Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

J. Bros

D. Iagolnitzer

Tuboïdes et structure analytique des distributions

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1974-1975), exp. nº 18, p. 1-33

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1974-1975____A17_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

SEMINAIRE GOULAOUIC-LIONS-SCHWARTZ
1974-1975

TUBOIDES ET STRUCTURE ANALYTIQUE DES DISTRIBUTIONS

par J. BROS et D. IAGOLNITZER

II. SUPPORT ESSENTIEL ET STRUCTURE ANALYTIQUE DES DISTRIBUTIONS

par D. IAGOLNITZER

Exposé n$^{\text{o}}$ XVIII

16 Avril 1975

AVANT-PROPOS♦

L'approche que nous présentons ici, sous sa forme la plus récente, a été élaborée en liaison avec les problèmes de la théorie quantique relativiste depuis 1967-68, et a été développée depuis dans différentes directions [1]. Nous nous restreindrons ici à certains aspects des résultats obtenus.

Le paragraphe 1 est une introduction aux problèmes de la structure analytique des distributions et rappelle certains résultats simples obtenus à l'aide de la transformation de Fourier.

Le paragraphe 2 introduit la transformation de Fourier généralisée et la notion de support essentiel.

Les théorèmes correspondants de décomposition des distributions en sommes de valeurs au bord de fonctions analytiques sont alors présentés dans le paragraphe 3 (théorème locaux) et 4.

Enfin le paragraphe 5 décrit certains résultats sur la multiplication, l'intégrale et la restriction à des sous-variétés des distributions.

Les résultats présentés sont voisins de certains de ceux obtenus par Sato, Kawai, Kashiwara (SKK) [2] et il existe aussi des liens avec certains des concepts introduits par L. Hörmander [3]. Nous préciserons ces liens au cours de l'exposé.

♦ Les résultats de cet exposé sont comme ceux de l'exposé n° XVI, [0] dus à une collaboration entre J. Bros et le présent auteur.

§ 1. INTRODUCTION

Pour fixer les idées, considérons d'abord une distribution tempérée f définie sur $\mathbb{R}^n_{(x)}$ ♦, et supposons pour simplifier que f décroit suffisamment à l'infini.

On montre facilement à l'aide de la transformation de Fourier qu'il existe toujours n + 1 distributions f_i, dont chacune est valeur au bord (au sens des distributions) d'une fonction $\underline{f}_i$ analytique dans un tube $\mathbb{R}^n + i\,\Gamma_i$, où Γ_i est un cône ouvert convexe (de sommet l'origine) dans $\mathbb{R}^n_{(y)}$, telles que :

$$f = \sum_i f_i \quad \text{dans } \mathbb{R}^n_{(x)} \tag{1}$$

Il suffit pour le voir de considérer la transformée de Fourier $\tilde{f}$ de f (qui est ici une fonction régulière) et de recouvrir l'espace dual $\mathbb{R}^n_{(v)}$ de $\mathbb{R}^n_{(x)}$ (ou $\mathbb{R}^n_{(y)}$) par n + 1 cônes convexes fermés saillants C_i de sommet l'origine. Etant donné une partition $\{\theta_i\}$, i=1,...,n+1, de l'unité dans $\mathbb{R}^n_{(v)}$ par des fonctions θ_i telles que supp $\theta_i \subset C_i$, $\forall i$, la décomposition (1) est obtenue directement par transformation de Fourier inverse de $\tilde{f} = \sum_i (\tilde{f}\theta_i)$: la transformée f_i de $\tilde{f}\theta_i$ est en effet, en vue des propriétés de support de θ_i, valeur au bord dans $\mathbb{R}^n_{(x)}$ d'une fonction $\underline{f}_i$ analytique dans le tube $\mathbb{R}^n + i\,\Gamma_i$ dont la base Γ_i est le cône dual de C_i ♦♦ ($\underline{f}_i$ étant la transformée de Laplace de $\tilde{f}\theta_i$).

La méthode utilisée montre aussi que la décomposition (1) est non unique, les distributions f_i et les cônes Γ_i dépendant de la décomposition de $\mathbb{R}^n_{(x)}$ choisie.

Propriétés de décroissance exponentielle de $\tilde{f}$ et structure analytique de f.

Si maintenant $\tilde{f}$ présente des propriétés de décroissance exponentielle uniforme en dehors d'une union (finie) de cônes convexes fermés saillants C_j (de sommet l'origine), la même méthode montre de plus que f

♦ L'indice entre parenthèses dans $\mathbb{R}^n_{(x)}$, $\mathbb{R}^n_{(y)}$, $\mathbb{R}^n_{(v)}$, $\mathbb{C}^n_{(z)} = \mathbb{R}^n_{(x)} + i\mathbb{R}^n_{(y)}$, etc... sert ici uniquement à désigner le nom des variables dans l'espace $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$,... considéré.

♦♦ $C_i \equiv \{v ; v.y \geq 0, \forall\, y \in \Gamma_i\}$ où v.y désigne le produit habituel ($v.y = \sum_{k=1}^{n} y_k v_k$)

est, dans $\mathbb{R}^n$, somme de distributions f_j, valeurs au bord de fonctions analytiques $\underline{f}_j$ suivant les directions des cônes Γ_j, duaux des cônes C_j (la contribution du complément de $\bigcup_j C_j$ à la transformée de Fourier de $\tilde{f}$ est en effet analytique dans un tube entourant les réels).

Réciproquement si f est valeur au bord dans $\mathbb{R}^n_{(x)}$ d'une fonction analytique $\underline{f}$, suivant les directions d'un cône Γ, respectivement est somme de distributions f_j valeurs au bord de fonctions analytiques suivant les directions de cônes Γ_j, l'on montre (voir par exemple [4] que $\tilde{f}$ décrit exponentiellement en dehors du cône dual C de Γ, respectivement en dehors de $\bigcup_j C_j$.

L'analyse qui précède montre que toutes les décompositions possibles de f en somme de distributions f_j valeurs au bord dans $\mathbb{R}^n_{(x)}$ de fonctions analytiques $\underline{f}_j$ suivant les directions de cônes ouverts convexes Γ_j, peuvent être <u>caractérisées</u> par l'ensemble des directions de $\mathbb{R}^n_{(x)}$ le long desquelles $\tilde{f}$ ne décroit pas exponentiellement; cet ensemble définit une première notion "globale" de <u>support essentiel</u> associée à f.

Les cônes Γ_j considérées ci-dessus sont cependant <u>indépendants</u> du point réel X de $\mathbb{R}^n_{(x)}$ considéré, et les décompositions correspondantes ne peuvent en conséquence prendre en compte la structure analytique <u>locale</u> plus fine que f peut avoir en différentes régions réelles.

<u>Structure analytique locale de f au sens C^∞</u>

Une caractérisation de la strucutre analytique locale de f, dans le voisinage d'un point donné X de $\mathbb{R}^n_{(x)}$, <u>au sens C^∞</u>, c'est-à-dire des propriétés de décomposition locales de f du type

$$f = \sum_j f_j + g \qquad (2)$$

où les distributions f_j sont localement valeurs au bord de fonctions analytiques suivant les directions de certains cônes ouverts convexes Γ_j, et où g est un terme supplémentaire C^∞ dans le voisinage de X, peut à nouveau être donnée simplement à l'aide de la transformation de Fourier. On introduit dans ce but des fonctions χ de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_{(x)})$ à support compact dans le voisinage de X, et la structure analytique locale de f peut alors être caractérisée par les propriétés de décroissance rapide des transformées de Fourier $\widetilde{\chi f}$ de χf (voir par exemple [4]).

La notion de base qui s'introduit dans ce contexte est celle de "support essentiel C^{∞}" [1] $\sigma(f)$ introduite explicitement pour la première fois par L. Hörmander [3] sous le nom de front d'onde, la "fibre" $\sigma_X(f)$ de $\sigma(f)$ au point X étant le sous-ensemble fermé de directions de $\mathbb{R}^n_{(v)}$ le long desquelles $\widetilde{\chi f}$ ne décroit pas rapidement, dans la limite où le support de χ autour de X tend vers zéro.

Nous introduisons ci-dessous dans la section 2, à l'aide d'une transformation de Fourier généralisée, une notion de support essentiel qui permettra (paragraphes 3 et 4) de caractériser, de nouveau en termes de décroissance exponentielle, la structure analytique locale d'une distribution f (définie sur $\mathbb{R}^n$ ou sur une variété analytique réelle) sans termes supplémentaires C^{∞}, et les décompositions correspondantes de f en somme de valeurs au bord de fonctions analytiques $\underline{f}_i$ suivant des directions pouvant maintenant varier avec le point réel X considéré (les $\underline{f}_i$ pouvant aussi être analytiques en certains points réels). Les domaines d'analyticité des $\underline{f}_i$ sont alors des tuboïdes $\mathcal{D}_i = \bigcup_x (x + i\,D_{ix})$ de profils $\Lambda_i = \bigcup_x (x + i\,\Lambda_{ix})$ au sens défini dans l'exposé XVI , dans lequel la notion simple de valeur au bord (distribution) d'une fonction analytique dans un tuboïde (à croissance lente près des réels) a été donnée .

§ 2. TRANSFORMATION DE FOURIER GENERALISEE ET SUPPORT ESSENTIEL

a) Transformation de Fourier généralisée

Considérons d'abord le cas d'une distribution tempérée f définie sur $\mathbb{R}^n_{(x)}$. Nous désignerons comme précédemment par $\mathbb{R}^n_{(v)}$ l'espace dual de $\mathbb{R}^n_{(x)}$, et lui associons ci-dessous un espace $\mathbb{R}^{n+1}_{(v,v_0)}$ à n + 1 dimensions où v_0 est une variable réelle supplémentaire (indépendante des variables $v = v_1, \ldots, v_n$).

Pour tout point X de $\mathbb{R}^n_{(x)}$, la transformation de Fourier généralisée $\mathcal{F}$ [5] associe à f la fonction définie dans la région $v_o > 0$ de $\mathbb{R}^{n+1}_{(v,v_o)}$ par :

$$F(v,v_o;X) = \int f(x)\, e^{-iv.x - v_o(x-X)^2}\, dx \qquad (3)$$

où v.x est le produit scalaire habituel ($v.x = \sum_{i=1}^{n} v_i x_i$) et $x^2 = \sum x_i^2$.
F est une fonction régulière de v, v_o dans la région $v_o > 0$, et sa limite quand $v_o \to 0$ est une distribution tempérée qui est la transformée de Fourier $\tilde{f}$ de f (et est indépendante de X).

Il est utile d'introduire aussi des transformations $\mathcal{F}_\Phi$ dans lesquelles l'exposant $(x-X)^2$ dans (3) est remplacé par une fonction Φ plus générale possédant des propriétés analogues dans le voisinage de X : analyticité dans un domaine d'holomorphie $\Delta \subset \mathbb{C}^n_{(z)}$ contenant X, $\Phi(X) = 0$, $\Phi(\bar{z}) = \overline{\Phi(z)}$ dans Δ ; de plus Φ doit admettre X comme point critique et être positive dans un voisinage réel de X. Si l'on désigne par Ω^Φ_α le voisinage réel connexe de X défini par $\Phi(x) < \alpha$, Φ possède alors dans le voisinage de X la même "structure emboîtée" que la fonction $(x-X)^2$: il existe $\alpha(\Phi) > 0$ tel que $\Omega^\Phi_{\alpha_1} \subset \Omega^\Phi_{\alpha_2}$, $\forall \alpha_1, \alpha_2$ tels que $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha(\Phi)$.

Etant donné Φ, il existe toujours d'après le lemme de Hefer n fonctions ρ_k définies et analytiques dans $\Delta \times \Delta$, telles que :

$$\Phi(z) - \Phi(z') = -i \sum_{k=1}^{n} \rho_k(z,z')(z_k - z'_k) \qquad (4)$$

Par exemple $\rho_k(z,z') = -i\,(z_k + z'_k - 2X_k)$ dans le cas de la fonction $(x-X)^2$.

On définit alors la transformée généralisée de f <u>au sens des formes différentielles</u> associée à Φ, qui sera utile dans le paragraphe 3 , comme la forme de degré n dans $\mathbb{R}^{n+1}_{(v,v_o)}$ ($v_o \geq 0$) définie, pour tout $z \in \Delta$ par :

$$W^\Phi(v,v_o;X,z) = \sum_{k=o}^{n} (-1)^k\, W^\Phi_k(v,v_o;X,z)\, dv_o \wedge \cdots \wedge \widehat{dv_k} \wedge \cdots \wedge dv_n \qquad (5)$$

où la notation $\widehat{dv_k}$ signifie que ce facteur est omis, et où :

$$
\begin{aligned}
W_o^{\Phi} &\equiv F^{\Phi}(v,v_o) \\
&= \int f(x)\, e^{-iv.x - v_o \Phi(x)} dx
\end{aligned}
\tag{6}
$$

$$
W_k^{\Phi}(v,v_o;X,z) = \int f(x')\, e^{-iv.x' - v_o\Phi(x')} \rho_k(x',z)\, dx' \tag{6'}
$$

$(k = 1,\ldots,n)$.

On vérifie à l'aide de (4) que la forme $e^{iz.v + \Phi(z)v_o} W^{\Phi}$ est fermée pour tout $z \in \Delta$:

$$
d_{(v,v_o)}\left[e^{iz\, v + \Phi(z)v_o}\, W^{\Phi}(v,v_o;X,z)\right] = 0 \tag{7}
$$

ce qui permettra à l'aide du théorème de Stokes d'obtenir une généralisation de la formule inverse de Fourier de la forme :

$$
f(x) = \int_{\Sigma} e^{iv.x + v_o\Phi(x)} \times W^{\Phi}(v,v_o;X,x) \tag{7'}
$$

où Σ est une hypersurface de dimension n dans le demi-espace $v_o \geq 0$ de $\mathbb{R}^{n+1}_{(v,v_o)}$, les choix possibles de Σ dépendant des propriétés de décroissance à l'infini des coefficients W_k^{Φ} dans $\mathbb{R}^{n+1}_{(v,v_o)}$. ((7') se réduit à la transformation de Fourier inverse dans le cas où Σ est l'hyperplan $v_o = 0$).

Remarque : Nous n'appliquerons dans la suite les formules (5) (6) (6') qu'à des distributions f à support compact dans $\Omega^{\Phi}_{\alpha(\Phi)}$ ou au produit f_χ de f par une fonction χ de $\mathcal{D}(\Omega^{\Phi}_{\alpha\Phi})$.

b) Support essentiel

Nous considérons d'abord ci-dessous le cas d'une distribution tempérée f défini sur $\mathbb{R}^n_{(x)}$.

Le support essentiel $\dot{S}_X(f)$* de f en un point X de $\mathbb{R}^n_{(x)}$ est le sous-ensemble fermé de la sphère unité $S^{n-1}_{(v)}$ dans $\mathbb{R}^n_{(v)}$ qui peut être défini comme suit :

* Le point dans $\dot{S}_X(f)$, $\dot{C}$, $\dot{\Gamma}$,...désignera dans la suite la base sur la sphère unité de cones correspondants $S_X(f)$, C, Γ,...de sommet l'origine dans $\mathbb{R}^n_{(v)}$, $\mathbb{R}^n_{(y)}$,...

<u>Définition 1</u> : Un point $\dot{V} \in S^{n-1}_{(\dot{v})}$ est en dehors de $\dot{S}_X(f)$ s'il existe un cône ouvert $\mathcal{V}$ de sommet l'origine dans $\mathbb{R}^n_{(v)}$ contenant $\dot{V}$, des constantes $\alpha > 0$, $\gamma_0 > 0$, ainsi qu'un polynôme $\mathcal{P}$ et $q \geq 0$ tels que :

$$|F(v,v_0;X)| < (\mathcal{P}(\tau)\, v_0^{-q}) \times e^{-\alpha\, v_0} \tag{8}$$

dans la région $v \in \mathcal{V}$, $0 < v_0 < \gamma_0 |v|$ $\quad (\tau = (v^2 + v_0^2)^{1/2})$.

L'aspect important de la borne (8) est le facteur de décroissance exponentielle $e^{-\alpha\, v_0}$, une borne sur $|F|$ n'incluant pas ce facteur étant toujours vérifiée dans la région $v_0 > 0$. Si f est à support compact, les bornes (8) impliquent par ailleurs toujours des bornes du même type avec $q = 0$:

$$|F(v,v_0;X)| < \mathcal{P}(\tau)\, e^{-\alpha v_0} \tag{8'}$$

pour $v \in \mathcal{V}$, $0 \leq v_0 < \gamma_0 |v|$.

Si l'on pose $v_0 = \gamma |v|$, les bornes (8) ou (8') expriment la décroissance exponentielle de F dans toutes les directions de $\mathbb{R}^n_{(v)}$ en dehors de celles de $S_X(f)$, pour tout $\gamma > 0$ suffisamment petit.

Le support essentiel $\dot{S}(f)$ de f au-dessus d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n_{(x)}$ est le sous-ensemble de $\Omega \times S^{n-1}_{(v)}$ défini par la formule :

$$\dot{S}(f) = \bigcup_{x \in \Omega} (x, \dot{S}_x(f)) \tag{9}$$

Considérons maintenant des fonctions $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_{(x)})$ à support compact contenant X et <u>analytiques dans un voisinage de X.</u> On montre [6] que l'on a toujours :

$$S_X(\chi f) \subset S_X(f) \tag{10}$$

et, si de plus $\chi(X) \neq 0$:

$$S_X(\chi f) \equiv S_X(f) \tag{10'}$$

Soit F_χ la transformée de Fourier généralisée au point X du produit $f\chi$. On montre de plus que les bornes (8) sur F entraînent des bornes analogues sur F_χ, mais dans lesquelles le facteur $\mathcal{P}(\tau) v_o^{-q}$ est remplacé par un <u>facteur de décroissance rapide</u> $\frac{C_N}{1+\tau^N}$ ($\forall$ entier $N \geq 0$), si le support de χ (contenant X) est suffisamment petit. Ce résultat (ainsi que (10) (10')) se démontre [6] à l'aide d'arguments de convolution dans $\mathbb{R}^n_{(v)}$ ou $\mathbb{R}^{n+1}_{(v,v_o)}$ et de propriétés de décroissance exponentielle de la transformée de Fourier généralisée de χ au point X (ces dernières sont obtenues par les méthodes du lemme 3 du paragraphe 3).

On montre alors que la définition 1 est <u>équivalente</u> à la suivante :

<u>Définition 1'</u> : $\dot{V}$ est en dehors de $\dot{S}_X(f)$ s'il existe un voisinage ω de X dans $\mathbb{R}^n_{(x)}$ et un cône ouvert $\mathcal{V}$ de sommet l'origine dans $\mathbb{R}^n_{(v)}$, contenant $\dot{V}$, tels que les bornes suivantes soient satisfaites pour toute fonction χ de $\mathcal{D}(\omega)$ analytique au point X :

$$\forall N \geq 0, \qquad |F_\chi(v,v_o\,;X)| < \frac{C_N}{1+\tau^N}\, e^{-\alpha v_o} \tag{11}$$

dans la région $v \in \mathcal{V}$, $0 \leq v_o < \gamma_o|v|$, les constantes $\alpha > 0$, $\gamma_o > 0$ et C_N pouvant dépendre de χ.

Le lien avec le "front d'onde" ou "support essentiel C^∞" $\sigma_X(f)$ de f au point X (voir introduction) apparaît ici clairement : alors que $\sigma_X(f)$ et l'ensemble des directions de $\mathbb{R}^n_{(v)}$ le long desquelles $\widehat{f\chi}$ c'est-à-dire F_χ restreint à $v_o = 0$, ne décroit pas rapidement, $S_X(f)$ est l'ensemble des directions de $\mathbb{R}^n_{(v)}$ le long desquelles F_χ ne décroit pas de plus <u>exponentiellement</u> comme $e^{-\alpha\gamma|v|}$ pour tout $\gamma > 0$ suffisamment petit (en posant $v_o = \gamma|v|$).

Dans le cas de fonctions Φ plus générales admettant X comme point critique (voir paragraphe a)), $S^\Phi_X(f)$ peut être défini de manière analogue. On montre alors directement, ou à l'aide de la remarque suivant le théorème 1 du paragraphe 3 que $S^\Phi_X(f)$ est en fait <u>indépendant</u> de Φ.

<u>Remarques</u> : L. Hörmander a proposé [3] une extension "au cas analytique" (ou même aux cas quasi-analytiques) du "front d'onde", extension basée

aussi sur la transformation de Fourier, utilisant des suites de fonctions χ appropriées et des bornes correspondantes sur $\widetilde{f\chi}$. Le "front d'onde analytique" ainsi défini coïncide très probablement avec le support essentiel défini plus haut (ou le spectre de SKK : voir paragraphe 3 c)).

Distributions quelconques sur $\mathbb{R}^n$ ou sur une variété analytique réelle $\mathcal{R}$

Dans le cas d'une distribution quelconque f définie sur $\mathbb{R}^n_{(x)}$, $S_X(f)$ peut être défini comme précédemment en introduisant des fonctions χ à support compact contenant X.

Si f est défini sur une variété analytique réelle $\mathcal{R}$, l'on peut introduire au point X des systèmes de coordonnées locales réelles analytiques dans le voisinage de X et définir $S_X(f)$ comme précédemment dans chacun de ces systèmes, à l'aide de fonctions χ à support suffisamment petit. On montre alors [6] directement ou à l'aide du théorème 1 du paragraphe 3 que $S_X(f)$ s'identifie à un sous-ensemble bien déterminé de l'espace cotangent $T^*_X\mathcal{R}$ à la variété $\mathcal{R}$ au point X, indépendant du système de coordonnées considéré.

Nous terminons par les remarques suivantes. On montre (voir [6]) le résultat suivant :

Lemme 1 : Les bornes (8) ou (8') (sur f ou sur $f\chi$) en un point X impliquent des bornes uniformes du même type pour tout X' dans un voisinage ouvert de X (suffisamment petit).

Il en résulte en particulier :

Lemme 2 : Le support essentiel $\dot{S}(f) = \bigcup_{x\in\Omega} (x, \dot{S}_x(f))$ de f au-dessus d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n_{(x)}$, respectivement d'une variété analytique réelle $\mathcal{R}$ est un sous-ensemble fermé de $\Omega\times S^{n-1}_{(\dot{v})}$, respectivement du fibré cotangent en sphères $S^*\Omega$.

Notions plus générales de support essentiel associées à un point X [7]

Etant donné une distribution f définie sur $\mathbb{R}^n$, nous mentionnons brièvement qu'il est utile (voir fin du paragraphe 3) d'introduire aussi deux notions plus élaborées de support essentiel associées à un point X et à une fonction Φ donnée admettant X comme point critique.

(i) $\dot{S}^{\Phi}_{X,\alpha}(f)$ est à nouveau un sous-ensemble fermé de $S^{n-1}_{(v)}$ défini à l'aide des bornes (8) (8'), ou (11) (où χ est choisi de la forme $e^{\frac{1}{\Phi(x)-\alpha}}$ si $x \in \Omega^{\Phi}_{\alpha}$, $\chi = 0$ si $x \notin \Omega^{\Phi}_{\alpha}$), mais avec un taux de décroissance exponentielle α fixé.

(ii) Une notion plus fine de support essentiel est obtenue comme un cône fermé $\underline{S}^{\Phi}_{X,\alpha}(f)$ de sommet l'origine du demi-espace $v_o \geq 0$ de $\mathbb{R}^{n+1}_{(v,v_o)}$, dont la trace sur l'hyperplan $v_o = 0$ est $S^{\Phi}_{X,\alpha}(f)$, en indiquant dans quelle région du demi-espace $v_o \geq 0$ les bornes correspondantes sont valables .

§ 3. THEOREMES LOCAUX DE DECOMPOSITION ET DE L'EDGE-OF-THE-WEDGE GENERALISE [8]

Nous nous restreignons ci-dessous par simplicité au cas de dsitributions f définies sur $\mathbb{R}^n$. Les résultats s'adaptent cependant sans difficultés au cas de distributions définies sur des variétés analytiques réelles.

a) Théorème de décomposition local

Lemme 3 : Soit f une distribution valeur au bord dans un voisinage ω de X d'une fonction analytique $\underline{f}$ suivant les directions d'un cône ouvert Γ. Alors :

$$S_X(f) \subset C \tag{12}$$

où C est le cône dual de Γ.

Preuve : Soit χ une fonction de $\mathcal{D}(\omega)$ analytique au point X. Nous montrons ci-dessous comment obtenir des bornes du type (8') sur F_χ en dehors de C, d'où d'après (10') le résultat annoncé. Une adaptation de la méthode dont nous ne parlerons pas ici permet de montrer de plus directement des bornes du type (11)

Etant donné $\beta > 0$ et $b \in \mathbb{R}^n$, il est utile d'introduire dans $\mathbb{C}^n_{(z)}$ la variété, de dimension réelle n, $\hat{L}_{\beta,b}$ définie par les relations :

$$y + b(\operatorname{Re}\Phi(z) - \beta) = 0 \tag{13}$$

$$\operatorname{Re}\Phi(z) - \beta < 0 \tag{13'}$$

où nous nous restreignons ici par simplicité au cas de la fonction $\Phi(z) = (z - X)^2$.

On vérifie que pour $|b|$ suffisamment petit, $\widehat{L}_{\beta b}$ admet toujours une partie connexe bornée $L_{\beta b}$ s'appuyant sur le bord $\partial\Omega_\beta$ de l'ouvert Ω_β $((x-X)^2 < \beta)$. De plus, pour tout $b \in \Gamma$ de module $|b| \neq 0$ suffisamment petit, et tout $\beta > 0$ suffisamment petit, $L_{\beta b}$ appartient au domaine d'analyticité de $\underline{f}$ et de χ.

Considérons d'abord le cas où f est une fonction continue. F_X s'écrit :

$$F_X(v, v_o; X) = \int f(x)\chi(x)\, e^{-ivx - v_o(x-X)^2} dx$$

La contribution à F_X de la région $(x-X)^2 > \beta$ est clairement bornée par $C_o e^{-\alpha v_o}$ dans toute la région $v_o \geq 0$. La contribution de la région Ω_β $((x-X)^2 < \beta)$ s'évalue de son côté en remplaçant Ω_β par $L_{\beta b}$, et l'on vérifie sans difficulté à l'aide de (13) (13') qu'elle est bornée par $C'_o\, e^{-\alpha v_o}$ dans toute la région $vb + v_o < 0$. Le résultat annoncé s'en déduit en faisant varier la direction de b dans Γ.

Si f est une distribution, on se ramène au même type d'argument en utilisant le lemme élémentaire suivant lequel f est alors dans ω dérivée d'un certain ordre d'une fonction continue elle-même valeur au bord dans ω d'une fonction analytique, suivant les directions de Γ (Ce lemme se démontre en considérant des primitives de $\underline{f}$)

Remarque : La preuve ci-dessus s'adapte sans difficulté au cas de transformées F_X^Φ associées à des fonctions Φ plus générales.

Nous démontrons maintenant le théorème de décomposition local suivant :

Théorème 1 : Les deux propriétés suivantes de f sont équivalentes :

(i) $S_X(f) \subset \bigcup_j C_j$ où $\bigcup_j$ est une union (finie) de cones convexes fermés saillants de sommet l'origine dans $\mathbb{R}^n_{(v)}$.

(ii) Etant donné une famille quelconque $\{\Gamma'_j\}$ de cones convexes ouverts de sommet l'origine dans $\mathbb{R}^n_{(y)}$ tels que $\tilde{\Gamma}'_j \subset\subset \tilde{\Gamma}_j$, $\forall\, j$, où Γ_j est le cône ouvert dual de C_j, il existe un voisinage ω de X et des distributions f'_j, valeurs au bord dans ω de fonctions analytiques $\underline{f}'_j$ suivant les directions des cones Γ'_j, telles que :

$$f = \sum_j f'_j \quad \text{dans } \omega \ .$$

<u>Preuve</u> : La preuve que (ii) → (i) est une conséquence simple du lemme 3. Nous utiliserons pour la réciproque la définition 1' de $S_X(f)$.
Etant donné une famille $\{\Gamma'_j\}$ et la famille $\{C'_j\}$ de cônes duaux ($\dot{C}_j \subset$ intérieur de C'_j, $\forall j$), on peut toujours d'après cette définition choisir une fonction χ analytique et non nulle au point X, telle que F_χ satisfasse les bornes <u>uniformes</u> suivantes :

$$|F_\chi(v,v_o;X)| < \frac{C_N}{1+|v|^N} e^{-\alpha v_o} \tag{14}$$

dans la région $v \in \complement(\bigcup_j C'_j)$, $0 \leq v_o \leq \gamma_o |v|$, où $\alpha > o, \gamma_o > 0$ et C_N sont des constantes dépendant de χ (et des cones C'_j).

Par transformation de Fourier, χf s'écrit (au sens des distributions) :

$$\chi f(x) = \int F_\chi(v,0;X) e^{i v.x} dx \tag{15}$$

La contribution à l'intégrale de la région $\bigcup_j C'_j$ s'évalue comme dans le paragraphe 1 en introduisant une partition de l'unité de $\bigcup_j C'_j$ par des fonctions θ_j à supports dans les cônes C'_j, ce qui conduit à une somme de distributions valeurs au bord (dans $\mathbb{R}^n_{(x)}$) de fonctions analytiques dans des tubes $\mathbb{R}^n + i\Gamma'_j$.

La contribution de la région $\complement(\bigcup_j C'_j)$ est une fonction C^∞ en vue des bornes (14) à $v_o = 0$. Pour étudier ses propriétés d'<u>analyticité</u>, on est amené à considérer la forme différentielle W associée à χf par les équations (5) (6) (6'). (Nous nous restreindrons de nouveau pour simplifier au cas de la fonction $\Phi = (x - X)^2$.

On montre [9] (par des arguments de convolution) que les coefficients W_k de cette forme satisfont tous des bornes <u>uniformes</u> du type (14) en dehors de $\bigcup_j C'_j$ où les constantes C_N, α, γ_o (éventuellement différentes des précédentes) sont indépendantes de z dans tout compact K de $\mathbb{C}^n_{(z)}$ (contenant X).

La propriété (7) et le théorème de Stokes permettent alors d'écrire la contribution étudiée sous la forme :

$$\int_{\Sigma} e^{iv.x+\Phi(x)v_o} W(v,v_o;X,x)$$

où Σ est une hypersurface convenable de dimension n, homotope à $\mathbb{R}^n_{(v)} - \bigcup_j C'_j$, dans $\mathbb{R}^n_{(v)} \times \{v_o \geq 0\} - \bigcup_j C'_j$. On peut choisir par exemple :

$$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$$

où

$$\Sigma_1 = \{v,v_o \ ; \ v \in \partial(\bigcup_j C'_j) \ , \ 0 \leq v_o \leq \gamma_o |v|\}$$

$$\Sigma_2 = \{v,v_o ; v \in \complement(\bigcup_j C'_j), \ v_o = \gamma_o |v|\}$$

En utilisant les bornes mentionnées ci-dessus sur les coefficients W_k, on vérifie que la contribution de Σ_2 définit une fonction <u>analytique</u> dans le voisinage de X. Celle de Σ_1 peut être évaluée à nouveau par un découpage de $\partial(\bigcup_j C'_j)$ en morceaux R_j tels que $R_j \subset \partial C'_j$, $\forall j$.

On vérifie alors à l'aide de cette propriété de support (et des bornes sur W_k) que la contribution associée à chaque R_j définit une fonction valeur au bord dans le voisinage de X d'une fonction analytique suivant les directions du cone Γ'_j.

La décomposition annoncée de f s'obtient en resommant les différentes contributions (χ étant analytique et non nulle au point X).

<u>Remarques</u> :

1) Le lemme 3 et le théorème 1 dans le cas d'un seul cone C permettent d'établir simplement que si f est localement valeur au bord d'une fonction analytique $\underline{f}$ suivant les directions d'un cone ouvert Γ, $\underline{f}$ se prolonge analytiquement dans un domaine admettant comme profil au point X <u>l'enveloppe convexe</u> $\hat{\Gamma}$ de Γ, et f est valeur au bord de $\underline{f}$ suivant les directions de $\hat{\Gamma}$ ($\hat{\Gamma}$ est en effet le bidual de Γ).

Une forme plus précise de ce résultat est indiquée dans la proposition 4 du 1er exposé et démontrée en détail dans [10].

2) La démonstration s'adapte à nouveau sans difficulté au cas de fonctions Φ plus générales, ce qui permet de montrer en particulier que $S_X^\Phi(f)$ est indépendant de Φ.

3) Si $S_X(f)$ est contenu dans une union $\bigcup_j C_j$ de cones fermés C_j de sommet l'origine quelconques (non nécessairement convexes), on vérifie à l'aide du théorème 1 (en utilisant des recouvrements appropriés par des cônes convexes fermés saillants) que pour toute famille $\{C'_j\}$ telle que $\dot{C}_j \subset$ intérieur de $\dot{C}'_j$, $\forall j$, il existe un voisinage ω de X et des distributions f'_j telles que :

$$f = \sum_j f'_j \quad \text{dans } \omega$$

avec

$$S_X(f'_j) \subset C'_j \quad , \quad \forall j$$

4) Le théorème 1 n'implique pas à priori que les distributions f'_j puissent être choisis indépendantes de la famille $\{\Gamma'_j\}$, ou $\{C'_j\}$ considérée. Ce résultat peut cependant se démontrer par une méthode de "recollement" des distributions f'_j associés à chaque famille $\{\Gamma'_j\}$, à l'aide de la généralisation du théorème de Grauert présentée dans le premier exposé. Il s'agit là d'un cas particulier simple du théorème 3 dont la démonstration est abordée dans la section 4.

Théorèmes de décomposition au-dessus d'ouverts Ω

Si l'on utilise les notions plus élaborées de support essentiel mentionnées à la fin du paragraphe 2b), les mêmes méthodes conduisent [11] à des théorèmes d'équivalence entre propriétés du support essentiel $S_{X,\alpha}^\Phi(f)$, respectivement $\underline{S}_{X,\alpha}^\Phi(f)$ et propriétés de décomposition de f dans l'ouvert Ω_α^Φ en somme de valeurs au bord de fonctions $\underline{f}_j$ analytiques dans des "tubes locaux"♦ appropriés au-dessus de Ω_α^Φ. Dans le cas de $\underline{S}_{X,\alpha}^\Phi(f)$

♦ Un "tube local" au-dessus de Ω_α^Φ est un tuboïde dont le profil en tout point $x \in \Omega_\alpha^\Phi$ est constant (indépendant de x), voir exposé n° XVI.

la forme de ces tubes locaux dans $\mathbb{C}^n_{(z)}$ au-dessus de Ω^{Φ}_{α} peut être donnée de manière précise (tubes locaux $T_{B\Phi\alpha}$ de la référence [12]).

b) Théorème local de l'edge-of-the-wedge généralisé [12] [13] [6]

Le théorème suivant de l'edge-of-the-wedge généralisé dans le voisinage d'un point X est un corollaire simple du théorème 1 :

Théorème 2 : Soit $\{f_i\}$ une famille de m distributions ($i = 1,\ldots,m$) valeurs au bord dans un voisinage de X de fonctions analytiques $\underline{f}_i$ suivant les directions de cones ouverts Γ_i, et telles que (dans ce voisinage) :

$$\sum_i f_i = 0 \tag{16}$$

Alors pour toute famille $\{\Gamma'_i\}$ de cones ouverts de sommet l'origine tels que $\dot{\Gamma}'_i \subset\subset \dot{\Gamma}_i$, $\forall$ i, il existe un voisinage ω de X et des distributions f'_{ij}, valeurs au bord dans ω de fonctions analytiques $\underline{f}'_{ij}$ suivant les directions de l'enveloppe convexe $\widehat{\Gamma'_{ij}}$ de $\Gamma'_i \cup \Gamma'_j$, telles que :

$$f_i = \sum_{j\neq i} f'_{ij} \quad \text{dans } \omega, \quad \forall i = 1,\ldots,m \tag{17}$$

$$f'_{ij} = -f'_{ji} \tag{18}$$

Preuve : Le lemme 3 et la relation (16) impliquent l'inclusion :

$$S_X(f_i) \subset \bigcup_{j\neq i} (C_i \cap C_j) \tag{19}$$

où C_i est le cône dual de Γ_i. Le théorème 1 permet alors d'écrire une décomposition de f_i de la forme (17) pour tout $i = 1,\ldots,m$. Le fait que les f'_{ij} puissent être choisies antisymétriques se démontre par récurrence sur m.

Remarque : Dans le cas $m = 2$, ce résultat est le théorème de l'edge-of-the-wedge ordinaire dans le voisinage de X, $\underline{f}'_{12}$ étant un prolongement analytique de $\underline{f}_1$ et $\underline{f}_2$ (ce dernier point résulte du lemme élémentaire suivant lequel deux fonctions analytiques admettant la même valeur au bord distribution à partir de directions communes coïncident).

Dans le cas général, le théorème 2 implique aussi des propriétés de prolongement analytique des fonctions $\underline{f}_i$.

Nous mentionnons pour terminer une extension du théorème 2 qui sera utile dans le paragraphe 4 au-dessus d'ouverts Ω homéomorphes à une boule. Cette extension se démontre par une adaptation [12] des méthodes présentées précédemment dans le cas où Ω est un ouvert de la forme Ω_α^Φ associé à une fonction Φ. Il résulte plus généralement du fait que tout ouvert homéomorphe à une boule peut être considéré comme limite inductive d'ouverts de la forme Ω_α^Φ pour des choix appropriés du point critique X dans Ω, de Φ et de α.

<u>Théorème 2'</u> : Soit $\{f_i\}$ $(i = 1,\dots,m)$ une famille de distributions valeurs au bord dans Ω de fonctions $\underline{f}_i$ analytiques dans des tubes locaux de profils $\Omega \times \Gamma_i$ et telles que $\sum_i f_i = 0$ dans Ω. Alors pour toute famille $\{\Gamma_i'\}$ telle que $\dot{\Gamma}_i' \subset\subset \dot{\Gamma}_i$, $\forall i$, et tout domaine $\Omega' \subset\subset \Omega$, il existe des distributions f_{ij}' vérifiant les propriétés (17) et (18) dans Ω' et valeurs au bord (dans Ω') de fonctions $\underline{f}_{ij}'$ analytiques dans des tubes locaux de profils $\Omega' \times \hat{\Gamma}_{ij}'$.

Les fonctions $\underline{f}_{ij}'$ peuvent de plus être sans difficulté choisies à croissance lente près du bord $\partial\Omega'$ de Ω'.

c) <u>Support essentiel, microanalyticité, et spectre singulier</u>

Considérons la définition suivante de la "microanalyticité" qui est l'analogue pour les distributions d'une de celles données par SKK pour les hyperfonctions.

<u>Définition 2</u> : f est dite microanalytique en un point $(X,\dot{V})$ de $\mathbb{R}^n_{(x)} \times S^{n-1}_{(v)}$ (ou éventuellement de $S^*\mathbb{R}$) s'il existe un voisinage ω de X et une famille (finie) de distributions f_i, valeurs au bord dans ω de fonctions analytiques $\underline{f}_i$ suivant les directions de cones ouverts Γ_i, tels que :

$$f = \sum_i f_i \quad \text{dans } \omega \tag{20}$$

$$\Gamma_i \cap \{y; V\, y < 0\} \neq \emptyset \quad , \quad \forall i \tag{21}$$

Le spectre singulier au point X est l'ensemble des $\dot{V}$ tels que f ne soit pas microanalytique au point $(X,\dot{V})$.

Le théorème 1 permet immédiatement de conclure que spectre singulier (au sens défini ci-dessus) et support essentiel coïncident.

Il fournit de plus un premier théorème de "recollement vertical" au point X :

Lemme 4 : Etant donné un point X et tout sous-ensemble fermé $\mathcal{V}$ de $S^{n-1}_{(v)}$ (ou $S^*_X\mathcal{R}$) tel que f soit microanalytique, au sens de la définition 2, en tout point $(X,\dot{V})$, $\dot{V}\in\mathcal{V}$, il existe un voisinage ω de X et des distributions f_i indépendantes de $\dot{V}$ dans $\mathcal{V}$, valeurs au bord dans ω de fonctions analytiques $\underline{f}_i$ suivant les directions de cones Γ_i, telles que la relation (20) soit satisfaite dans ω et que (21) soit vérifiée pour tout $\dot{V}$ dans $\mathcal{V}$. (la définition 2 n'entraîne à priori une telle indépendance qu'au voisinage de chaque point $\dot{V}$).

§ 4. THEOREMES DE DECOMPOSITION GENERAUX

Nous présentons dans cette section les deux théorèmes suivants qui relient maintenant le support essentiel $S(f) = \bigcup_{x\in\Omega}(x,S_x(f))$ d'une distribution f au-dessus d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n_{(x)}$ ou d'une variété analytique réelle $\mathcal{R}$ et la structure analytique de f au-dessus de Ω.

Théorème 3 : Les deux propriétés suivantes de f sont équivalentes :

(i) $S(f)\subset\Sigma$ où Σ est un sous-ensemble fermé $\Sigma = \bigcup_{x\in\Omega}(x,\Sigma_x)$ de $T^*_x\Omega$.

(ii) f est valeur au bord dans Ω d'une fonction $\underline{f}$ analytique dans un tuboïde de profil $\Lambda = \bigcup_{x\in\Omega}(x,\Lambda_x)$ où, pour tout $x\in\Omega$, Λ_x est le cone ouvert dual de Σ_x.

Ce théorème est une conséquence immédiate du théorème 1 dans le cas particulier où la famille d'indices j est réduite à un terme, et du lemme élémentaire suivant lequel deux fonctions analytiques admettant même valeur au bord (distribution) à partir de directions communes, coïncident.

Théorème 4 : Soit $\{\Sigma_j\}$ une famille (finie) de sous-ensembles fermés Σ_j de $T^*\Omega$ dont toutes les fibres $(\Sigma_j)_x$ sont des cones convexes fermés saillants de sommet l'origine , ..., telle que $S(f)\subset\bigcup_j\Sigma_j$. Il existe alors une décomposition de f dans Ω de la forme :

$$f = \sum_j f_j \tag{20}$$

où les f_j sont des distributions définies dans Ω et telles que :

$$S(f_j) \subset \Sigma_j \quad , \quad \forall j \tag{21}$$

D'après le théorème 3, chaque f_j est de manière équivalente valeur au bord d'une fonction $\underline{f}_j$ analytique dans un tuboïde de profil $\Lambda = \bigcup_{x \in \Omega} (x, \Lambda_{jx})$.

La démonstration complète de ce théorème sera donnée dans la référence 14. Nous nous bornerons ici (i) dans le paragraphe a), à démontrer le théorème dans la situation géométrique particulière où les Σ_j sont <u>disjoints</u> $((\Sigma'_j)_x \cap (\Sigma'_k)_x = \emptyset, \forall j, k , j \neq k, \quad \forall x \in \Omega)$.

(ii) à donner dans le paragraphe b) les premières étapes de la démonstration du cas général.

La méthode utilisée consiste à "recoller" les décompositions obtenues à l'aide du théorème 1 dans le voisinage de chaque point $x \in \Omega$ Ce recollement se fait dans le cas général à l'aide (i) du théorème de l'edge-of-the-wedge généralisé (théorème 2') et (ii) des propriétés de décomposition résultant de la généralisation du théorème de Grauert au cas des tuboïdes (voir premier exposé).

Dans le paragraphe b), nous considérons d'abord des ensembles Σ_j à "fibres constantes" C_j (c'est-à-dire $\Sigma_j = \Omega \times C_j$) et nous présentons dans ce cas une version légèrement affaiblie ("à ε-près") du théorème. L'idée de la démonstration générale du théorème consiste alors à approximer les Σ_j par des suites $\{\Sigma_j^{(m)}\}$ de sous-ensembles fermées $\Sigma_j^{(m)}$ de $T^*\Omega$ contenant Σ_j et dont les fibres $(\Sigma_j^{(m)})_x$ sont constantes au-dessus d'ensembles formant des recouvrements $\mathcal{U}_m$ de plus en plus fins de Ω. Nous présenterons ici le cas le plus simple d'un recouvrement de Ω déterminé par deux ouverts Ω_1, Ω_2, le cas général étant traité dans [14].

Nous indiquerons pour terminer dans le paragraphe c) une autre méthode possible de démonstration du théorème.

<u>Remarque</u> : La flascitude du faisceau C des microfonctions [2] permet de montrer un théorème un peu plus fin, en termes d'hyperfonctions f_j, dans lequel les Σ_j sont des sous-ensembles fermés à fibres (coniques) $(\Sigma_j)_x$ <u>quelconques</u> (non nécessairement convexes). Le théorème 2 permet d'établir une version légèrement affaiblie de ce résultat dans laquelle l'hypothèse $S(f) \subset \bigcup_j \Sigma_j$ est remplacée par $\mathring{S}(f) \subset$ intérieur de $\bigcup_j \Sigma_j$.

Par ailleurs les résultats présentés ici sont plus précis dans le cas de distributions f, puisqu'ils assurent l'existence de décomposition du type (20) en termes de <u>distributions</u> f_j, et non d'hyperfonctions générales.

a) <u>Cas où les Σ_j sont disjoints</u>

Considérons d'abord un point donné quelconque X de Ω et une famille $\{C'_j\}$ de cones convexes fermés saillants C'_j (de sommet l'origine) à nouveau <u>disjoints</u> ($\dot{C}'_j \cap \dot{C}'_k = \emptyset$, $\forall j, k, j \neq k$) tels que :

$$(\dot{\Sigma}_j)_x \subset \text{intérieur de } \dot{C}'_j \ , \quad \forall j$$

Le théorème 1 assure l'existence d'un voisinage réel ω de X tel que :

$$f = \sum_j f'_j \qquad \text{dans} \quad \omega \tag{22}$$

où les distributions f'_j sont valeurs au bord dans ω de fonctions analytiques $\underline{f}'_j$ suivant les directions des cones Γ'_j duaux des cones C'_j.

Les Σ_j étant fermés, on peut de plus choisir ω suffisamment petit pour que les relations suivantes soient satisfaites :

$$(\Sigma_j)_x \subset C'_j \ , \qquad \forall j \ , \quad \forall x \in \omega \tag{23}$$

Le lemme suivant montre que la décomposition (22) représente dans ω une décomposition du type (20) (21)

<u>Lemme</u> : $S_x(f'_j) \subset (\Sigma_j)_x \ , \quad \forall x \in \omega$ (24)

<u>Preuve</u> : D'après (22) $f'_j = f - \sum_{k \neq j} f'_j$, d'où (à l'aide du lemme 3)

$$S_x(f_j') \subset C_j' \cap \{\bigcup_k (\Sigma_k)_x \bigcup_{k \neq j} C_j'\} \tag{25}$$

le lemme résulte du fait que les cones C_j' sont disjoints (et de (23)).

A l'aide de ce lemme, on vérifie qu'il existe toujours un recouvrement localement fini de Ω par des ouverts ω_p dans chacun desquels

$$f = \sum_j f_j^{(p)}$$

avec $S_x\,(f_j^{(p)}) \subset (\Sigma_j)_x$, $\forall\, x \in \omega_p$. On peut de plus choisir ce recouvrement de façon qu'il existe encore un recouvrement de Ω par des ouverts ω_p' tels que $\omega_p' \subset\subset \omega_p$, $\forall\, p$.

Etant donné deux ouverts $\omega_p . \omega_q$ dont l'intersection ω_{pq} est non vide, soit $f_j^{pq} = f_j^{(p)} - f_j^{(q)}$ dans $\omega^{(pq)}$. On a :

$$\sum_j f_j^{pq} = 0 \tag{26}$$

d'où l'on déduit sans difficulté (les Σ_j étant disjoints) que $\dot{S}_x(f_j^{pq})$ est vide, $\forall\, x \in \omega_{pq}$. En conséquence f_j^{pq} est <u>analytique</u> dans ω_{pq} et il en est de même pour

$$f_{jk}^{pq} = \frac{1}{|J|}\,(f_j^{pq} - f_k^{pq}) \tag{27}$$

où $|J|$ est le nombre d'indices j. En particulier, f_{jk}^{pq} est analytique dans un ouvert complexe $\mathcal{W}_{pq}$ de la forme $\omega_{pq}' \times \{y;(y) < r_{pq},\ r_{pq} > 0\}$.
Le recouvrement de Ω par les ouverts ω_p' étant localement fini, il existe alors des domaines $\mathcal{V}_p = \omega_p' \times \{y, |y| < r_p,\ r_p > 0\}$ tels que pour tout p,q $\mathcal{V}_p \cap \mathcal{V}_q \subset \mathcal{W}_{pq}$. Soit alors $\mathcal{V} = \bigcup_p \mathcal{V}_p$. D'après le théorème de Grauert, il existe un voisinage d'holomorphie $\mathcal{U}$ de Ω contenu dans $\mathcal{V}$. Le théorème B de Cartan appliqué à l'ouvert $\mathcal{U}$ recouvert par les ouverts $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}_p$ implique alors l'existence d'un système de fonctions $f_{jk}^{(p)}$ <u>analytiques dans $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}_p$</u> telles que pour tout j, k,p,q :

$$f_{jk}^{pq} = f_{jk}^{(p)} - f_{jk}^{(q)} \tag{28}$$

(dans $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}_p \cap \mathcal{V}_q$).

Posant alors dans ω'_p

$$g_j^{(p)} = f_j^{(p)} - \sum_{k\neq j} f_{jk}^{(p)} \tag{29}$$

On vérifie les propriétés suivantes :

(i) $S_x(g_j^{(p)}) \subset S_x(f_j^{(p)})$, $\forall\, x \in \omega'_p$ (analyticité réelle des $f_{jk}^{(p)}$ dans ω'_p).

(ii) $g_j^{(p)} = g_j^{(q)}$ dans $\omega'_{pq} = \omega'_p \cap \omega'_q$ (par suite des relations (26) (27)).

L'ensemble des $g_j^{(p)}$ définit donc pour tout j une distribution g_j unique dans Ω telle que $S_x(g_j) \subset (\Sigma_j)_x$, $\forall\, x \in \Omega$.

(iii) $f = \sum_j g_j^{(p)}$ dans ω'_p (antisymétrie des $f_{jk}^{(p)}$) et par suite

$$f = \sum_j g_j \quad \text{dans } \Omega$$

avec $S_x(g_j) \subset (\Sigma_j)_x$, $\forall x \in \Omega$, ce qui donne le résultat recherché.

b) <u>Premières étapes du cas général</u>

<u>Cas où les Σ_j ont des fibres constantes</u> (non nécessairement disjointes).

Soit f une distribution définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n_{(x)}$. Nous montrons ci-dessous :

<u>Lemme 5</u> . Soit $\{C_j\}$ une famille (finie) de cones convexes fermés saillants de sommet l'origine dans $\mathbb{R}^n_{(v)}$ telle que

$$S_x(f) \subset \bigcup_j C_j \quad , \quad \forall\, x \in \Omega.$$

Alors étant donné tout ouvert borné Ω' tel que $\Omega' \subset\subset \Omega$ et toute famille $\{\dot{C}'_j\}$ telles que $\dot{C}'_j \subset$ intérieur de C_j, $\forall$ j, il existe des distributions f'_j définies dans Ω' telles que :

$$f = \sum_j f'_j \qquad \text{dans } \Omega' \tag{30}$$

avec

$$S_x(f'_j) \subset C'_j \ , \quad \forall\, j, \ \forall\, x \in \Omega' \tag{31}$$

Preuve : Le théorème 1 permet à nouveau d'obtenir sans difficulté un recouvrement de Ω' par un nombre fini d'ouverts $\omega^{(p)}$, par exemple sphériques dans chacun desquels :

$$f = \sum_j f_j^{(p)} \tag{32}$$

où $f_j^{(p)}$ est valeur au bord dans $\omega^{(p)}$ d'une fonction analytique dans un tube local de profil $\omega^{(p)} \times \Gamma''_j$ où $\dot{\Gamma}''_j \subset\subset \dot{\Gamma}_j$. Nous choisissons Γ''_j tel que l'on ait de plus $\dot{\Gamma}'_j \subset\subset \dot{\Gamma}''_j$, et le recouvrement de Ω' tel qu'il existe encore un recouvrement par des ouverts $\omega'^{(p)} \subset\subset \omega^{(p)}$ $(\forall\, p)$.

On définit (comme dans le paragraphe a))

$$f_j^{pq} = f_j^{(p)} - f_j^{(q)} \quad \text{dans } \omega^{(pq)} = \omega^{(p)} \cap \omega^{(q)}$$

La relation $\sum_j f_j^{pq} = 0$ qui est encore valable, permet toujours, à l'aide du théorème 2' (edge of the wedge généralisé), d'écrire (dans $\omega'^{(pq)}$) f_j^{pq} sous la forme :

$$f_j^{pq} = \sum_{k \neq j} f_{jk}^{pq} \tag{33}$$

où pour tout j, k, p, q f_{jk}^{pq} est une distribution valeur au bord dans $\omega'^{(pq)}$ d'une fonction $\underline{f}_{jk}^{pq}$ analytique dans un tube local de profil $\omega'^{(pq)} \times \hat{\Gamma}'_{jk}$, où $\hat{\Gamma}'_{jk}$ est l'enveloppe convexe de $\Gamma'_j \cup \Gamma'_k$, et à croissance lente près du bord de $\omega'^{(pq)}$.

Le théorème 3' du premier exposé (qui résulte de la généralisation du théorème de Grauert au cas des tuboïdes) permet enfin d'écrire pour tout j, k, l'ensemble des distributions f_{jk}^{pq} sous la forme :

$$f_{jk}^{pq} = f_{jk}^{p} - f_{jk}^{q} \quad \text{dans } \omega'^{(pq)} \tag{34}$$

où f_{jk}^{p} est une distribution définie dans $\omega'^{(p)}$ et valeur au bord d'une fonction $\underline{f}_{jk}^{p}$ analytique dans un tube local de profil $\omega'^{(p)} \times \hat{\Gamma}'_{jk}$ (et à croissance lente près du bord de $\omega'^{(p)}$), $\forall\, p$.

La décomposition (30) s'obtient alors en définissant, dans chaque ouvert $\omega'^{(p)}$, $f'^{(p)}_j$ par la formule :

$$f'^{(p)}_j = f^{(p)}_j - \sum_{k\neq j} f^p_{jk} \tag{35}$$

et en vérifiant les propriétés analogues des propriétés (i) (ii) (iii) de la fin du paragraphe a) : (i) $S_x(f'^{(p)}_j) \subset C'_j$, $\forall x \in \omega'^{(p)}$, (ii) $f = \sum_j f'^{(p)}_j$ dans $\omega'^{(p)}$ (iii) les distributions $f'^{(p)}_j$ définissent pour tout j une distribution f'_j unique dans $\bigcup_p \omega'^{(p)}$ ($f'^{(p)}_j = f'^{(q)}_j$ dans $\omega'^{(pq)}$).

En vue de l'étude du cas d'un recouvrement de Ω par deux ouverts, nous présentons d'abord le lemme préliminaire suivant :

<u>Lemme d'inclusion</u> : Nous considérons à nouveau ci-dessous par simplicité une distribution f définie sur un ouvert Ω_1 de $\mathbb{R}^n_{(x)}$. Soit Ω_2 un ouvert homéomorphe à une boule contenu dans Ω_1, et soit $\{C^1_j\}$,$\{C^2_j\}$ deux familles (finies) de cones convexes fermés saillants (de sommet l'origine) dans $\mathbb{R}^n_{(x)}$ telles que

$$C^2_j \subset C^1_j \quad , \quad \forall j \tag{36}$$

$$S_x(f) \subset \bigcup_j C^1_j \ , \quad \forall x \in \Omega_1 \tag{37}$$

$$S_x(f) \subset \bigcup_j C^2_j \ , \quad \forall x \in \Omega_2 \tag{38}$$

Nous montrons ci-dessous :

<u>Lemme 6</u> : Etant donné deux ouverts bornés Ω'_1, Ω'_2 tels que $\Omega'_i \subset\subset \Omega_i$, $i = 1,2$ ($\Omega'_2 \subset \Omega'_1$) et deux familles $\{C'^1_j\}$, $\{C'^2_j\}$ de cones convexes fermés saillants (de sommet l'origine) tels que $\dot{C}'^i_j \subset$ intérieur de C^i_j , $\forall j$, $i = 1,2$,il existe des distributions f_j définies sur Ω'_1 telles que :

$$f = \sum_j f_j \qquad \text{dans } \Omega'_1 \tag{39}$$

avec

$$S_x(f_j) \subset C'^1_j \ , \quad \forall x \in \Omega'_1 \tag{40}$$

$$S_x(f_j) \subset C'^2_j \ , \quad \forall x \in \Omega'_2 \tag{40'}$$

__Preuve__ : Nous introduisons ci-dessus des ouverts bornés Ω''_1 , Ω''_2 tels que $\Omega'_i \subset\subset \Omega''_i \subset\subset \Omega_i$, $\Omega''_2 \subset \Omega''_1$, et des familles $\{C''^1_j\}$, $\{C''^2_j\}$ telles que $\dot{C}''^i_j \subset$ intérieur de $\dot{C}'^i_j$, ($\dot{C}^i_j \subset$ intérieur de $\dot{C}''^i_j$), $i = 1,2$, $C''^2_j \subset C''^1_j$, $\forall$ j.
Le lemme 5 permet d'écrire :

$$f = \sum_j f''^1_j \qquad \text{dans } \Omega''_1 \tag{41}$$

$$f = \sum_j f''^2_j \qquad \text{dans } \Omega''_2 \tag{42}$$

où $S_x(f''_j) \subset C''^i_j$, $i = 1,2$, $\forall$ j, $\forall$ $x \in \Omega''_i$.

D'où à l'aide du théorème 2' (edge-of-the-wedge généralisé) une décomposition de la distribution $f''_j = f''^1_j - f''^2_j$ (définie dans Ω''_2) de la forme :

$$f''_j = \sum_{k\neq j} f''_{jk} \qquad \text{dans } \Omega'_2 \tag{43}$$

où f''_{jk} est, pour tout j,k, valeur au bord dans Ω'_2 d'une fonction analytique dans un tube local de profil $\Omega'_2 \times \hat{\Gamma}'^1_{jk}$ (et à croissance lente près du bord de Ω'_2).

Le théorème 4' du premier exposé permet enfin d'écrire

$$f''_{jk} = f_{jk} - \ell_{jk} \tag{44}$$

où ℓ_{jk} est définie et __analytique__ dans Ω'_2 et f_{jk} est une distribution définie dans Ω'_1 valeur au bord d'une fonction analytique dans un tube local de profil $\Omega'_1 \times \hat{\Gamma}'^1_{jk}$ (et à croissance lente près du bord de Ω'_1).

La décomposition (39) s'obtient alors en définissant __dans__ Ω'_1 la distribution :

$$f_j = f''^1_j - \sum_{k\neq j} f_{jk} \tag{45}$$

La condition (40) est vérifiée directement et la condition (40') résulte du fait que $f''^1_j - \sum_{k\neq j} f_{jk} \equiv f''^2_j - \sum_{k\neq j} \ell_{jk}$ dans Ω'_2 .

Lemme de recollement dans le cas de deux ouverts

Soit maintenant deux ouverts Ω_1, Ω_2 de $\mathbb{R}^n_{(x)}$ dont l'intersection $\Omega_1 \cap \Omega_2$ est homéomorphe à une boule , soit f une distribution définie sur $\Omega_1 \cup \Omega_2$, et soit $\{C^1_j\},\{C^2_j\}$ deux familles (finies) de cones convexes fermés saillants de sommet l'origine dans $\mathbb{R}^n_{(x)}$ tels que :

$$S_x(f) \subset \bigcup_j C^1_j \qquad \forall j\ ,\ \forall\, x \in \Omega_1 \tag{46}$$

$$S_x(f) \subset \bigcup_j C^2_j \qquad \forall j\ ,\ \forall\, x \in \Omega_2 \tag{46'}$$

$$S_x(f) \subset \bigcup_j (C^1_j \cap C^2_j)\ ,\quad \forall j, \forall x \in \Omega_1 \cap \Omega_2 \tag{47}$$

Nous montrons ci-dessous :

Lemme 7 : Etant donné deux ouverts bornés Ω'_1, Ω'_2, $\Omega'_i \subset\subset \Omega_i$ $(i = 1,2)$ et deux familles $\{C'^1_j\}$, $\{C'^2_j\}$ telles que $\dot{C}'^i_j \subset$ intérieur de C^i_j, $i = 1,2$, il existe des distributions f_j définies sur $\Omega'_1 \cup \Omega'_2$ telles que

$$f = \sum_j f_j \qquad \text{dans } \Omega'_1 \cup \Omega'_2 \tag{48}$$

avec

$$S_x(f_j) \subset C'^1_j,\ \forall j\ ,\ \forall\, x \in \Omega'_1 \tag{49}$$

$$S_x(f_j) \subset C'^2_j\ , \forall j,\ \forall\, x \in \Omega'_2 \tag{49'}$$

$$S_x(f_j) \subset C'^1_j \cap C'^2_j,\ \forall j\ ,\ \forall x \in \Omega'_1 \cap \Omega'_2 \tag{50}$$

Preuve : Nous introduisons à nouveau des ouverts Ω''_i et des familles C''^i_j, $(\Omega'_i \subset\subset \Omega''_i \subset\subset \Omega_i$, $\dot{C}''^i_j \subset$ intérieur de $\dot{C}'^i_j \subset\subset$ intérieur de $\dot{C}''^i_j$, $i = 1,2)$ et considérons les décompositions de f qui résultent du lemme 6 dans Ω''_1 et Ω''_2 :

$$f = \sum_j f''^1_j \quad \text{dans } \Omega''_1 \tag{51}$$

$$f = \sum_j f''^2_j \quad \text{dans } \Omega''_2 \tag{52}$$

où $S_x(f''^i_j) \subset C''^i_j\ ,\ i = 1,2,\ \forall j\ ,\ \forall\, x \in \Omega''_i$ (53)

$S_x(f''^i_j) \subset C''^1_j \cap C''^2_j\ ,\ i = 1,2,\ \forall j\ ,\ x \in \Omega''_1 \cap \Omega''_2$ (54)

Pour tout j, la distribution $f''_j = f''^1_j - f''^2_j$ définie dans $\Omega''_1 \cap \Omega''_2$ peut s'écrire à l'aide du théorème 2' et de la condition (54)

$$f''_j = \sum_{k \neq j} f''_{jk} \qquad \text{dans } \Omega'_1 \cap \Omega'_2 \tag{55}$$

où f''_{jk} est, pour tout j,k, valeur au bord d'une fonction analytique dans un tube local de profil $(\Omega'_1 \cap \Omega'_2) \times \hat{\Gamma}'_{jk}$ où $\hat{\Gamma}'_{jk}$ est l'enveloppe convexe de $(\Gamma'^1_j \cup \Gamma'^2_j) \cup (\Gamma'^1_k \cup \Gamma'^2_k)$.

Le théorème 3' du premier exposé permet enfin d'écrire

$$f''_{jk} = f''^1_{jk} - f''^2_{jk} \tag{56}$$

où f''^1_{jk} et f''^2_{jk} sont des distributions définies respectivement dans Ω'_1 et Ω'_2 et valeurs au bord de fonctions analytiques dans des tubes locaux de profils $\Omega'_1 \times \hat{\Gamma}'_{jk}$ et $\Omega'_2 \times \hat{\Gamma}'_{jk}$ (et à croissance lente au bord de Ω'_1 et Ω'_2).

La décomposition (48) s'obtient alors en définissant dans Ω'_i (i = 1,2) les distributions :

$$f^i_j = f''^i_j - \sum_{k \neq j} f''^i_{jk} \qquad (i = 1,2)$$

et en vérifiant les propriétés suivantes : (i) $S_x(f^i_j) \subset C'^i_j$, i = 1,2, $\forall j$, $\forall x \in \Omega'_i$, (ii) $f = \sum_j f^i_j$ dans Ω'_i, i = 1,2 (iii) f^1_j et f^2_j définissent une distribution f_j unique dans $\Omega'_1 \cup \Omega'_2$ ($f^1_j = f^2_j$ dans $\Omega'_1 \cap \Omega'_2$) .

La preuve générale du théorème 4 s'obtient par des procédés analogues (voir [14]).

c) <u>Autre méthode possible de démonstration du théorème 4</u>

Considérons une distribution tempérée f définie sur $\mathbb{R}^n_{(x)}$, que nous supposerons par simplicité à décroissance suffisamment rapide à l'infini, et la transformation $\mathcal{H}$ qui à f associe :

$$H_\varepsilon(u,u_o;X) = \int e^{-\varepsilon\tau}\tau^{n-1} d\tau\, F(\tau u, \tau u_o;X) \tag{57}$$

où $v = \tau u, v_o = \tau u_o$, $u^2 + u_o^2 = 1$, et où F est la transformée de Fourier généralisée définie dans l'équation (3).

On vérifie que pour tout $\varepsilon > 0$

$$H_\varepsilon(u,u_o;X) = \text{cste} \int \frac{f(x)}{[u.x - i.u_o(x-X)^2 - i\varepsilon]^n}\, dx \tag{58}$$

et que H_ε est toujours une fonction analytique réelle des variables u, u_o, X.

Etant donné un point X_o de $\mathbb{R}^n_{(x)}$, et $u_o > 0$ suffisamment petit, l'on vérifie à l'aide des propriétés (8) de décroissance exponentielle de F que si $\dot V \not\in S_{X_o}(f)$, alors H_ε a une limite H bien définie quand $\varepsilon \to 0$, et reste de plus analytique par rapport aux variables u, u_o, X aux points de la forme $U = \sqrt{1-U_o^2}\ \dot V$, $U_o > 0$ (suffisamment petit), X_o. La condition $\dot V \not\in \dot S_{X_o}(f)$ peut en fait être caractérisée par ces propriétés.

La transformation $\mathcal{H}$ est voisine d'une transformation introduite par S.K.K. [2] pour la démonstration de la flascitude du faisceau C, propriété permettant d'obtenir le théorème 4 en termes de valeurs au bord hyperfonctions et pour des fermés Σ_j dont les fibres ne sont pas nécessairement convexes (voir remarque à la fin de l'introduction du paragraphe 4).

Une méthode directe pour obtenir le théorème 4 (et son extension au cas de Σ_j à fibres non nécessairement convexes) consisterait à utiliser (contrairement au cas de [2]) une représentation intégrale <u>explicite</u> de la transformation inverse de $\mathcal{H}$: celle-ci utilise une forme différentielle analogue à celle introduite dans le cas de la transformation de Fourier généralisée (voir paragraphe 2 a)) en termes de coefficients H_q $(q = 0,\dots,n)$.

Les propriétés d'analyticité de ces coefficients du type mentionné plus haut par rapport à l'ensemble des variables du fibré cotangent (en sphères) et le théorème B de Cartan, ou son extension par L. Hörmander dans le cas à croissance lente, permettent de décomposer chaque H_q sous la forme $H_q = \sum_j H_{qj}$ où chaque H_{qj} est analytique par rapport à ces variables dans le domaine Σ_j^c associé au fermé Σ_j considéré $((\Sigma_j^c)_x = \complement (\Sigma_j)_x,\ \forall x \in \Omega)$.

Si l'on sait choisir les coefficients H_{qj}, $q = 0,\dots,n$, de manière que (pour tout j fixé) ils satisfassent un certain système différentiel, satisfait par les coefficients H_q, la transformation inverse $\mathscr{H}^{-1}$, agissent sur la forme différentielle dont les coefficients sont les H_{qj}, fournit alors pour tout j une distribution f_j qui (par suite de l'analyticité des H_{qj}) satisfera la condition $S(f_j) \subset \Sigma_j$, d'où la décomposition $f = \sum_j f_j$ recherchée. Cependant ce dernier point (choix des H_{qj} du type ci-dessus) n'est pas encore complètement résolu.

§ 5. PRODUITS, INTEGRALES, RESTRICTIONS [15]

Nous nous restreignons à nouveau pour simplifier au cas de distributions tempérées f définies sur $\mathbb{R}^n$ et montrons brièvement comment l'on obtient un certain nombre de résultats sur le produit, l'intégrale ou la restriction de distributions en termes de la notion de support essentiel.

Produits

Théorème 5 : Une condition suffisante pour que le produit $f_1 \times f_2$ de deux distributions f_1, f_2 soit une distribution bien définie dans un domaine Ω est

$$v_1 + v_2 \neq 0 \qquad (59)$$

pour tout v_i non nul tel que $v_i \in S_x(f_i)$. $i = 1,2$ et tout $x \in \Omega$, et l'on a alors $(\forall x \in \Omega)$:

$$S_x(f_1 f_2) \subset S_x(f_1) + S_x(f_2) \qquad (60)$$

où $S_x(f_1) + S_x(f_2)$ désigne l'ensemble des points de $\mathbb{R}^n_{(v)}$ de la forme $v_1 + v_2$ avec $v_1 \in S_x(f_1)$, $v_2 \in S_x(f_2)$ (v_1, v_2 pouvant ici être nuls).

Preuve : Nous définissons ci-dessous $f_1 f_2$ dans le voisinage d'un point X quelconque donné de Ω. Pour cela, nous considérons des cones fermés Σ_1, Σ_2 de sommet l'origine dans $\mathbb{R}^\lambda_{(v)}$ tels que $\dot{S}_X(f_i) \subset\subset \dot{\Sigma}_i$, $i = 1,2$, et tels que $v_1 + v_2$ soit encore non nul pour tout $v_i \in \Sigma_i$, $i = 1,2$, $v_i \neq 0$.

D'après la définition 1', il existe alors des fonctions C^∞, χ_1, χ_2, localement analytiques et différentes de zéro en X (et à support dans un voisinage suffisamment petit de X) telles que des bornes <u>uniformes du type</u> (11) soient satisfaites en dehors de Σ_1 et Σ_2 par les transformées de Fourier généralisées $F^{(1)}_{\chi_1}$ et $F^{(2)}_{\chi_2}$ au point X de $\chi_1 f_1$ et $\chi_2 f_2$ respectivement.

Ces bornes impliquent en particulier une décroissance rapide uniforme à $v_o = 0$ en dehors de Σ_i pour les transformées de Fourier ordinaires $\widetilde{\chi_i f_i}$ de $\chi_i f_i$ $(i = 1,2)$; par ailleurs $\widetilde{\chi_i f_i}$ croit au plus polynomialement à l'intérieur de Σ_i. Le produit $\chi_1 f_1 \times \chi_2 f_2$ est alors défini de manière standard comme la transformée de Fourier inverse de la distribution tempérée $\int \widetilde{\chi_1 f_1}(v') \widetilde{\chi_2 f_2}(v-v')\,dv'$.

En utilisant les bornes (11) sur $F^{(1)}_{\chi_1}$ et $F^{(2)}_{\chi_2}$ à $v_o > 0$, l'on vérifie alors de plus sans difficultés que la transformée de Fourier généralisée F_{12} au point X de $\chi_1 f_1 \times \chi_2 f_2$ satisfait à son tour des bornes du même type dans toutes les directions de $\mathbb{R}^n_{(v)}$ en dehors de celles de $\Sigma_1 + \Sigma_2$. Pour le voir, l'on peut par exemple écrire :

$$F_{12}(v, v_o; X) = \int dv'\, F^{(1)}_{\chi_1}(v', (1-\eta) v_o; X)\, F^{(2)}_{\chi_2}(v - v', \eta v_o; X) \tag{61}$$

où η est choisi tel que $0 < \eta < 1$. Le résultat annoncé provient du fait que $\Sigma_1 \cap \{v - \Sigma_2\}$ est vide, et que la distance entre Σ_1 et $v - \Sigma_2$ est proportionnelle à $|v|$.

La propriété (60) provient du fait que les supports de χ_1 et χ_2 peuvent être choisis arbitrairement petits.

On vérifie enfin sans difficulté que la définition de $f_1 \times f_2$ au voisinage de X ne dépend pas du choix de χ_1, χ_2.

<u>Remarque</u> : Le théorème 5 peut être démontré alternativement (voir par exemple la référence [6]) à l'aide du théorème 1 du paragraphe 3 a), et de la définition naturelle de produit de deux distributions qui sont valeurs au bord de fonctions analytiques suivant des directions <u>communes</u>. On montre aussi (voir par exemple [6]) que la définition de $f_1 \times f_2$ ainsi obtenue coïncide avec celle donnée plus haut.

Intégrales

Soit $x = x_1,\dots,x_n$ et $x' = x'_1,\dots,x'_n$ deux ensembles de variables indépendantes d'espaces $\mathbb{R}^n_{(x)}$ et $\mathbb{R}^{n'}_{(x')}$ et soit $v = v_1 \dots v_n$ et $v' = v'_1 \dots v'_{n'}$ les variables des espaces duaux $\mathbb{R}^n_{(v)}$ et $\mathbb{R}^{n'}_{(v')}$.

Nous considérons ci-dessous une distribution f définie sur $\mathbb{R}^n_{(x)} \times \mathbb{R}^{n'}_{(x')}$ dont le support par rapport aux variables x' est contenu dans un compact $K \subset \mathbb{R}^{n'}$, quand x appartient à un voisinage donné ω d'un point X.

Soit g la distribution bien définie (sur ω) comme l'intégrale de f par rapport à $\mathbb{R}^{n'}$:

$$g(x) = \int f(x,x')\,dx'$$

l'on a alors :

Théorème 6 : Si $(\dot{V},0) \notin S_{X,X'}(f)$, $\forall X' \in K$, alors $\dot{V} \notin S_X(g)$.

Preuve : Nous nous restreignons ci-dessous à des distributions f à support dans $\omega \times K$ (dans le cas contraire, on remplacera f par χf où χ est une fonction de $\mathcal{D}(\omega)$ analytique et différente de zéro au point X).

Soit F la transformée de Fourier généralisée de f au point X, X' :

$$F(v,v',v_o;X,X') = \int f(x,x')\,e^{-ivx-v'x'-v_o(x-X)^2-v_o(x'-X')^2} \times dx\,dx' \tag{62}$$

D'après l'hypothèse du théorème $(V,0) \notin S_{X,X'}(f)$, $\forall X' \in K$) et le lemme 1 de la partie 2, on vérifie sans difficulté qu'étant donné tout compact $K' \in \mathbb{R}^{n'}_{(x')}$ il existe un cône $\mathcal{V}$ de sommet l'origine dans $\mathbb{R}^n_{(v)}$ contenant $\dot{V}$, $\alpha > 0$, $\gamma_o > 0$ ainsi qu'un polynôme $\mathcal{P}$ tels que :

$$|F(v,0,v_o;X,X')| < \mathcal{P}(|v|)\,e^{-\alpha v_o} \tag{63}$$

dans la région $v \in \mathcal{V}$, $0 \le v_o < \gamma_o |v|$, uniformément par rapport à X', $\forall X' \in K'$

Par ailleurs, les bornes suivantes sont toujours valables dans la région $v_o \geq 0$ par suite des propriétés de support de f :

$$|F(v,0;X,X')| < \mathcal{Q}(|v|,v_o)\, e^{-v_o[d(X',K)]^2} \tag{64}$$

ou $\mathcal{Q}$ est un polynome qui dépend de l'ordre de f et d(X',K) est la distance (euclidienne) de X' à K ($d(X',K) = \operatorname{Inf}_{X''\in K} d(X',X'')$). On vérifie que la transformée de Fourier généralisée G au point X de g peut s'écrire (dans la région $v_o > 0$) :

$$G(v,v_o;X) = L\, v_o^{n'/2} \int dX'\, F(v,0,v_o;X,X') \tag{65}$$

où $L = [\int e^{-X'^2} dX']^{-1}$. Pour démontrer des bornes du type (8) sur G dans la région $v \in \mathcal{V}$, $0 \leq v_o < \gamma_o|v|$, il suffit alors de diviser le domaine d'intégration dans (65) en deux parties :
(i) l'ensemble K_1 des points X' dont la distance à K est au plus $\sqrt{\alpha}$ et
(ii) son complément dans $\mathbb{R}^{n'}_{(x')}$. Les bases (63) et (64) fournissent les bornes recherchées pour chacune de ces contributions respectivement.

<u>Remarque</u> : Le théorème 5 peut être prouvé alternativement à l'aide du théorème 4 du paragraphe 4 (voir par exemple [6]) .

<u>Restrictions à des sous-variétés</u>

Soit $\mathfrak{R}$ une sous-variété analytique réelle plongée dans $\mathbb{R}^n$ et soit $\mathcal{N}$ le faisceau conormal à $\mathfrak{R}$. Une condition suffisante pourqu'une distribution définie sur $\mathfrak{R}$ admette une restriction bien définie (en tant que distribution) à $\mathfrak{R}$ est :

$$\dot{S}(f) \cap \mathcal{N} = \emptyset \tag{66}$$

et l'on a alors :

$$S_X(f|_{\mathfrak{R}}) \subset S_X(f)/\mathcal{N}_X\,, \qquad \forall\, X \in \mathfrak{R} \tag{67}$$

<u>Preuve</u> : Il est à nouveau suffisant de se restreindre au voisinage d'un point X. $\mathfrak{R}$ peut être défini dans ce voisinage par un ensemble d'équations $L_i(x) = 0$ $(i = 1,\dots,\ell)$ où chaque L_i est une fonction analytique réelle de x. Soit $\delta(\mathfrak{R}) = \prod_{i=1,\dots,\ell} \delta(L_i(x))$; $\delta(\mathfrak{R})$ est une

distribution bien définie au voisinage de X dans $\mathbb{R}^n_{(x)}$ et l'on vérifie directement que $S_X(\delta(\mathcal{R})) = \mathcal{N}_X$ (voir [6]).

D'après le théorème 5 et la condition (66), le produit $f \times \delta(\mathcal{R})$ est à son tour une distribution bien définie dans un voisinage de X dans $\mathbb{R}^n_{(x)}$ et $S_X(f \times \delta(\mathcal{R})) \subset S_X(f) + \mathcal{N}_X$.

La définition de $f_{|\mathcal{R}}$ en résulte. Pour vérifier (67), on peut par exemple choisir un ensemble $\{q\}$ de $n-\ell$ coordonnées locales analytiques réelles de $\mathcal{R}$ au point X parmi l'ensemble des n variables $x_1, \ldots, x_n$ et utiliser le fait que la fonction $\Phi(q) = \sum_{i=1,\ldots,n} (x_i(q) - X_i)^2$ possède localement dans $\mathbb{R}^{n-\ell}_{(q)}$ les propriétés requises dans le paragraphe 2 d'une fonction Φ générale admettant X comme point critique.

Remarques

1) Le résultat peut alternativement être démontré à l'aide du théorème 1 du paragraphe 3 en termes de restrictions à des sous-variétés complexes de fonctions analytiques (à croissance lente près des réels).

2) Une adaptation de la dernière partie de la preuve ci-dessus conduit au résultat suivant.

Lemme 8 : Soit f une distribution définie sur $\mathcal{R}$, $f\,\delta(\mathcal{R})$ son produit par $\delta(\mathcal{R})$, qui est une distribution bien définie dans un voisinage de X. Les propriétés suivantes sont alors vérifiées :

(i) $S_X(f \times \delta(\mathcal{R}))$ est invariant par addition de vecteurs de $\mathcal{N}_X$

(ii) $S_X(f) = S_X(f \times \delta(\mathcal{R}))/\mathcal{N}_X$.

BIBLIOGRAPHIE

[0] Tuboïdes et structure analytique des distributions. I- Tuboïdes et généralisation d'un théorème de Grauert; Exposé n° XVI du 19 Mars 1975 par J. Bros - Séminaire Goulaouic-Lions-Schwartz.

[1] a) D. Iagolnitzer et H. P. Stapp, Comm. Math. Phys. 14, 15 (1969).
b) J. Bros et D. Iagolnitzer, Proceedings de la Conférence de Marseille de Juin 1971 sur la théorie de la renormalisation et Ann. Inst. Poincaré, vol. 18, n°2, 147 (1973).
c) J. Bros dans Comptes Rendus de la RCP n°25 de Strasbourg de Novembre 1971.
d) D. Iagolnitzer, Ch. II-C et appendice I dans Introduction to S-matrix Theory, A. D. T. Paris (1973), et dans "Hyperfonctions et Physique Théorique" lecture notes in Mathematics, Springer-Verlag (1975).
e) D. Iagolnitzer, Comm. Math. Phys. 23, 39 (1975)
f) J. Bros et D. Iagolnitzer, Tuboïdes et généralisation d'un théorème de Grauert, Saclay preprint soumis à Ann. Inst. Fourier

[2] M. Sato, T. Kawai, M. Kashiwara, dans "Hyperfunctions and pseudo-differential equations", Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag (1973).

[3] L. Hörmander, Acta Mathematica 127, 79 (1971).

[4] Un exposé de ce type de résultats se trouve par exemple dans le chapitre II-C de la référence 1d).

[5] La transformation de Fourier généralisée a été introduite sous cette forme en 1968 dans le référence 1a). Elle est donnée au sens des formes différentielles dans la référence 1b).

[6] J. Bros et D. Iagolnitzer, en préparation.

[7] Voir référence 1b) et référence 6.

[8] Le lemme 3 et le théorème 1 ci-dessous ont été montrés sous une forme moins élaborée, dans la référence 1a). Ils sont montrés sous des formes plus précises, de même que le théorème de l'edge-of-the-wedge généralisé, dans les références 1b) - 1 e) et 6.

[9] Voir références 1 d) et 6.

[10] Voir référence 1 f)

[11] Voir référence 1b) -1e) et 6.

[12] Voir référecne 1b).

[13] A. Martineau, séminaire Bourbaki (1968)

[14] J. Bros et D. Iagolnitzer, en préparation.

[15] Voir les références 1d) et la référence 6 pour plus de détails.