Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

J. J. Duistermaat
I. M. Singer

Isomorphismes entre algèbres d'opérateurs pseudo-différentiels

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1974-1975), exp. nº 24, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1974-1975____A22_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - L I O N S - S C H W A R T Z
1 9 7 4 - 1 9 7 5

ISOMORPHISMES ENTRE ALGEBRES D'OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS

par J. J. DUISTERMAAT et I. M. SINGER

Exposé n° XXIV

28 Mai 1975

Soit $L^m(X)$ l'espace des opérateurs pseudo-différentiels P d'ordre $m \in \mathbb{Z}$ sur une variété $C^\infty X$ tels que

i) la projection du support du noyau $K_P \in \mathcal{D}'(X \times X)$ de P sur la première variable est une application propre ;

ii) le symbole total de P (dans des cartes locales) a un développement asymptotique en termes homogènes d'ordre entier.

Alors $L^\infty(X) = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} L^m(X)$ est une algèbre sur $\mathbb{C}$, graduée par l'ordre.

Je veux esquisser la démonstration du théorème suivant (un article plus détaillé est à paraître aux Comm. Pure Appl. Math):

<u>Théorème</u> : Soient X. Y des variétés C^∞ , $H^1(T^*X\backslash 0, \mathbb{C}) = 0$. Alors tout isomorphisme $i : L^\infty(X) \to L^\infty(Y)$ d'algèbres conservant l'ordre est de la forme

$$i(P) = A^{-1} P A$$

où A est un opérateur intégral de Fourier : $C^\infty(Y) \to C^\infty(X)$ inversible, elliptique et proprement supporté.

Singer m'a communiqué l'été dernier au cours d'un colloque de géométrie riemannienne à Durham, qu'il pensait que ce théorème était vrai, et il m'en a convaincu au cours d'une excursion devant des murs romains entre l'Angleterre et l'Ecosse.

Le premier lemme montre que la situation est moins bonne quand on travaille modulo $L^{-\infty}$ (espace des opérateurs régularisants).

<u>Lemme 1</u> : Soient X. Y connexes ; $H^1(T^*X\backslash 0, \mathbb{C}) = 0$. Alors tout isomorphisme $i : L^\infty(X)/L^{-\infty}(X) \to L^\infty(Y)/L^{-\infty}(Y)$ d'algèbres conservant l'ordre est donné par la conjugaison par un opérateur intégral de Fourier elliptique ou par une telle conjugaison précédée de l'automorphisme de $L^\infty(X)/L^{-\infty}(X)$ qui envoie le symbole

$$\sum_j p_j(x,\xi) \quad \text{sur} \quad \sum_j (-1)^j p_j(x,-\xi)$$

Ici p_j est le terme homogène d'ordre j dans le développement asymptotique du symbole complet.

Démonstration : i définit un isomorphisme $i_o : L^o(X)/L^{-1}(X) \to L^o(Y)/L^{-1}(Y)$. $L^o(X)/L^{-1}(X)$ s'identifie avec l'algèbre des fonctions C^∞ homogènes d'ordre 0 sur $T^*X\backslash 0$ et avec l'algèbre $C^\infty(S^*X)$ où $\pi_s : T^*X\backslash 0 \to S^*X$ est la fibration de fibre : $\{(x,\tau\xi), \tau > 0\}$.

Les ensembles

$$m_\alpha : \{p \in C^\infty(S^*X) \ , \ p(\alpha) = 0\} \quad , \alpha \in S^*X$$

sont les idéaux maximaux (de codimension 1) de $C^\infty(S^*X)$. Il existe donc une bijection $C : S^*X \to S^*Y$ telle que :

$$i(m_\alpha) = m_{C(\alpha)}$$

pour tout $\alpha \in S^*X$, et il est facile de démontrer que C est un difféomorphisme en regardant X et Y comme sous variétés d'un espace $\mathbb{R}^N$.
On en déduit que :

$$i_o(p) = p \circ C^{-1}$$

En effet, $p - p(\alpha).1 \in m_\alpha$; $i_o(p) - p(\alpha).1 \in m_{C(\alpha)}$ et donc :

$$i_o(p)(C(\alpha)) = p(\alpha) \ .$$

Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, i donne un isomorphisme i_m de $L^m(X)/L^{m-1}(X) \cong S^m(T^*X\backslash 0)$ = espace des fonctions C^∞ homogènes d'ordre m sur $L^m(Y)/L^{m-1}(Y) \cong S^m(T^*Y\backslash 0)$. Pour $\varepsilon \in S^1(T^*X\backslash 0)$, $q \in S^o(T^*X\backslash 0)$ on obtient :

$$i_m(\varepsilon^m.q) = (i_1(\varepsilon))^m . q \circ C^{-1} \quad .$$

i_m est déterminée par la donnée de $\eta = i_1(\varepsilon)$ lorsque ε est inversible.
$L^1(X)/L^o(X)$ est une algèbre de Lie munie du crochet $[A,B] = A \circ B - B \circ A$.
En associant à un élément de $L^1(X)/L^o(X)$ son symbole principal, on définit un isomorphisme d'algèbre de Lie de $L^1(X)/L^o(X)$ sur $S^1(T^*X\backslash 0)$ munie du crochet $((a,b) \to \frac{1}{i}\{a,b\}$ où $\{a,b\}$ désigne le crochet de Poisson de a et b) .

On a :

$$\{\eta . a \circ C^{-1}, \eta \circ b \circ C^{-1}\} = \eta(\varepsilon^{-1}\{\varepsilon . a, \varepsilon . b\}) \circ C^{-1}$$

pour a, b $\in S^0$, d'où

$$\{\eta, b \circ C^{-1}\} = \{\varepsilon, b\} \circ C^{-1} \qquad \text{pour } b \in S^0 \text{ (en prenant } a = 1).$$

η est réel si on choisit ε réel et il existe un unique difféomorphisme noté encore C :

$$\begin{array}{ccc} T^*X \setminus 0 & \xrightarrow{C} & T^*Y \setminus 0 \\ \downarrow \pi_s & & \downarrow \pi_s \\ S^*X & \xrightarrow{C} & S^*Y \end{array}$$

tel que $\eta = \pm \varepsilon \circ C^{-1}$. Alors $\{a \circ C^{-1}, b \circ C^{-1}\} = \pm \{a,b\} \circ C^{-1}$ pour tous a, b $\in S^1(T^*X \setminus 0)$.

Lorsque le signe est +, C est une transformation canonique homogène. Lorsque le signe est -, C est la transformation antipodale $(x,\xi) \to (x,-\xi)$ composée avec une transformation canonique.

L'automorphisme de $L^\infty(X)/L^{-\infty}(X)$ indiqué dans le lemme 1, induit la transformation antipodale, de sorte que nous pouvons nous ramener au cas d'une transformation canonique C.

Considérons un opérateur intégral de Fourier elliptique A défini par C, alors $j : P \to A . i(P) . A^{-1}$ est un automorphisme de $L^\infty(X)/L^{-\infty}(X)$ conservant les symboles principaux. On doit maintenant démontrer qu'un tel automorphisme est égal à la conjugaison par un opérateur pseudo-différentiel elliptique d'un ordre quelconque s. Pour $k \geq 1$, supposons que $j(P) - P \in L^{m-k}(X)$ pour tout $P \in L^m(X)$. L'image dans $L^{m-k}(X)/L^{m-k-1}(X) \cong S^{m-k}(T^*X\setminus 0)$ ne dépend que du symbole principal de P, et on définit ainsi une application $\beta_m : S^m(T^*X\setminus 0) \to S^{m-k}(T^*X\setminus 0)$.

β_m est une dérivation dans les deux sens suivants :

$$(*)\qquad \begin{aligned} &\beta_{m_1+m_2}(p.q) = \beta_{m_1}(p).q + p.\beta_{m_2}(q) \;;\; p \in S^{m_1}, \quad q \in S^{m_2} \\ &\beta_{m_1+m_2-1}(\{p,q\}) = \{\beta_{m_1}(p),q\} + \{p,\beta_{m_2}(q)\} \end{aligned}$$

On en déduit que β est une transformation infinitésimale symplectique, et donc que $\beta = H_f$ pour une $f \in C^\infty(T^*X\backslash 0)$ car $H^1(T^*X\backslash 0,\mathbb{C}) = 0$.
Pour $P \in L^m(X)$ (resp. $B \in L^s(X)$) de symbole principal p (resp. b), l'opérateur $B^{-1}PB - P = B^{-1}[P,B]$ a un symbole principal d'ordre $m-1$, égal à $b^{-1}\{p,b\}/i = H_{i \log b}(p)$.

La remarque ci-dessus (avec $k=1$) montre que j peut être représentée par une conjugaison par β si (et seulement si) $b = e^{f/i}$ est homogène d'ordre s, ce qui signifie que :

$$\sum_j \xi_j \frac{\partial f}{\partial \xi_j} = s.i = \text{Cste}$$

ce qui découle des relations $(*)$.

Pour $k > 1$, $j(P) - P \in L^{m-k}(X)$ lorsque $P \in L^m(X)$; on peut écrire $\beta = H_f$ avec $f \in S^{1-k}(T^*X\backslash 0)$ définie par :

$$f = \frac{1}{1-k} \sum_j \xi_j \cdot \gamma_j$$

Ici on a écrit :

$$\beta = \sum_j \gamma_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_j \delta_j \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_j}$$

dans un système de coordonnées locales avec :

$$\gamma_j = \beta(x_j) \in S^{-k} \quad , \quad \delta_j = \beta(\xi_j) \in S^{1-k}$$

Par induction sur k, on obtient une suite d'opérateurs pseudo-différentiels B_o, C_1, $C_2, \ldots$ tels que B_o est elliptique d'ordre $s \in \mathbb{C}$, $C_j \in L^{-j}(X)$ et finalement $B_k \circ j(P) \circ B_k^{-1} - P \in L^{m-k-2}(X)$ pour $P \in L^m$ en posant :

$$B_k = (I - C_k) \circ \ldots \circ (I - C_1) \circ B_o .$$

On construit alors classiquement un opérateur $B \in L^s(X)$ tel que $B - B_k$ soit dans L^{s-k-1} pour tout k ; on obtient ainsi $B \circ j(P) \circ B^{-1} - P \in L^{-\infty}$ pour tout $P \in L^m$.

Le lemme ci-dessous est inspiré par les résultats de M. Edelheit [2] sur les espaces de Banach.

<u>Lemme 2</u> : Soit $\mathcal{E}$ un espace de Fréchet de dimension > 2 et $\mathfrak{A}$ une algèbre d'applications continues $\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ telle que $\widetilde{f} = \{v \in \mathcal{E}' \; ; \; u \otimes v \in \mathfrak{A}$ pour tout $u \in \mathcal{E}\}$ est dense dans $\mathcal{E}'$. Ici $u \otimes v$ est l'application continue $f \mapsto v(f).u$ de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$.

Soit $\widetilde{\mathcal{E}}$ un autre espace de Fréchet et $\widetilde{\mathfrak{A}}$ une algèbre possédant les mêmes propriétés que $\mathfrak{A}$ (en remplaçant $\mathcal{E}$ par $\widetilde{\mathcal{E}}$).

Alors tout isomorphisme d'algèbres $i : \mathfrak{A} \to \widetilde{\mathfrak{A}}$ s'obtient par conjugaison par une application linéaire continue inversible $A : \widetilde{\mathcal{E}} \to \mathcal{E}$.

Cette application est unique (modulo les multiplications par les constantes non nulles).

<u>Démonstration</u> : Pour $P_1, P_2 \in \mathfrak{A}$, on introduit :

$$\mathfrak{A}(P_1,P_2) = \{P_2 \circ Q \circ P_1 \in \mathfrak{A} \; ; \; Q \in \mathfrak{A}\}$$

Alors

$$\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Im} P < +\infty \Leftrightarrow \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{A}(P,P) < \infty$$

$$\operatorname{Im} P_1 \subset \operatorname{Im} P_2 \Leftrightarrow \mathfrak{A}(P_1,P_1) \subset \mathfrak{A}(P_1,P_2)$$

sous l'hypothèse que : $\dim \operatorname{Im} P_1 < +\infty$. Enfin :

$$i(\mathfrak{A}(P_1,P_2)) = \widetilde{\mathfrak{A}}(i(P_1),i(P_2))$$

On en déduit qu'il existe une bijection $j : \Lambda \to \tilde{\Lambda}$ telle que :

$$\operatorname{Im} i(P) = j(\operatorname{Im} P) \quad \text{lorsque } \operatorname{Im} P \in \Lambda \quad \text{et}$$

$$\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2 \Leftrightarrow j(\mathcal{D}_1) \subset j(\mathcal{D}_2) \quad ,$$

pour tout $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \in \Lambda$.

Ici Λ (resp. $\tilde{\Lambda}$) désigne le lattice de tous les sous-espaces de dimension finie de $\mathcal{E}$, (resp. $\tilde{\mathcal{E}}$).

C'est une résultat élémentaire de la géométrie projective (voir [1]) qu'un tel isomorphime est de la forme $j(\mathcal{D}) = A^{-1}(\mathcal{D})$ où A est une application linéaire (ou antilinéaire) inversible de $\tilde{\mathcal{E}}$ dans $\mathcal{E}$ et que A est unique (modulo la multiplication par les constantes).

Pour tout $u \in \mathcal{E}$, $v \in \mathfrak{J}$, $i(u \otimes v) = A^{-1}u \otimes w_{u,v}$ pour un $w_{u,v} \in \tilde{\mathcal{E}}'$.

Pour tout $P \in \mathcal{O}\!\mathcal{L}$, on en déduit que :

$$i(P) \circ (A^{-1}u \circ w_{u,v}) = i(Pu \otimes v) = A^{-1}.Pu \otimes w_{Pu,v}$$

d'où

$$i(P).(A^{-1}u) = A^{-1}(Pu).C_{u,P} \qquad \text{pour un certain scalaire } C_{u,P}$$

On montre alors facilement que $C_{u,P} = 1$ et que A est linéaire et non antilinéaire .

Montrons maintenant que A est continu Comme $i(u \otimes v) = (A^{-1}u) \otimes (v \circ A)$ est continue : $\tilde{\mathcal{E}} \to \tilde{\mathcal{E}}$ pour tout $u \in \mathcal{E}$, $v \in \mathfrak{J}$, il s'ensuit que $v \circ A$ est continu : $\tilde{\mathcal{E}} \to \mathbb{C}$ pour tout $v \in \mathfrak{J}$.

Maintenant soit $\tilde{u}_j \to \tilde{u}$ dans $\tilde{\mathcal{E}}$, $A\tilde{u}_j \to u$ dans $\mathcal{E}$. Alors $v(A\tilde{u}_j) \to v(A\tilde{u})$ et $v(A\tilde{u}_j) \to v(u)$, de sorte que $v(u) = v(A\tilde{u})$ pour tout v dans $\mathfrak{J}$. On en déduit que $u = A\tilde{u}$ car $\mathfrak{J}$ est dense dans $\mathcal{E}'$ On en déduit la continuité de A en utilisant le théorème du graphe fermé.

Lemme 3 : Soit $E : C^\infty(X) \to C^\infty(X)$ tel que pour tout $u \in C^\infty(X)$:

$$E \circ M_u = M_u \circ E + R_u \quad \text{pour un } R_u \in L^{-\infty}(X) ,$$

où $M_u : v \to u.v : C^\infty(X) \to C^\infty(X)$ désigne la multiplication par u. Alors il existe $a \in C^\infty(X)$, $R \in L^{-\infty}(X)$ tels que $E = M_a + R$.

Démonstration : $M_{uv} \circ E + R_{uv} = E \circ M_{uv} = E \circ M_u \circ M_v = (M_u \circ E + R_u) \circ M_v = M_u \circ (M_v \circ E + R_v) + R_u \circ M_v$.

On en déduit $R_{uv} = M_u \circ R_v + R_u \circ M_v$, pour tous u,v dans $C^\infty(X)$. En termes de noyaux distributions, on obtient , en remarquant que $R_{uv} = R_{vu}$:
$u(x).R_v(x,y) + R_u(x,y).v(y) = v(x).R_u(x,y) + R_v(x,y).u(y)$ de sorte que

$$(*) \quad \frac{R_u(x,y)}{u(y)-u(x)} = \frac{R_v(x,y)}{v(y)-v(x)} \qquad \text{si} \quad u(x) \neq u(y) \quad , \quad v(x) \neq v(y)$$

Pour tout $(x,y) \in X \times X$ tels que $x \neq y$, il existe $u \in C^\infty(X)$ telle que $u(x) \neq u(y)$, de sorte que le membre de gauche de (*) définit un nombre $R(x,y)$ indépendant du choix de u, et R est une fonction C^∞ sur $\{(x,y) \in X \times X \; ; \; x \neq y\}$.

De plus, $R_u(x,y) = \dfrac{R_v(x,y)}{v(y)-v(x)} \cdot (u(y) - u(x))$ si $v(x) \neq v(y)$

montre que $R_u(x,y) = 0$ lorsque $u(x) = u(y)$, $x \neq y$. Maintenant prenons u telle que $du(x_o) \neq 0$. Alors tout (x,x), x près de x_o, peut être approché par des points (x,y) tels que : $u(x) = u(y)$, $x \neq y$, de sorte que $(R_u(x,y) = 0)$ lorsque $u(x) = u(y)$ est aussi vérifiée pour $x = y$, x près de x_o.

On montre alors facilement que le second membre de (*) définit une fonction C^∞ dans un voisinage U de (x_o, x_o) ; on montre alors que R se prolonge en une fonction C^∞ sur $X \times X$.

La définition de R implique que $R_u = R \circ M_u - M_u \circ R$, d'où $E(u) = E \circ M_u(1) = M_u \circ E(1) + R(u) - M_u \circ R(1)$, ce qui montre le lemme avec $a = E(1) - R(1)$.

Démonstration du théorème : Grâce au lemme 2 avec $\mathcal{E} = C^\infty(X)$, $\mathfrak{A} = L^\infty(X)$, $\mathfrak{J} = C_o^\infty(X)$, on obtient un opérateur linéaire continu inversible $A : C^\infty(Y) \to C^\infty(X)$ tel que $i(P) = A^{-1}P.A$ pour tout P dans $L^\infty(X)$. Du lemme 1, on déduit l'existence d'un opérateur intégral de Fourier elliptique B tel que : $i(P) \circ B - B \circ P \in C^\infty(Y \times X)$ pour tous les opérateurs différentiels P.

Alors $P \circ A \circ B - A \circ B \circ P \in L^{-\infty}(X)$ pour tous les opérateurs différentiels P (ici on utilise la continuité de A).

On déduit alors du lemme 3 que : $A \circ B = M_a + R$ avec $a \in C^\infty(X)$, $R \in L^{-\infty}(X)$. Pour un champ de vecteurs P, on a

$$P \circ M_a - M_a \circ P = M_{Pa} \in L^{-\infty}(X) .$$

Alors $Pa = 0$, et donc a = cste.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. Birkhoff : Lattice theory, A. M. S. Coll. Publ. 25, Providence, Rhode Island, 1961.

[2] M. Edelheit : On isomorphisms of rings of linear operators, Studia Math. 9 (1940), p.97-105.