Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

J. C. Clerc

Problème du $\bar{\partial}_b$ et groupe de Heisenberg (d'après Folland et Stein)

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1974-1975), exp. nº 19, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1974-1975____A18_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1974-1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (http://sedp.cedram.org) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - L I O N S - S C H W A R T Z
1 9 7 4 - 1 9 7 5

PROBLEME DU $\bar{\partial}_b$ ET GROUPE DE HEISENBERG
(D'APRES FOLLAND ET STEIN)

par J. C. CLERC

Exposé n° XIX

23 Avril 1975

Nous présentons ici certains résultats de Folland et Stein parus dans [5] :

§ 1. RAPPEL SUR LA DEFINITION DU $\bar{\partial}_b$ (*)

Soit M une hypersurface réelle de $\mathbb{C}^{n+1}$, définie par l'équation $r = 0$, où r est une fonction de classe C^∞, telle que $dr \neq 0$ en tout point de M. On désigne par $\mathcal{B}_{p,q}$ l'espace des formes différentielles de type (p,q), restreintes à M, et qui sont orthogonales en chaque point de M à l'idéal engendré par $\bar{\partial} r$.

Si $\varphi \in \mathcal{B}_{p,q}$, soit ψ un prolongement de φ dans un voisinage de M. Par définition $\bar{\partial}_b \varphi$ est la projection orthogonale de $\bar{\partial}\psi|_M$ sur $\mathcal{B}_{p,q+1}$. Cette projection ne dépend pas du prolongement choisi ; en effet si ψ et ψ' sont deux formes définies dans un voisinage de M, ayant même restriction sur M, alors $\psi - \psi' = r\theta$, d'où $\bar{\partial}(\psi-\psi') = \bar{\partial} r \wedge \theta + r\bar{\partial}\theta$, et par suite la restriction de $\bar{\partial}(\psi,\psi')$ à M appartient à l'idéal engendré par $\bar{\partial} r$. On vérifie enfin que l'espace $\mathcal{B}_{p,q}$, et l'opérateur $\bar{\partial}_b$ ne dépendent pas de la fonction r particulière.

L'opérateur $\bar{\partial}_b$ ainsi défini possède les propriétés suivantes, qu'on déduit aisément des propriétés correspondantes pour le $\bar{\partial}$:

1) $\bar{\partial}_b^2 = 0$
2) $\bar{\partial}_b(\varphi \wedge \psi) = \bar{\partial}_b\varphi \wedge \psi + (-1)^{p+q}\varphi \wedge \bar{\partial}_b\psi$
3) Si W est un vecteur tangent à M anti-holomorphe, et si $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $\langle \bar{\partial}_b f, W\rangle = Wf$.

Pour étudier le complexe ainsi défini, on introduit l'adjoint formel de $\bar{\partial}_b$, soit $\vartheta_b : \mathcal{B}_{p,q+1} \to \mathcal{B}_{p,q}$, et le "Laplacien" associé $\square_b = \bar{\partial}_b \vartheta_b + \vartheta_b \bar{\partial}_b$. C'est cet opérateur que nous allons étudier dans le cas particulier où M est la sphère unité de $\mathbb{C}^{n+1}$. Nous indiquons sommairement au § 9 comment on peut, à partir de ce cas particulier, obtenir des résultats dans le cas où M est <u>strictement pseudo-convexe</u>.

(*) Pour plus de détails, voir le chapitre 5 de [1].

§ 2. GROUPE DE HEISENBERG

Soit $\vec{n}$ le champ de vecteurs normal à M. Le champ $\vec{v}$ qui s'en déduit par multiplication complexe par i est un champ tangent, qui joue un rôle très particulier : par exemple, c'est une direction caractéristique pour $\square_b$. De plus, des travaux antérieurs (voir [2] pour l'étude du noyau de Poisson-Szegö, et [4] pour le noyau de Bergman) ont mis en évidence "l'anisotropie" du plan tangent. C'est pour ces raisons qu'on utilise, de préférence à la boule unité complexe, sa réduction comme domaine de Siegel de type II, dûe à Piatetskii-Shapiro (voir [3]). Soit

$$\mathbb{D}_{n+1} = \{ \zeta \in \mathbb{C}^{n+1} : \sum_1^n |\zeta_j|^2 - \operatorname{Im} \zeta_0 < 0\}, \text{ et sa frontière}$$

$$M_n = \partial \mathbb{D}_{n+1} = \{ \zeta \in \mathbb{C}^{n+1} : \sum_1^n |\zeta_j|^2 - \operatorname{Im} \zeta_0 = 0 \} .$$

Un sous-groupe du groupe des automorphismes holomorphes de $\mathbb{D}_{n+1}$ est particulièrement important. Désignons par H_n la variété $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$, munie du produit $(t,z).(t',z') = (t + t' + 2\operatorname{Im} \sum_1^n z_j\bar{z}'_j, z+z')$. H_n est un groupe de Lie nilpotent, que l'on fait agir de manière affine et holomorphe sur $\mathbb{C}^{n+1}$ par $(t,z).\zeta = \zeta'$, avec $\zeta'_0 = \zeta_0 + t + i|z^2| + 2i \sum_1^n \zeta_j\bar{z}_j$.

$$\zeta'_j = \zeta_j + z_j$$

Cette action de H_n préserve la quantité $\sum_1^n |\zeta_j|^2 - \operatorname{Im}\zeta_0$; donc H_n opère sur $\mathbb{D}_{n+1}$ et sur M_n ; en fait il agit <u>simplement transitivement</u> sur M_n, de sorte qu'on identifie M_n avec H_n, via

$$(t,z) \longleftrightarrow (t,z).0 = (t + i|z|^2, z_1, \ldots, z_n).$$

on va utiliser les champs de vecteurs invariants (à gauche) sur H_n pour écrire explicitement l'opérateur $\square_b$. Une base est donnée par

$$X_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + 2y_j \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_j = \frac{\partial}{\partial y_j} - 2x_j \frac{\partial}{\partial t}, \quad T = \frac{\partial}{\partial t},$$

où l'on a posé $z_j = x_j + iy_j$ $(1 \le j \le n)$. Les relations de commutation s'écrivent $[X_j, Y_j] = 4T$, tous les autres crochets sont nuls. C'est par analogie avec les relations de commutation en mécanique quantique qu'on a baptisé H_n groupe de Heisenberg. On introduit aussi les champs complexes $Z_j = 1/2(X_j - iY_j)$ et $\bar{Z}_j = 1/2(X_j + iY_j)$. On munit H_n de la métrique invariante à gauche qui rend la base précédente orthonormale, et on note $dw_1, dw_2, \dots, dw_n, d\bar{w}_1, \dots, d\bar{w}_n, \tau$ la base duale. Un élément φ de $\mathcal{B}_{o,q}^{(\bullet)}$ s'identifie à $\varphi = \sum_J \varphi_J d\bar{w}^J$, où $J = (j_1, \dots, j_q)$, avec $1 \leq j_1 < \dots < j_q \leq n$, et $d\bar{w}^J = d\bar{w}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{w}_{j_q}$. Le calcul de $\square_b$ fournit explicitement

$\square_b(\sum_J \varphi_J d\bar{w}^J) = \sum_J (\mathcal{L}_{n-2q}\varphi_J) d\bar{w}^J$, où pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose

$\mathcal{L}_\alpha = -\frac{1}{2}\sum_1^n (Z_j\bar{Z}_j + \bar{Z}_j Z_j) + i\alpha T$. On est donc ramené à l'étude des opérateurs scalaires $\mathcal{L}_\alpha$.

§ 3. CONSTRUCTION DE LA SOLUTION FONDAMENTALE

Le domaine $\mathbb{D}_{n+1}$ possède d'autres automorphismes que ceux de H_n auxquels vont correspondre des invariances de $\mathcal{L}_\alpha$. A chaque r, $0 < r < \infty$, on associe l'application qui à $(\zeta_0, \zeta) \in \mathbb{C}^{n+1}$ fait correspondre $(r^2\zeta_0, r\zeta)$, qui induit sur H_n l'automorphisme $r(t,z) = (r^2t, rz)$. On obtient ainsi un groupe d'automorphismes à un paramètre de H_n. $\mathcal{L}_\alpha$ est en un sens évident homogène de degré 2. Définissons la "norme" de (t,z) par $|(t,z)| = (t^2 + |z|^4)^{1/4}$, de sorte que $|r(t,z)| = r|(t,z)|$. Enfin une transformation unitaire en z conserve $\mathbb{D}_{n+1}$, et aussi $\mathcal{L}_\alpha$. On est donc

amené à chercher une solution de $\mathcal{L}_\alpha\varphi_\alpha = 0$ sur $H_n \setminus \{0\}$ sous la forme $\varphi_\alpha(t,z) = |(t,z)|^{-2n} f(t/|(z,t)|^2)$. Résolvant l'équation différentielle que doit satisfaire f, on trouve alors, à une constante près $\varphi_\alpha(t,z) = (|z|^2 - it)^{-(\frac{n+\alpha}{2})}(|z|^2 + it)^{-(n-\alpha/2)}$. Enfin, on montre, par approximation que $\mathcal{L}_\alpha\varphi_\alpha = c_\alpha\delta$, avec $c_\alpha = \dfrac{2^{2-2n}\pi^{n+1}}{\Gamma(\frac{n+\alpha}{2})\Gamma(\frac{n-\alpha}{2})}$. Le point important est que $c_\alpha = 0$ précisément lorsque $\alpha = \pm n, \pm(n+2), \dots$ Si $c_\alpha \neq 0$, on dira que α est admissible, et on pose $\phi_\chi = c_\alpha^{-1}\varphi_\alpha$. H_n est muri d'une convolution, définie par

---

(•) le cas $p \neq 0$ n'apporte aucune difficulté nouvelle, si ce n'est de notation.

$$f * g(u) = \int f(v)\, g(v^{-1}u)\, dv = \int f(uv^{-1})\, g(v)\, dv ,$$

pour les fonctions à support compact, et qui s'étend dans les conditions habituelles aux distributions. Si α est admissible, on pose $K_\alpha f = f * \phi_\alpha$. $\mathcal{L}_\alpha$ étant invariant à gauche, alors $\mathcal{L}_\alpha K_\alpha f = f * \mathcal{L}_\alpha \phi_\alpha = f$; mais comme la relation est vraie pour tout α admissible, et que l'adjoint de $\mathcal{L}_\alpha$ n'est autre que $\mathcal{L}_{-\alpha}$, on en déduit que $K_\alpha \mathcal{L}_\alpha f = f$.

Théorème 1 : Si α est admissible, alors $\mathcal{L}_\alpha$ est localement résoluble, et hypoelliptique.

Par contre, si $\alpha = \pm n, \pm(n+2), \ldots, \varphi_\alpha$ est une fonction possédant une singularité à l'origine, et cependant $\mathcal{L}_\alpha \varphi_\alpha = 0$.

§ 4. DISTRIBUTIONS HOMOGENES SUR H_n

Pour obtenir des inégalités fines sur l'opérateur $\mathcal{L}_\alpha$, on va développer une théorie des distributions homogènes, et notamment des distributions en valeur principale, analogues aux noyaux de Calderon-Zygmund dans la théorie classique.

Si f est une fonction définie sur $H_n \setminus \{0\}$, on dit qu'elle est homogène de degré λ, si pour tout $r > 0$, $f(ru) = r^\lambda f(u)$; si F est une distribution, on dit qu'elle est homogène de degré λ, si pour tout $r > 0$, et toute fonction $g \in \mathcal{C}^\infty(H_n)$, $F(g(r.)) = r^{2n+2} r^\lambda F(g)$.

Si f est une fonction homogène de degré $-2n-2$, localement intégrable en dehors de l'origine, on peut définir sa valeur principale μ_f en montrant que

$$\int_{a \le |u| \le b} f(u)\, du = \mu_f . \operatorname{Log} \frac{b}{a} .$$

Si $\mu_f = 0$, on peut alors définir une distribution en valeur principale, en posant

$$F(g) = (PVf)(g) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|u| \ge \varepsilon} f(u) g(u)\, du = \int_{|u| \ge 1} f(u) g(u)\, du + \int_{|u| \le 1} f(u) (g(u) - g(0))\, du .$$

la dernière intégrale étant absolument convergente.

Supposons f régulière en dehors de l'origine; on a alors l'analogue suivant du résultat de Calderon-Zygmund.

Proposition : L'application $g \mapsto g * (PVf)$ s'étend en une transformation bornée sur $L^p(H_n)$ pour $1 < p < \infty$.

La démonstration se déroule en deux temps : on montre d'abord que l'opérateur ainsi défini est borné sur L^2 : comme le recours à l'analyse harmonique du groupe H_n semble difficile, on va utiliser un découpage "presque orthogonal" de l'opérateur en cause (obtenu en tronquant le noyau f suivant les anneaux $2^{-j-1} < |u| < 2^{-j}$), en un sens que précise le lemme suivant, dû à Knapp et Stein.

Lemme (de Cotlar)) : Soit (A_j) une famille d'opérateurs d'un espace de Hilbert, telle que

1) $\operatorname{Sup} \|A_j\| \leq C < +\infty$

2) $\|A_\ell A_j^*\| \leq C\, \varepsilon^{|j-\ell|}$, $\|A_\ell^* A_j\| \leq C\, \varepsilon^{|j-\ell|}$, avec $0 < \varepsilon < 1$,

alors l'opérateur $\sum_i A_i$ est borné sur L^2.

Une fois le résultat L^2 acquis, on adapte à H_n la théorie classique du découpage de Calderon-Zygmund des fonctions de L^1 pour obtenir l'inégalité faible correspondante. Le résultat L^p s'en déduit par interpolation à la Marcinkiewicz et dualité. Pour les distributions homogènes de degré supérieur, régulières en dehors de l'origine, on a un théorème analogue, dont la démonstration est plus simple.

Propotision : Soit F une distribution régulière homogène de degré λ, $-2n-2 < \lambda < 0$; l'application $g \to g * F$ s'étend en une application bornée de L^p dans L^q, où $1/q = 1/p - \lambda/2n+2 - 1$, $1 < p < q < \infty$, et de L^1 dans $L_{loc}^{-(\frac{2n-2}{\lambda})-\varepsilon}$.

§ 5. ESTIMATIONS L^p ET LIPSCHITZ POUR $\mathcal{L}_\alpha$.

Désignons par L_i l'un quelconques des 2n champs de vecteurs invariants à gauche $X_1, X_2, \ldots, Y_1, \ldots, Y_n$. Les (L_i) engendrent l'algèbre de Lie de H_n, puisque $T = 1/4[X_i Y_i]$; ils permettent de définir une filtration de l'algèbre des opérateurs différentiels invariants à gauche , en posant

a_k = l'espace vectoriel engendré par l'identité et les produits $L_{a_1} \ldots L_{a_j}$, avec $j \leq k$. En particulier T est de degré 2 pour cette filtration.

Les espaces S_k^p qu'on introduit sont les analogues des espaces classiques de Sobolev, adaptés à l'anisotropie de H_n

$$S_k^p = \{ f \in L^p, Df \in L^p \text{ , pour tout } D \in \mathcal{a}_k \} \quad ,$$

munis de la norme évidente qui en fait des espaces de Banach.

<u>Théorème 2</u> : <u>Soit</u> α <u>admissible</u>, <u>et</u> $1 < p < \infty$, $k\, 0,1,2,\ldots$
<u>Alors</u> $\|f\|_{p,k+2} \leq C_{p,k}(\|\mathcal{L}_\alpha f\|_{p,k} + \|f\|_p)$.

<u>Théorème 3</u> : <u>Soit</u> α <u>admissible</u>, F <u>et</u> G <u>des distributions telles que</u> $\mathcal{L}_\alpha F = G$ <u>sur un ouvert</u> U <u>de</u> H_n. <u>Alors</u>

$$G \in S_k^p(U,\text{loc}) \Rightarrow F \in S_{k+2}^p(U,\text{loc}) \qquad 1 < p < \infty$$

$$\left.\begin{array}{l} G \in L^p(U,\text{loc}) \Rightarrow F \in L^q(U,\text{loc}),\ p > 1 \\ G \in L^1(U,\text{loc}) \Rightarrow F \in L^{q-\varepsilon}(U,\text{loc}),\ p = 1 \end{array}\right\} \quad 1/q = 1/p - 1/n+1$$

Esquissons la démonstration du théorème : on a $f = K_\alpha \mathcal{L}_\alpha f$, et par suite $\mathcal{L}_\alpha f \to L_i L_j f$ est donnée par la convolution de f avec $L_i L_j K_\alpha$ qui est une intégrale en vp ; d'où $\|L_i L_j f\|_p \leq C_p(\|\mathcal{L}_\alpha f\|_p)$. D'où

$$\|f\|_{p,2} = \|f\|_p + \sum_i^{2n} \|L_j f\|_p + \sum_{i,j}^{2n} \|L_i L_j f\|_p \leq C_p(\|\mathcal{L}_\alpha f\|_p + \|f\|_p) \quad ,$$

car il est facile d'estimer $\|L_j f\|_p$ par $C(\|L_j^2 f\|_p + \|f\|_p)$, en utilisant la formule de Taylor pour $f(u.\gamma(t))$ où $\gamma(t)$ est le groupe à 1 paramètre engendré par L_j. On a donc démontré l'inégalité désirée lorsque $k = 0$. Le cas général s'en déduit en montrant que les intégrales singulières préservent non seulement les espaces L^p. mais aussi les espaces S_k^p.

On peut également introduire des espaces de Lipschitz adaptés à H_n, en utilisant la "norme" $|.|$, au lieu de la norme euclidienne :

pour $0<\beta<1$, $\Gamma_\beta = \{f \in L^\infty \cap C^0, \ \sup\limits_{u,v} |f(vu) - f(v)|/|u|^\beta < \infty\}$

pour $\beta = 1$, $\Gamma_1 = \{f \in L^\infty \cap C^0, \ \sup\limits_{u,v} |f(vu) + f(v u^{-1}) - 2f(v)/|u| < \infty\}$

pour $\beta = [\beta] + \beta'$ $\Gamma = \{f \in L^\infty \cap C^0, \ Df \in \Gamma_{\beta'}$, pour tout $D \in \mathcal{C}_{[\beta]}\}$

On montre que les distributions en vp operent sur les Γ_β, et que les distributions homogenes d'ordre supérieur sont régularisantes dans les espaces Γ_β. On en déduit les résultats de régularité suivants :

<u>Théoreme 4</u> : <u>Soit</u> α <u>admissible</u>, F <u>et</u> G <u>deux distributions telles que</u> $\mathcal{L}_\alpha F = G$ <u>sur un ouvert</u> U <u>de</u> H_n. <u>Alors</u>

$$G \in \Gamma_\beta(U,loc) \Rightarrow F \in \Gamma_{\beta+2}(U,loc) \qquad 0 < \beta < \infty$$

$$G \in L^p(U,loc) \Rightarrow F \in \Gamma_\beta(U,loc) \quad \beta = 2 - \frac{2n+2}{p} > 0$$

<u>Remarque</u> : Pour retrouver les résultats classiques de Kohn-Nirenberg et Radkevic, il faut étudier les relations entre les espaces de Sobolev (resp. de Lipschitz) classiques et ceux introduits ici, on a essentiellement

$$S_k^p \subset L_{k/2}^p(loc) \quad \text{et} \quad \Gamma_\beta \subset \Lambda_{\beta/2}(loc).$$

Enfin, il existe un lemme de Sobolev reliant S_k^p et Γ_β, à savoir

$$S_k^p \subset \Gamma_\beta(loc) \quad \text{si} \quad \beta = k - \frac{2n+2}{p} > 0.$$

§ 6. <u>RETOUR SUR LES VALEURS EXCEPTIONNELLES</u>

L'analyse harmonique du groupe de Lie nilpotent H_n est bien connue : en dehors des représentations triviales sur le centre $\mathcal{C} = \{(t,0)\}$ qui correspondent aux caracteres de $\mathbb{R}^{2n} \simeq H_n|\mathcal{C}$, les représentations unitaires irréductibles de H_n sont indexées par un nombre réel $\lambda \neq 0$; π_λ opère sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ par

$$(\pi_\lambda(t,x,y).f)(\xi) = e^{i\lambda(t + 4\xi.y - 2x.y)} f(\xi - x).$$

cette représentation π_λ détermine une représentation $d\pi_\lambda$ de l'algèbre de Lie de H_n par des opérateurs non bornés sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, mais à domaine dense, qui s'étend à l'algèbre des opérateurs différentiels invariants à gauche. En particulier $d\pi_\lambda(\mathcal{L}_\alpha)$ est l'opérateur différentiel donné par

$$(d\pi_\lambda(\mathcal{L}_\alpha)f(\xi) = \frac{1}{4}\sum_1^n (16\lambda^2\xi_j^2 f(\xi) - \frac{\partial^2}{\partial\xi_j^2}f(\xi)) - \alpha\lambda f(\xi)$$

Dans la somme, on reconnaît (à une homothétie de rapport $2\sqrt{|\lambda|}$ près) l'opérateur de Hermite n-dimensionnel. Il possède un développement en fonctions propres (produits de fonctions d'Hermite), et on sait que son spectre est n, n+2,.... Par suite, si α est admissible, $\mathcal{L}_\alpha$ est inversible (au sens algébrique), alors que si α ne l'est pas $\mathcal{L}_\alpha$ possède un noyau de dimension infinie.

§ 7. CAS D'UN OUVERT STRICTEMENT PSEUDO-CONVEXE.

Revenons au cas général, et soit $\tau = i(\bar\partial - \partial)r$; τ s'annule sur les vecteurs holomorphes et antiholomorphes tangents à M. Par suite :

$$(*) \quad -id\tau(Z_1,\bar Z_2) = -\frac{i}{2}\{Z_1(\tau,\bar Z_2) - \bar Z_2(\tau,Z_1) - \tau([Z_1,\bar Z_2])\} = \frac{1}{2}\tau([Z_1,\bar Z_2])$$

Si la forme hermitienne ainsi définie (appelée forme de Levi) est définie positive, on dit que M est strictement pseudo-convexe. S'il en est ainsi, on peut construire en chaque point $\xi \in M$ un système de coordonnées dans lequel M est "osculatrice" à l'hypersurface $\mathrm{Im}\, z_o = \sum_1^n |z_j|^2$.
En effet choisissons au voisinage de ξ un repère de vecteurs tangents holomorphes $(Z_1,\dots,Z_n)$ orthonormés en chaque point pour la forme de Levi, et soit T le champ de vecteur dual de la forme τ. Par un changement de variable affine, on peut toujours supposer que les coordonnées $\zeta_o, \zeta_1,\dots,\zeta_n$ ont été choisies de sorte que, au point ξ

$$\frac{\partial}{\partial\zeta_j} = Z_j$$

$$dr = -\mathrm{Im}\, d\zeta_o$$

Mais d'apres la formule (*) $\dfrac{\partial^2 r}{\partial\zeta_j\partial\bar\zeta_k}(\xi) = 2\,\partial\bar\partial r(Z_j.\bar Z_k)(\xi)$

$$= -i\,d\tau(Z_j,\bar Z_k)(\xi) = \delta_{jk}$$

Par suite, le développement de Taylor de r au voisinage de ξ s'écrit

$$r = -\operatorname{Im}\zeta_o + \sum_1^n |\zeta_j|^2 + \operatorname{Re}\sum_{j,k} \frac{\partial^2 r}{\partial\zeta_j\partial\zeta_k}(\xi)\zeta_j\zeta_k + O(|\zeta_o||\zeta| + |\zeta|^3)$$

On pose alors $z_j = \zeta_j$ $(1 \leq j \leq n)$ et $z_o = \zeta_o - i\sum_{j,k} \frac{\partial^2 r}{\partial\zeta_j\partial\zeta_k}(\xi)\zeta_j\zeta_k$; on définit ainsi un système de coordonnées (le jacobien vaut 1 en ξ), dans lequel

$$r = -\operatorname{Im} z_o + \sum_1^n |z_j|^2 + O(|z_o||z| + |z|^3)$$

Soit $\Theta(\xi,\eta) = \Theta_\xi(\eta)$ l'élément de H_n qui représente η dans le système de coordonnées d'origine ξ ; l'application Θ est bien définie dans un voisinage U de la diagonale de $M \times M$; si ψ est une fonction égale à un dans un voisinage plus petit de la diagonale, et à support dans U, on pose $K_q(\xi,\eta) = \psi(\xi,\eta)\,\phi_{n-2q}(\Theta(\eta,\xi))$, et soit A_q l'opérateur intégral dont le noyau est K_q. Alors A_q est une paramétrix de $\square_b$, en ce sens que $1 - \square_b A_q$ et $1 - A_q\square_b$ sont des opérateurs régularisants (au sens des espaces S_k^p). A partir de là, il est possible d'obtenir des résultats de régularité pour $\square_b$, analogues à ceux des théorèmes 3 et 4.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. B. Folland et J. J. Kohn : The Neumann problem for the Cauchy-Riemann complex, Ann. of Math. Studies 75, Princeton Univ. Press, Princeton, 1972.

[2] A. Koranyi et S. Vagi : Singular integrals in homogeneous spaces and some problems of classical analysis, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 25 (1971), 575-648.

[3] Piatetski-Shapiro : Géométrie des domaines classiques et théorie des fonctions automorphes , Dunod.

[4] E. M. Stein : Singular integrals and estimates for the Cauchy-Riemann equations, Bull. Amer. Math. Soc. 79 (1973), 440-445.

[5] Folland et Stein : Estimates for the ∂_b complex and analysis on the Heisenberg group. Comm. Pure and Appl. Math. Vol. XXVII, 429-522 (1974).
