $N \geq 0$.

Corollaire : Les racines de la b-fonction sont des nombres rationnels négatifs.

En effet, il existe un éclatement $F : X' \to X$ tel que f' soit à croisements normaux. Si $f' = t_1^{r_1},\ldots,r_\ell^{r_\ell}$, $b_{f'}(s) = \prod_{\nu=1}^{\ell} [(s+\frac{1}{r_\nu})\ldots(s+\frac{r_\nu}{r_\nu})]$.

On ne donne pas ici la démonstration du théorème à cause du manque de temps. A la place, on donnera celle du théorème suivant qui est moins longue .

Théorème : Il existe localement un polynôme b(s) non nul et un opérateur $P(s) = \Sigma P_j(x,D_x)s^j$ tel qu'on ait $P(s)f^{s+1} = b(s)f^s$.

§ 1. LES RESULTATS FONDAMENTAUX DES SYSTEMES D'EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

On donnera ici les propriétés des $\mathcal{D}$-modules cohérents sans démonstration.

Soient $\mathcal{D}_X$ le faisceau d'anneaux des opérateurs différentiels à coefficients holomorphes sur une variété complexe lisse X, et $\mathcal{D}^{(\ell)}$ le faisceau des opérateurs différentiels d'ordre $\leq \ell$. $\mathcal{D}_X$ est un anneau cohérent et ses germes sont un anneau noéthérien. Soit $\mathfrak{M}$ un $\mathcal{D}$-module cohérent. La filtration croissante $\{\mathfrak{M}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ de $\mathfrak{M}$ est dite une bonne filtration si

i) les $\mathfrak{M}_k$ sont des $\mathcal{O}_X$-modules cohérents

ii) $\mathcal{D}^{(\ell)}\mathfrak{M}_k \subset \mathfrak{M}_{k+\ell}$ et $\mathcal{D}^{(\ell)}\mathfrak{M}_k = \mathfrak{M}_{k+\ell}$ si $k >> 0$ et $(\ell \geq 0)$.

iii) $\mathfrak{M}_k = 0 \quad k << 0$

Soit T^*X le fibré vectoriel cotangent de X. On dit que le support du $\mathcal{O}_{T^*X}$ - module cohérent $\overset{\infty}{\underset{k-1}{\oplus}}(\mathfrak{M}_k/\mathfrak{M}_{k-1})$ est la <u>variété caractéristique</u> de $\mathfrak{M}$ et est notée $\widehat{SS}(\mathfrak{M})$. Elle ne dépend pas du choix des bonnes filtrations. Une variété caractéristique est toujours involutive.

<u>Proposition</u> : i) codim $\widehat{SS}(\mathrm{Ext}^k(\mathfrak{M}, \mathcal{D})) \geq k$

ii) $\mathrm{Ext}^k(\mathfrak{M}, \mathcal{D}) = 0$ pour $k <$ codim $\widehat{SS}(\mathfrak{M})$

iii) $\widehat{SS}(\mathrm{Ext}^k(\mathfrak{M}, \mathcal{D}))$ contient toutes les composantes irréductibles de $\widehat{SS}(\mathfrak{M})$ de codimension k.

Soit V une variété irréductible dans T^*X. On suppose que $\widehat{SS}(\mathfrak{M})$ est contenue dans V au point générique de V. La multiplicité de $\underset{k}{\oplus}(\mathfrak{M}_k/\mathfrak{M}_{k-1})$ au point générique de V est dite la multiplicité de $\mathfrak{M}$ le long de V. La multiplicité est une quantité additive : si $0 \to \mathfrak{M}' \to \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'' \to 0$ est une suite exacte , la multiplicité de $\mathfrak{M}$ est une somme de celles de $\mathfrak{M}'$ et $\mathfrak{M}''$.

<u>Proposition</u> : Soit $\mathfrak{M}$ un $\mathcal{D}$-module cohérent. Posons $\mathfrak{M}_r = \{u \in \mathfrak{M} ;$ codim $\widehat{SS}(\mathcal{D}u) \geq r\}$. Alors, $\mathfrak{M}_r$ est un $\mathcal{D}$-module cohérent. En effet, on peut construire $\mathfrak{M}_r$ cohomologiquement,

$\mathfrak{M}_r = \mathrm{Ext}^0_{\mathcal{D}}(\sigma_{\geq r}\mathbb{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathfrak{M},\mathcal{D}),\mathcal{D})$.

__Proposition__ : Si $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ sont des $\mathcal{D}$-modules holonomes (c'est-à-dire les dimensions des variétés caractéristiques sont égales à celles de X), $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathfrak{M},\mathfrak{N})_x$ est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$ pour tout point x de X.

§ 2. L'EXISTENCE DE b-FONCTIONS

Soient X une variété lisse de dimension n, f une fonction holomorphe sur X. On suppose que

i) $\{x;\partial f/\partial x_1 = \dots = \partial f/\partial x_n = 0\}$ est contenu dans l'ensemble des zéros de f.

ii) Il existe un champ de vecteurs X_o tel qu'on ait $X_o f = f$.

Soit $\mathcal{D}[s] = \mathcal{D}\otimes\mathbb{C}[s]$. On pose $\mathfrak{N} = \mathcal{D}[s]f^s = \mathcal{D}[s]/\mathcal{J}$, où $\mathcal{J} = \{P(s)\in\mathcal{D}[s];\ P(s)f^s = 0$ pour tout $s\}$. $\mathfrak{N}$ est un $\mathcal{D}$-module cohérent, engendré par f^s (par la propriété ii)).

Soit t l'endomorphisme de $\mathfrak{N}$ défini par $P(s)f^s \mapsto P(s)f^{s+1}$.

__Proposition__ : $\mathfrak{N}$ est un $\mathcal{D}$-module sous-holonome (c'est-à-dire sa variété caractéristique est de dimension n + 1).

__Démonstration__ : La proposition est évidente là où une dérivée de f ne s'annule pas. Donc, $\mathfrak{N}$ est sous-holonome en dehors des zéros de f. Soit $\mathfrak{N}' = \{u\in\mathfrak{N}\ ;\ \mathrm{codim}\,\hat{SS}(\mathcal{D}u) \geq n-1\}$. $\mathfrak{N}'$ est un $\mathcal{D}$-module sous-holonome et égale à $\mathfrak{N}$ en dehors des zéros de f.

Soit $\overline{f^s}$ l'élément de $\mathfrak{N}/\mathfrak{N}'$ correspondant à $f^s\in\mathfrak{N}$. Parce que $\mathcal{O}\overline{f^s}$ est un $\mathcal{O}$-module cohérent dont le support est contenu dans les zéros de f, il existe un entier m tel que $f^m.\overline{f^s} = 0$, ce qui équivaut à dire que $\mathcal{D}f^{s+m}$ est sous-holonome. $\mathcal{D}f^{s+m}$ et $\mathfrak{N}$ sont isomorphes par l'homomorphisme t^m, et on obtient la proposition :

__Proposition__ : $\mathfrak{M} = \mathcal{D}[s]f^s/\mathcal{D}[s]f^{s+1} = \mathfrak{N}/t\,\mathfrak{N}$ est holonome.

__Démonstration__ : On a une suite exacte $0\to\mathfrak{N}\xrightarrow{t}\mathfrak{N}\to\mathfrak{M}\to 0$.

A chaque composante irréductible de la variété caractéristique de $\mathfrak{N}$, la multiplicité de $\mathfrak{M}$ est zéro, alors la variété caractéristique de $\mathfrak{M}$ ne contient aucune composante de celle de $\mathfrak{N}$ donc est de dimension $\leq n+1$, c'est-à-dire n.

<u>Théorème</u> : Pour toute fonction holomorphe f, il existe un polynôme b(s) non nul tel qu'on ait

$$b(s)f^s \in \mathcal{D}[s]f^{s+1} .$$

<u>Démonstration</u>

A) Dans le cas où f a la propriété ii) :

Parce que $\mathfrak{M} = \mathcal{D}[s]f^s/\mathcal{D}[s]f^{s+1}$ est holonome, $\mathrm{End}_{\mathcal{D}}(\mathfrak{M})_x$ est de dimension finie pour tout point x. Donc, il existe un polynome b(s) non nul qui s'annule $s \in \mathrm{End}_{\mathcal{D}}(\mathfrak{M})_x$.

B) Dans le cas général :

Soit $\tilde{f}(t,x)$ la fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \times X$ définie par $tf(x)$. $\tilde{f}(t,x)$ possède la propriété (ii). Donc, il existe un polynôme b(s) non nul et un opérateur différentiel $P(t,x,D_t,D_x)$ tel que $b(s)\tilde{f}^s = P\tilde{f}^{s+1}$.

Soit $Q(t,x,D_t,D_x) = \Sigma Q_j(x,D_x)(tD_t)^jD_t$ la partie homogène de P de degré -1 par rapport à t. Alors, on a

$$b(s)f^s = (s+1)\Sigma Q_j(x,D_x)s^jf^{s+1} .$$

Q.E.D.