F. Treves

Équations elliptiques fuchsiennes du second ordre et valeurs propres asymptotiques

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1974-1975), exp. nº 1, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1974-1975____A1_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES
.., rue Descartes
.. Paris Cedex 05

SEMINAIRE GOULAOUIC-LIONS-SCHWARTZ

1974-1975

EQUATIONS ELLIPTIQUES FUCHSIENNES DU SECOND ORDRE ET VALEURS PROPRES ASYMPTOTIQUES

par F. TREVES

Exposé n° I

6 Novembre 1974

§ 1. INTRODUCTION

On considère des opérateurs différentiels linéaires par rapport à une variable réelle t, dont les coefficients sont des opérateurs pseudodifférentiels en n variables $x = (x_1, \dots, x_n)$ qui dépendent de t de façon C^∞, de la forme

$$(1) \qquad \mathbb{P} = (\partial_t - a(x,t,D_x))t(\partial_t - b(x,t,D_x)) - \\ - \sigma(x,D_x)(\partial_t - b(x,t,D_x)) + c(x,t,D_x).$$

Les opérateurs pseudodifférentiels considérés ici sont tous des sommes asymptotiques de termes (positivement) homogènes de degré entier ; a, b, c sont du premier degré, σ de degré zéro. Leurs symboles principaux seront notés a_o, b_o, c_o, σ_o. Nous ferons l'hypothèse <u>d'ellipticité forte,</u>

$$(2) \qquad \mathrm{Re}\, a_o(x,t,\xi) > 0,\ \mathrm{Re}\, b_o(x,t,\xi) < 0, \\ \underline{\text{pour tout}}\ x,\ \xi \neq 0\ \underline{\text{et}}\ t \geq 0.$$

Les opérateurs du type (1), sous l'hypothèse (2), sont la forme "microlocale" des opérateurs (aux dérivées partielles), fortement elliptiques du second ordre dans un ouvert borné Ω, qui dégénèrent à la frontière Γ de Ω "au premier ordre". Nous renvoyons aux travaux de Baouendi et Goulaouic [1], et de Bolley et Camus [2], [3], pour l'historique et la théorie des problèmes aux limites de ces opérateurs. Notons ici que x est la variable sur Γ, ξ celle le long de la fibre du cotangent $T^*\Gamma$; t est ("grosso modo") la variable dans la direction normale à la fontière Γ, et donc pour nous l'intérieur Ω correspond à $t > 0$.

Le problème qui nous intéresse ici est celui de pouvoir résoudre l'équation :

$$(3) \qquad \mathbb{P}u = f \in \mathfrak{F} = C^\infty([0,T]\ ;\ \mathcal{D}'^F(\Gamma))$$

dans $\mathfrak{F}$, ou bien de déterminer si "toute" solution $u \in \mathfrak{F}$ appartient à $\mathcal{E} = C^\infty([0,T]\ ;\ C^\infty(\Gamma))$ si cela est vrai de f ($\mathcal{D}'^F$ est l'espace des distributions d'ordre fini). Le premier est un problème de <u>résolubilité</u>

microlocale, le second un problème d'hypoellipticité. On remarquera que nous nous intéressons seulement aux solutions régulières en t, contrairement à Bolley et Camus, par exemple. C'est en partie dû au fait que je me suis intéressé aux opérateurs de type (1) comme transformés, par des changements de variable du genre $t = s^{2p}$ d'opérateurs réguliers à caractéristiques doubles dont on veut étudier la résolubilité ou l'hypoellipticité - et que, dans ce cas, l'existence de solutions régulières en t est équivalente à celle de solutions de l'équation en s. D'autre part, bien que fort primitifs, les problèmes que nous avons posés suffisent à révéler et à faire comprendre les phénomènes spectraux qui font leur apparition. Enfin certaines des techniques qui sont à notre disposition, en particulier la transformation de Laplace généralisées, devraient donner des résultats même dans le cas où la régularité en t est abandonnée.

Dans la conférence présente et la suivante nous ne faisons pas d'hypothèse de commutation sur les coefficients a, b, c, σ. Ces conférences résument le chapitre III de l'article [5]. Il est montré, dans les chapitres I et II de [5] que l'étude des opérateurs fortement elliptiques fuchsiens du deuxième ordre (lorsque la dégénérescence peut être de l'ordre de t^2) se ramène essentiellement à celle des opérateurs de type (1). A ce sujet notons que la forme (1) n'est spéciale qu'en apparence. On peut y ramener tout opérateur du type

$$Q = t[\partial_t^2 + A(x,t,D_x)\partial_t + B(x,t,D_x)] + \lambda(x,t,D_x)\partial_t + C(x,t,D_x) ,$$

où A, B, C sont d'ordre ≤ 1 , λ d'ordre zéro, et dont la "partie principale"

$$Q_o \quad \partial_t^2 + A_o(x,t,D_x)\partial_t + B(x,t,D_x)$$

est fortement elliptique, c'est à dire que le polynôme en τ,

$$q_o = -\tau^2 + iA_o(x,t,\xi)\tau + B(x,t,\xi)$$

a, pour tous $x \in \Gamma$, $\xi \neq 0$, $t \geq 0$, une racine dans le demi-plan ouvert supérieur et une dans celui inférieur (qui restent éloignées de la droite réelle uniformément par rapport à $t \to +0$).

Il nous faut aussi ajouter que la résolubilité sera étudiée, non pas dans $\mathfrak{Z}$ comme nous l'avons dit, mais dans l'espace des microfonctions "tangentielles" $\mathfrak{Z}/\mathcal{E}$ (en regardant de plus près que nous ne le ferons les inégalités microlocales que nous utilisons, on en déduirait facilement un résultat d'existence locale dans $\mathfrak{Z}$).

§ 2. OPERATEURS INTEGRAUX DE LAPLACE

Nous utiliserons systématiquement les notations suivantes :

$$X = \partial_t - a(x,t,D_x),\ Y = \partial_t - b(x,t,D_x). \tag{4}$$

Ainsi donc

$$\mathbf{P} = XtY - \sigma Y + c\,. \tag{5}$$

Il sera important pour nous de résoudre le "problème de Cauchy",

$$\partial_t u = b(x,t,D_x)u,\ t > 0;\ u|_{t=0} = u_o \tag{6}$$

(au moins au sens des microfonctions tangentielles $\mathfrak{Z}/\mathcal{E}$). A cause des conditions (2) le problème (6) est bien posé pour $b(x,t,D_x)$ mais ne le serait pas avec $a(x,t,D_x)$. Au fait nous essayons de construire une paramétrix de ce problème, en prenant $u = K u_o$, où

$$(Ku_o)(x,t) = (2\pi)^{-n}\int\int e^{i\Phi(x,y,t,\theta)}k(x,y,t,\theta)u(y)\,dyd\theta. \tag{7}$$

En effet, ça marche : K est ce qu'on appelle un opérateur de Fourier intégral à phase complexe. En fait, la phase Φ est une solution approximative de

$$\Phi_t + ib(x,t,\Phi_x) = 0\ ,\quad \Phi|_{t=0} = (x-y)\cdot\theta\ , \tag{8}$$

approximative voulant dire ici modulo $O(|\mathrm{Im}\,\Phi|^\infty)$. En fait, on trouve que

$$\mathrm{Im}\,\Phi\ (x,y,t,\theta) \geq c_{\mathcal{K}}\ t|\theta|\ , \tag{9}$$

où $c_{\mathcal{K}} > 0$ dépend du compact $\mathcal{K}$ de l'espace des (x,y,t). De plus Φ est homogène de degré 1 par rapport à t.

Les opérateurs de type (7) ne sont pas nouveaux ! Ce sont eux qui interviennent tout le temps dans la résolution des problèmes elliptiques aux limites (de façon plus ou moins cachée). Leur prototype est

(10) $$(e^{-t|D_x|}u)(x,t) = (2\pi)^{-n}\int e^{ix.\xi - t|\xi|}\hat{u}(\xi)d\xi \ ,$$

qui, évidemment, correspond au cas où $b(x,t,D_x) = -|D_x|$. Par analogie avec la formule de la transfornée de Laplace, et aussi avec ce qui est arrivé à Fourier et à Hermite (voir [4]), je les appelle opérateurs intégraux de Laplace. En fait, il faut considérer (7) comme une forme microlocale : l'opérateur intégral de Laplace K opère de $\mathcal{D}'(\Gamma)$ dans $\mathcal{D}'(\bar{\Omega})$; il est régulier en t, c'est-à-dire dans la direction transversale à la frontière Γ et, dans un système de coordonnées "microlocales", a une expression du genre (7).

D'ailleurs, une fois que la situation a été microlocalisée, au dessus (dans le fibré cotangent) d'un voisinage dans $\bar{\Omega}$ d'un point frontière, nous pouvons identifier Γ à $\mathbb{R}^n$ et $\bar{\Omega}$ à $\bar{\mathbb{R}}^{n+1}_+ = \mathbb{R}^n \times \bar{\mathbb{R}}^1_+$. Nous supposerons dans la suite que cette identification a été faite ; les opérateurs tels que K opèreront sur des fonctions ou distributions u dans Γ à support compact.

Pour que K soit une paramétrix du problème (6), il faut déterminer (approximativement, c'est-à-dire modulo $\mathcal{O}(|\mathrm{Im}\,\Phi|^{\infty})$, ce qui veut dire essentiellement, dans le fibré des cosphères, modulo des fonctions plates en $t = 0$, à cause de (9)), l'amplitude $k(x,y,t,\theta)$. Ça se fait comme d'habitude, au moyen de l'équation de transport. On trouve d'ailleurs une amplitude "classique" c'est-à-dire une fonction C^{∞} de $t \geq 0$ à valeurs dans $S^0(\Gamma \times \Gamma \times \mathbb{R}_n)$.

Il nous faut cependant faire la remarque suivante. Soit un opérateur intégral de Laplace, avec la même phase Φ,

(11) $$Gu(x,t) = (2\pi)^{-n}\int e^{\Phi(x,y,t,\theta)}g(x,y,t,\theta)u(y)dyd\theta \, .$$

Supposons que l'amplitude,

(12) $$g = \Sigma\, g_j \ ,$$

ait la propriété suivante :

(13) <u>pour tous</u> j, $M \in \mathbb{Z}_+$, <u>tout compact</u> $\mathcal{K} \subset \Gamma \times \Gamma \times \overline{\mathbb{R}}_+$ <u>et tout triplet</u> $(p,q,r) \in (\mathbb{Z}^n_+)^3$, <u>il y a des constantes</u> C, N > 0 <u>telles que</u>

(14) $$|D^p_x D^q_y D^r_\theta g_j(x,y,t,\theta)| \leq C\, t^M (1 + |t\theta|)^N (1 + |\theta|)^{m-|r|},$$
$$\forall\, (x,y,t) \in \mathcal{K} \ , \quad \forall \theta \in \mathbb{R}_n \ .$$

<u>Proposition 1</u> : <u>Sous les conditions</u> (9) <u>et</u> (12), <u>l'opérateur</u> G <u>est</u> <u>régularisant</u> (c'est-à-dire, applique $\mathcal{E}'(\Gamma)$ dans $C^\infty(\overline{\Omega})$).

Nous pouvons ainsi réaliser

(15) $$[\partial_t - b(x,t,D_x)]K \sim 0 \quad , \quad t \geq 0; \quad K|_{t=0} = I,$$

l'équivalence ~ 0 voulant dire précisément modulo opérateurs du genre de G ci-dessus.

En considérant K comme un opérateur linéaire continu $\mathcal{E}'(\Gamma) \to \mathcal{D}'(\overline{\Omega})$, qui d'ailleurs induit un opérateur linéaire continu $C^\infty_c(\Gamma) \to C^\infty(\overline{\Omega})$, on peut introduire son adjoint, $K^* : \mathcal{E}'(\overline{\Omega}) \to \mathcal{D}'(\Gamma)$. Il n'est pas difficile de vérifier que $K^*K : \mathcal{E}'(\Gamma) \to \mathcal{D}'(\Gamma)$ est un opérateur pseudo-différentiel, <u>elliptique positif</u>, d'ordre 1, qui peut être mis sous la forme $\rho(x,D_x)^* \rho(x,D_x)$ avec $\rho(x,D_x)$ elliptique positif d'ordre 1/2. On introduit alors le normalisé

(16) $$K_Y = K\, \rho(x,D_x)^{-1}$$

On voit donc que

(17) $$K^*_Y K_Y = I$$

alors que

(18) $$\pi_Y = K_Y K^*_Y$$

est essentiellement un <u>projecteur orthogonal</u>, au sens de $L^2(\mathbb{R}^n \times \overline{\mathbb{R}}_+)$, sur Ker Y (le "essentiellement" se réfère au fait que tout se passe, ici, modulo fonctions C^∞, i.e. modulo éléments de $\mathcal{E}$).

Au lieu de résoudre (15) on peut résoudre

(19) $$YK(t,t') \sim 0 \quad \underline{\text{pour}}\ t \geq t' \ , \quad K(t',t') = I.$$

Cela se fait comme dans le cas où $t' = 0$. Nous sommes alors à même de construire un inverse à droite de Y,

(20) $$E_Y f(t) = \int_0^t K(t,t') f(t') dt' \ ,$$

et la solution du problème non-homogène

(21) $$Yu = f \quad \underline{\text{pour}}\ \ t \geq 0 \ , \qquad u|_{t=0} = u_0 \ ,$$

est donnée par

(22) $$u = K u_0 + E_Y f.$$

Tout ceci est, répétons-le, vrai modulo $\mathcal{E}$ (ou mieux, modulo opérateurs régularisants). Nous concluons ce paragraphe par l'énoncé suivant, qui nous servira par la suite et dont nous laissons la démonstration au lecteur.

<u>Proposition 2</u> : <u>Soit</u> $m \in \mathbb{Z}_+$. <u>Alors</u> $f \mapsto E_Y f$ <u>est une application linéaire continue de</u> $H^m_c(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$ <u>dans</u> $H^{m+1}_{loc}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$.

Les raisons de la validité de la proposition 2 se voient bien sur l'exemple $Y = \partial_t + |D_x|$.

§ 3. CONCATENATIONS

Nous revenons à l'opérateur $\mathbb{P}$ donné par (5). Nous noterons Ψ^m ($m \in \mathbb{R}$) l'espace des opérateurs pseudo-différentiels, en les variables x, d'ordre $\leq m$, qui sont des fonctions C^∞ de $t \geq 0$.

Lemme 1 : Il existe des opérateurs $w \in \Psi^o$, $\gamma \in \Psi^1$ tels que

(23) $$\mathbb{P} = [(X - w)t - \sigma](Y + w) + \gamma \quad ,$$

(24) $$[T + w, \gamma] \text{ s'annule d'ordre infini en } t = 0.$$

Démonstration : Du fait de (5) on a

$$c = \gamma + X(tw) - twY - tw^2 - \sigma w,$$

c'est-à-dire que l'on doit avoir :

(25) $$\gamma = c + tw\mathcal{V} - [X, tw] + tw^2 + \sigma w,$$

où

(26) $$\mathcal{V} = -(X - Y) = (a - b)(x, t, D_x).$$

En vertu de (2), $\mathcal{V}$ est elliptique ($\mathcal{V} \in \Psi^1$). En tenant compte de (25), (24) exige que

(27) $$[Y, c + tw\mathcal{V}] = [c + tw\mathcal{V}, w] + [Y + w, [X, tw] - tw^2 - \sigma w]$$

modulo des éléments de Ψ^1 plats en $t = 0$. Ce qui compte ici c'est que le membre de droite, dans (27), est d'ordre ≤ 0, alors que celui de gauche est à priori d'ordre un. On écrit $w = w_o + w_1 + \ldots + w_j + \ldots$ où le symbole de w_j est positivement homogène de degré $-j$. On pose $\Psi_j = c_j + tw_j \mathcal{V}_o$ ($\deg c_j = 1 - j$, $\deg \mathcal{V}_o = 1$). De (27) on tire une suite d'équations :

(28) $$\partial_t \Psi_j + i\{b_o, \Psi_j\} = F_j(w_o, \ldots, w_{j-1}),$$

où $\{\ ,\ \}$ est le crochet de Poisson, et les fonctions F_j se calculent sans difficulté à partir de (27). Le seul ennui avec les équations (28) c'est qu'elles ne peuvent, en général, se résoudre exactement. Il nous faut de plus les résoudre de manière à satisfaire à la condition initiale

(29) $$\Psi_j = c_j \ \underline{\text{en}}\ \ t = 0,$$

qui nous permet ensuite de tirer $w_j = \frac{\Psi_j - c_j}{t\mathcal{V}_o}$. Mais il est évidemment facile (par exemple, par extension presque complexe) de résoudre (28)-(29) modulo fonctions plates en $t = 0$ (on le fait lorsque $|\xi| = 1$ et on étend le résultat par homogénéité en ξ).

c.q.f.d.

Remarque 1 : Il est clair que si les symboles sont analytiques par rapport à (x,ξ), on peut appliquer le théorème de Cauchy-Kovalevska et résoudre (28) - (29) exactement. On peut même s'arranger pour que, à chaque équation pour $j = 0,1,\ldots,$ le domaine d'existence de la solution ne se rétrécisse point. Dans ce cas, (24) peut être précisé en :

(24') $$[Y + w, Y] = 0 \quad .$$

En appelant X (resp., Y) ce qui est noté $X - w$ (resp., $Y + w$) dans (23), nous pouvons supposer maintenant que $\mathbf{P} = (Xt - \sigma)Y + c$, sous l'hypothèse que

(30) $$[Y,c] \in \Psi^1 \quad \text{s'annule } \underline{\text{d'ordre infini en}}\ t = 0.$$

On déduit de cela :

(31) $$YP = P^1Y + R\ ,$$

où

(32) $$P^1 = Y(Xt - \sigma) + c,$$

(33) $$R = [Y,c] \qquad (\underline{\text{plat en}}\ t = 0).$$

On peut mettre

(34) $$P^1 = (Xt - \sigma)Y + [Y, Xt - \sigma] + c$$

sous la forme

(34') $$P^1 = (X^1 t - \sigma^1)Y^1 + c^1 ,$$

avec $[Y^1, c^1] = O(t^\infty)$, et répéter l'opération. On obtient une suite d'opérateurs

(35) $$P^j = (X^j t - \sigma^j)Y^j + c^j \quad , \qquad j = 0, 1, \ldots,$$

tels que

(36) $$Y^j P^j = P^{j+1} Y^j + R^j,$$

où $R^j = [Y^j, c^j]$ est plat en $t = 0$. On a $P = P^o$, mais il convient de préciser que toutes ces égalités entre opérateurs sont vraies mod $\Psi^{-\infty}$.

Dans la conférence suivante, nous tirerons parti des relations (36). Pour terminer la présente, nous faisons quelques remarques à leur sujet.

Tout d'abord (ce qui nous a permis de répéter la "concaténation") :

(37) <u>la partie principale de</u> X^j (<u>resp.</u>, Y^j) <u>est égale à celle de</u> X (resp., Y).

Il suffit de le vérifier lorsque $j = 1$. On observe (cf.(34)) que

$$[Y, Xt - \sigma] = Y + [Y, X]t - \mathcal{V} ,$$

et donc que

(38) $$P^1 = (Xt - \sigma + 1)Y + c^\natural ,$$

où

(39) $$c^\natural = c - \mathcal{V} - [X, Y]t.$$

Pour passer de l'expression (38) à l'expression (34') on applique le lemme 1, mais on ne fait donc que modifier les opérateurs X et Y par des opérateurs appartenant à Ψ^{0}, comme w. D'où (37).

Une autre remarque concerne c^{j}. En effet, la relation (25) montre que les symboles principaux de γ et de c sont égaux, lorsque t = 0. Si on applique ceci avec $c^{\natural}$ au lieu de c, on conclut que :

(40) le symbole principal de $c^{j}(x,t,D_{x})$ satisfait à

$$c_{o}^{j}(x,0,\xi) = c_{o}(x,0,\xi) - j\mathcal{V}_{o}(x,0,\xi).$$

Remarquons aussi, en passant, que d'après (38) on a :

(41) $$\sigma^{j}(x,D_{x}) = \sigma(x,D_{x}) - j.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Baouendi, S. M. et Goulaouic, Ch. - Régularité et théorie spectrale pour une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés, Arch. Rat. Mec. Anal. 34, n°5 (1969), 361-379.

[2] Bolley, P. et Camus, J. - Sur une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés à une variable, J. Math. pures et appl., 51 (1972), 429-463.

[3] Bolley, P. et Camus, J. - Sur une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés à plusieurs variables, Bull. Soc. Math. France, Mémoire 34 (1973) 55-140.

[4] Boutet de Monvel, L. et Treves, F. - On a class of pseudodifferential operators with double characteristics, Inventiones math. 24 (1974), 1-34.

[5] Treves, F. - Second order Fuchsian elliptic equations and eigenvalue asymptotics, Colloque sur les opérateurs intégraux de Fourier, Nice (Mai 1974), à paraître.