Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

F. Trèves

Noyaux élémentaires d'équations aux dérivées partielles du premier ordre

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1974-1975), exp. nº 17, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1974-1975____A16_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHEMATIQUES

17, rue Descartes

75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - L I O N S - S C H W A R T Z

1 9 7 4 - 1 9 7 5

NOYAUX ELEMENTAIRES D'EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE

par F. TREVES

Exposé n° XVII 9 Avril 1975

§ 1. INTRODUCTION

Jusqu'ici les démonstrations de résolubilité locale des EDP de type principal qui satisfont à la condition (P) (voir [1], [5]) ont été strictement "existentielles" - par le biais de majorations a priori (microlocales ou locales). Je vais décrire, ici, une représentation intégrale des solutions, pour une classe d'équations (localement résolubles) fort particulières : celles du 1er ordre, non dégénérées (donc de type principal), à coefficients analytiques. En passant, on démontre qu'il existe un voisinage fixe U du point "central" dans lequel l'équation que l'on étudie,

$$Lu = f, \tag{1}$$

a une solution $u \in C^{\infty}(\bar{U})$ pour tout second membre $f \in C^{\infty}(\bar{U})$.

Bien qu'il s'agisse seulement d'un début, la construction que l'on va décrire n'est pas simple. Elle se complique encore davantage dans le cas de coefficients C^{∞} ; à l'heure actuelle, je n'ai pas surmonté toutes les difficultés dans ce cas et je ne peux pas affirmer, en toute certitude, que l'énoncé ci-dessus (concernant l'existence C^{∞}) est encore valable. La construction dans le cas des coefficients analytiques à l'avantage de coller de très près à la structure des équations résolubles du premier ordre, et nous oblige à considérer cette structure d'un point de vue quelque peu différent de celui qui a prévalu jusqu'ici. J'ai nettement l'impression qu'elle recèle des possibilités de généralisation considérables, aux équations d'ordre supérieur (du moins à celles dont la partie principale possède des coefficients analytiques) et peut-être à des systèmes.

§ 2. UNE NOUVELLE INTERPRETATION DE LA RESOLUBILITE LOCALE DES EQUATIONS DU PREMIER ORDRE

Disons tout de suite que le terme d'ordre zero ne compte guère dans cette théorie : supposons dès maintenant que $L\,1 = 0$. Cela revient à supposer que $L = X + iY$, ou X et Y sont des champs de vecteurs réels dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$. Supposons qu'ils soient tous deux analytiques. Alors le fait suivant est vrai : *par tout point* y_o *de* Ω *passe une variété analytique* (lisse) *connexe unique* $\mathfrak{M}_{y_o}$ *qui a la propriété suivante* :

(2) $\forall y \in \mathfrak{M}_{y_o}$, *l'espace tangent à* $\mathfrak{M}_{y_o}$ *est exactement égal à l'espace des valeurs en* y_o *des champs de vecteurs appartenant à l'algèbre de Lie* (sur $\mathbb{R}$) $\mathfrak{g}(X,Y)$ *engendrée par* X *et* Y.

Cette propriété n'est pas vraie (en général) lorsque X et Y sont non-analytiques. Notons que Ω se trouve ainsi muni d'un feuilletage, que nous dirons "défini par L". Les dimensions des feuilles peuvent en général varier de un à N ; aucune feuille ne peut se réduire à un point, puisque $\dim \mathfrak{g}(X,Y) \geq 1$ (à cause de notre hypothèse que L est non-dégénéré : en chaque point, l'un au moins des deux champs X ou Y n'est pas nul).

Soit alors y_o un point quelconque de Ω. On peut choisir des coordonnées $x^1,\dots,x^n,t$ $(n = N-1)$ dans un voisinage ouvert $U \subset \Omega$ de y_o telles qu on ait

(3) $$L = \zeta(x,t)\Big[\frac{\partial}{\partial t} + i \sum_{j=1}^{n} b^j(x,t)\frac{\partial}{\partial x^j}\Big] \quad \text{dans } U ,$$

avec $\zeta \in C^\infty(U;\mathbb{C})$ non-nulle en tout point de U et $\vec{b} = (b^1,\dots,b^n) \in C^\infty(U;\mathbb{R}^n)$ (lorsque les coefficients de L sont analytiques, il doit en être de même de ζ et $\vec{b}$). Nous supposerons de plus que

(4) $$U = \{(x,t)\ ;\ x \in U_o,\ |t| < T\},$$

où U_o est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et T un nombre > 0. Nous dirons alors que $(U,x^1,\dots,x^n,t)$ est une *carte locale* (*dans* Ω) *adaptée à* L. Si les coordonnées s'annulent en y_o, nous dirons qu'elle est centrée en y_o. Nous introduisons alors la propriété suivante :

$(P)_{y_o}$ *Il existe une carte locale* $(U,x^1,\dots,x^n,t)$ *centrée en* y_o *et adaptée à* L, *telle que*

$$\vec{b}(x,t) = |\vec{b}(x,t)|\,\vec{v}(x) \quad \text{dans } U .$$

Cette condition est suffisante pour que L soit localement résoluble en y_o.

Elle est nécessaire lorsque les coefficients de L sont analytiques, et dans bon nombre de cas où ils sont C^∞ (voir [4]). Nous ferons dorénavant l'hypothèse que

$(P)_\Omega$ L <u>satisfait à la propriété</u> $(P)_{y_o}$ <u>en tout point</u> y_o <u>de</u> Ω

Plaçons-nous dans le voisinage U [cf. $(P)_{y_o}$]. En passant, indiquons que, contrairement aux apparences, $(P)_{y_o}$ ne dépend pas de la carte locale $(U, x^1, \ldots x^n, t)$; ceci sera d'ailleurs évident dans un instant. Il est en tout cas clair que $\mathcal{J}(X,Y)$ n'est pas modifiée, dans U, lorsqu'on remplace L par $\zeta^{-1}L$. On peut donc supposer que

(5) $$L = \frac{\partial}{\partial t} + i|\vec{b}(x,t)|\mathcal{V} \qquad \underline{\text{dans}}\ U,$$

où

$$\mathcal{V} = \sum_{j=1}^{n} v^j(x)\frac{\partial}{\partial x^j}$$

Puisque les champs de vecteurs $\frac{\partial}{\partial t}$ et $\mathcal{V}$ commutent, on parvient tout de suite au premier résultat suivant (qui, pour le moment, n'a de sens que lorsque les coefficients sont analytiques) :

(6) <u>Si</u> $(P)_\Omega$ <u>est vérifiée, la dimension des feuilles définies par</u> L <u>est égale à</u> 1 <u>ou à</u> 2.

Bien entendu ceci n'épuise pas le contenu de $(P)_\Omega$ puisque la conclusion dans (6) est toujours vraie lorsque $N = 2$, même si $(P)_\Omega$ ne l'est pas (<u>exemple</u> : $L = \frac{\partial}{\partial t} + it\frac{\partial}{\partial x}$ dans $\mathbb{R}^2$).

Le long d'une feuille unidimensionnelle qui traverse U on doit avoir $\vec{b} \equiv 0$, donc $L = \partial/\partial t$. Soit d'autre part $\mathfrak{M}$ une feuille bidimensionnelle. L'ensemble des zéros de $\vec{b}$ dans U intersecte $\mathfrak{M}$ suivant un ensemble analytique distinct de $\mathfrak{M} \cap U$. Il y a même plus : cet ensemble intersecte toute verticale $x = \text{const.}$ contenue dans $\mathfrak{M}$ sur un ensemble localement fini ; autrement $\vec{b}$ s'annulerait identiquement sur une telle verticale, qui devrait être un arc d'une feuille à une dimension. On verra que la situation est radicalement différente dans le cas où $\vec{b}$ n'est pas analytique. On peut considérer le deux-vecteur $\frac{-1}{2i} L \wedge \bar{L}$ sur $\mathfrak{M} \cap U$ (c'est un élément de $\Lambda^2 T\mathfrak{M}$). Puisque dim $\mathfrak{M} = 2$, il est proportionnel à n'importe quel 2-vecteur "basique", par exemple à $\frac{\partial}{\partial t} \wedge \mathcal{V}$: dans ce cas le facteur de proportionalité est $|\vec{b}(x,t)|$. En tout cas la propriété suivante a un sens :

(7) <u>sur toute feuille</u> $\mathfrak{M}$ <u>à deux dimensions</u>, $-\frac{1}{2i} L \wedge \bar{L}$ <u>ne change pas de signe</u>.

Il faut cependant noter que nous avons utilisé le fait que l'ens. des zéros de $\vec{b}$ est un ensemble analytique propre. La conjonction de (6) et de (7) est équivalente à $(P)_\Omega$. Il est maintenant parfaitement évident que cette propriété ne dépend pas des cartes locales, et n'est pas changée si on multiplie L par une fonction régulière complexe.

Que se passe-t-il dans le cas C^∞ général ?

Il se trouve que l'hypothèse $(P)_\Omega$ nous permet précisément de définir un feuilletage de Ω au moyen de L (alors que cela n'est pas possible sans aucune hypothèse). Une feuille à une dimension $\mathfrak{M}_1$ est une courbe C^∞ connexe dans Ω, à laquelle $\mathcal{J}(X,Y)$ est tangente en tout point, et qui de plus jouit de la propriété suivante :

(8) <u>si</u> $(U, x^1, \ldots, x^n, t)$ <u>est une carte locale quelconque dans</u> Ω, <u>adaptée à</u> L, <u>tout segment</u> $\{x_o\} \times]-T,T[$, <u>qui intersecte</u> $\mathfrak{M}_1$ <u>est contenu dans</u> $\mathfrak{M}_1$.

Cela revient à dire que $\mathfrak{M}_1$ <u>n'a pas de bord dans</u> Ω. Cependant on ne peut pas exclure que $\mathfrak{M}_1$ contienne une infinité de segments $\{x_o\} \times]-T,T[$ $(x_o \in U_o)$: c'est le cas, par exemple, si $\mathfrak{M}_1$ est une orbite presque périodique. Néanmoins l'ensemble F de toutes ces feuilles à une dimension est fermé dans Ω. Une feuille à deux dimensions $\mathfrak{M}_2$ est une surface C^∞ connexe, contenue dans $\Omega \setminus F$, dont l'espace tangent en chaque point y <u>contient</u> $\mathcal{J}(X,Y)|_y$, et qui est maximale pour toutes ces propriétés. Il peut arriver que $\mathfrak{M}_2$ ait un bord dans Ω ; ce bord consiste alors d'une ou de deux feuilles à 1 dimension. Nous employons ici le vocable "bord" comme dans "variété avec bord". La très nette différence avec le cas analytique est que maintenant $\mathcal{J}(X,Y)$ peut fort bien être unidimensionnelle sur un ensemble ouvert non vide d'une feuille à deux dimensions.

On remarquera que le feuilletage de Ω défini par L est "global". Il y a de bonnes raisons de penser que ses propriétés globales déterminent la résolubilité globale de l'équation (1) dans Ω, plus précisément que celle-ci est vraie lorsque les feuilles sortent de tout compact de Ω – comme dans le cas où X et Y sont partout linéairement indépendants, ou bien ne le sont en aucun point de Ω (cf. [2], [3]).

§ 3. REDUCTION A DES SECOND MEMBRES PLATS

A partir de maintenant le raisonnement sera strictement local : nous nous plaçons dans une carte locale $(U, x^1, \ldots, x^n, t)$ adaptée à L, et centrée en un point que nous prenons comme origine de $\mathbb{R}^{n+1}$. Nous supposons ici que $\vec{b}(x,t)$ est une fonction indéfiniment dérivable dans un voisinage de $\overline{U}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. On rappelle que U est un produit, comme dans (4). On introduit l'ensemble :

$$(9) \qquad \mathcal{N}_0 = \{x \in U_0 \,;\, \vec{b}(x,t) = 0, \qquad \forall\, t \in [-T,T]\}.$$

Soulignons le fait que, pour le moment, nous ne faisons pas l'hypothèse que L est localement résoluble (L n'a donc pas nécessairement la forme (5)). Nous introduisons la fonction suivante

$$(10) \qquad \rho(x,t) = \int_{-T}^{t} |\vec{b}(x,s)|\, ds\,, \qquad (x,t) \in U,$$

aussi, pour $|t'| < T$,

$$(11) \qquad \rho^*(x,t,t') = \int_{t'}^{t} |\vec{b}(x,s)|\, ds\,.$$

Noter que $t \mapsto \rho(x,t)$ s'annule identiquement si et seulement si $x \in \mathcal{N}_0$. Nous résolvons alors le problème de Cauchy :

$$(12) \qquad Lz = 0 \ \underline{\text{dans}}\ U, \quad z|_{t=t'} = x \ \underline{\text{dans}}\ U_0\,.$$

Lorsque les coefficients de L (c'est-à-dire $\vec{b}$) sont analytiques, on applique le théorème de Cauchy-Kovalevska (ce qui peut nous forcer à contracter U). Lorsque les coefficients de L sont simplement C^∞, on applique le théorème 1 de [6] et on résoud le problème modulo les fonctions ρ^*-plates :

$$(13) \qquad Lz \underset{0}{\overset{*}{\sim}} 0\,, \qquad z|_{t=t'} = x\,.$$

Une fonction h dans U est ρ^*-plate si $\partial_x^\alpha \partial_t^\ell h/\rho^{*M}$ est continue dans U quels que soient $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, ℓ, $M \in \mathbb{Z}_+$. On voit d'ailleurs sans peine qu'on peut s'arranger de manière à ce que Lz soit ρ^*-plate en tant que fonction de (x,t,t'), dans $U \times]-T,T[$. Nous adaptons alors une idée de L. Nirenberg (elle-même inspirée d'une idée de Mather); nous considérons la fonction

$$(14) \qquad K_o f(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-T}^{t} \int_{\mathbb{R}_n} e^{i\xi . z(x,t,t')} \times$$

$$\times\ g(\xi . \operatorname{Im} z(x,t,t'))\, \hat{f}(\xi,t')\, d\xi\, dt',$$

où $\hat{f}$ est la transformée de Fourier de $f \in C_c^\infty(U)$ et g est une fonction C^∞ sur la droite, $g(\tau) = 1$ si $\tau > -1$, $g(\tau) = 0$ si $\tau < -2$. Il résulte immédiatement des majorations énoncées dans le th. 1 de [6] que

$$(15) \qquad |z - x| \leq \text{const. } \rho^* ,$$

en particulier :

$$(16) \qquad |\operatorname{Im} z| \leq \text{const. } \rho^* .$$

Il résulte aussitôt de ceci, et de (13), que $LK_o f - f$ est ρ-plate dans U. Introduisons les espaces :

$$(17) \qquad \mathcal{E}_{\rho\text{-plat}}(U) = \{f \in C^\infty(U) \; ; \; f \text{ est } \rho\text{-plate dans } U\},$$

$$(18) \qquad \mathcal{D}_{\rho\text{-plat}}(U) = C_c^\infty(U) \cap \mathcal{E}_{\rho\text{-plat}}(U).$$

Ces espaces portent des topologies naturelles : par exemple, $\mathcal{E}_{\rho\text{-plat}}(U)$ porte la topologie localement convexe la moins fine qui rend toutes les applications

$$f \longmapsto \rho^{-M} \partial_x^\alpha \partial_t^\ell f , \quad M, \ell \in \mathbb{Z}_+ , \; \alpha \in \mathbb{Z}_+^n ,$$

de $\mathcal{E}_{\rho\text{-plat}}(U)$ dans $C^0(U)$, continues. On a alors le résultat suivant :

<u>Théorème 1</u> : <u>L'opérateur</u> K_o, <u>défini dans</u> (14), <u>est linéaire continu de</u> $C_c^\infty(U)$ <u>dans</u> $C^\infty(U)$; <u>de plus</u>, $R_o = LK_o - I$ <u>est linéaire continu de</u> $C_c^\infty(U)$ <u>dans</u> $\mathcal{E}_{\rho\text{-plat}}(U)$.

Il ne faudrait pas croire que l'arrivée dans $\mathcal{E}_{\rho\text{-plat}}(U)$ pourrait être améliorée lorsque les coefficients sont analytiques : le ρ-platitude s'introduit non seulement par le biais de (13), mais aussi par le biais de la fonction troncature g, dans (14). De toute façon, nous n'avons fait aucune hypothèse de résolubilité sur L. A ce stade, ce que nous savons c'est qu'il nous suffira d'étudier l'équation (1) lorsque le second membre f est ρ-plat. On supposera désormais que $f \in \mathcal{D}_{\rho\text{-plat}}(U)$.

Autre remarque : ca n'a pas grand sens de faire opérer K_o sur des distributions (à support compact dans U) arbitraires : K_o n'est pas un opérateur de Fourier intégral à phase complexe. Par conséquent les noyaux élémentaires que nous allons construire opèrent seulement sur les fonctions C^∞, et non sur des distributions en général. Il n'est pas à exclure que l'on puisse se passer tout-à-fait de K_o lorsqu'on résoud (1) pour des seconds membres distributions. Je me suis seulement occupé de la résolubilité dans C^∞.

§ 4. NOYAU OPERANT SUR LES FONCTIONS PLATES

Dorénavant nous supposons que les coefficients de L sont analytiques et que L est résoluble à l'origine. En fait nous supposons que L a la forme (5) et que $\vec{b}$ est analytique (dans un voisinage de $\overline{U}$). Le champ vectoriel $\vec{v}$ de $(P)_{y_o}$ est alors analytique dans $U_o \setminus \mathcal{N}_o$ [voir (9)]. On introduit la fonction dans U_o :

$$(19) \qquad r(x) = \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |\vec{b}(x,s)|^2 ds \right)^{1/2} .$$

Noter que l'on a :

$$(20) \qquad \rho(x,t) \leq \sqrt{\frac{T+t}{2T}}\, r(x) \leq r(x) .$$

En particulier toute fonction ρ-plate dans U est r-plate. On démontre le résultat suivant :

<u>Théorème 2</u> . <u>Sous les hypothèses ci-dessus, et si U est assez petit, il existe un opérateur linéaire continu</u> $K_1 : \mathcal{D}_{r\text{-plat}}(U) \to \mathcal{E}_{r\text{-plat}}(U)$ <u>tel que</u> $LK_1 = I$.

Ceci démontre bien le résultat final que nous avions en vue, c'est-à-dire :

<u>Théorème 3</u> : <u>Sous les mêmes hypothèses que le théorème</u> 2, <u>il existe un opérateur linéaire continu</u> $E : C_c^\infty(U) \to C^\infty(U)$, <u>tel que</u> $LE = I$.

En effet, soit U assez petit pour que l'on puisse appliquer les théorèmes 1 et 2 ; et soit $\zeta \in C_c^\infty(U)$ égale à 1 dans un sous-voisinage ouvert quelconque U' de l'origine. On forme

(21) $$E = K_o - K_1 \zeta R_o ,$$

d'où $LE = (1-\zeta)R_o = 0$ dans U' (qui est ainsi substitué à U dans Th.3). On notera que le théorème 2 précise le théorème 3, puisqu'il montre que l'on trouve une solution r-plate lorsque le second membre est r-plat. D'ailleurs la construction de K_1, et donc celle de E, est complètement explicite. Nous allons maintenant indiquer, dans les grandes lignes, comment elle s'effectue.

Elle va se faire "feuille par feuille" : les feuilles dont il s'agit ici sont des cylindres

(22) $$\Sigma = \Gamma \times]-T,T[.$$

où Γ est une courbe intégrale, dans $U_o \setminus \mathcal{N}_o$, du champ $\mathcal{V} = \sum_{j=1}^{n} v^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j}$.

On se donne arbitrairement $f \in \mathcal{D}_{r\text{-plat}}(U)$ et on va former une double intégrale

(23) $$K_1 f(x,t) = \int_{\Gamma_x} \int_{-T}^{T} k(x,t,x',t') f(x',t') d\chi' \, dt'$$

où Γ_x est la courbe intégrale qui passe par x et $d\chi'$ est une mesure ad-hoc sur Γ_x (k est un noyau qui va se calculer).

La mesure $d\chi'$ est choisie de telle sorte que la longueur, au sens de $d\chi'$, des orbites Γ devienne infinie lorsqu'on s'approche de l'ensemble critique $\mathcal{N}_o$. La paramétrisation associée nous permettra de considérer f comme une fonction dans le plan $\mathbb{R}^2$, dont le support est bien entendu contenu dans une bande $|t| < T$, mais qui, de plus, se comporte bien à l'infini. Ceci signifie que si, vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, l'orbite "tend vers $\mathcal{N}_o$", f sera à décroissance rapide : ceci est la traduction du fait que f est r-plate. Si d'autre part, vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, l'orbite tend vers la frontière de U_o, comme f est à support compact, transféré sur la droite le support restera (de ce côté-là) à distance finie. Hélas il se peut fort bien qu'il y ait des orbites qui restent (entièrement ou à moitié) dans des compacts de $U_o \setminus \mathcal{N}_o$ – par exemple des orbites périodiques : dans ce dernier cas le transfert de f sur la droite donnera lieu à une fonction périodique. Cette diversité de comportement m'a paru longtemps créer une difficulté insurmontable, jusqu'à ce que je me sois aperçu qu'il ne fallait pas jouer le jeu. qu'il fallait traiter tous les cas de la même façon, sans les distinguer. Voici comment on fait. Introduisons d'abord le paramètre χ sur Γ_x :

$$r(x)\,\mathscr{V}\chi = 1 \;, \quad \chi|_x = 0 \;. \tag{24}$$

Notons $\chi(x',x)$ la solution de (24). Elle définit un intervalle ouvert $]a,b[$ de $\mathbf{R}^1$ comme recouvrement de Γ_x. Une remarque importante : si un des points limites a ou b, disons a, est fini, lorsque $\chi \to a$, nécessairement x' doit tendre vers la frontière de U_o. Lorsque x' tend vers $\mathcal{N}_o$, $|\chi|$ doit tendre vers l'infini. Bien entendu, $|\chi|$ peut tendre vers l'infini même lorsque x' reste dans un compact de $U_o \setminus \mathcal{N}_o$, lorsque, par exemple, Γ_x est périodique.

On résoud alors le problème de Cauchy suivant :

$$Lz = 0 \;, \quad z|_{t=0} = \chi \;. \tag{25}$$

Pour ceci on applique le théorème de Cauchy-Kovalevska : nous sommes en train de raisonner sur le cylindre Σ. On trouve une solution $z = z(\chi,t)$ analytique <u>sur tout</u> Σ (donc sans diminuer l'intervalle des temps lorsque $|\chi| \to +\infty$). On a alors le résultat suivant très important, qui est essentiellement équivalent à la résolubilité locale :

<u>Proposition 1</u> : <u>Sous les hypothèses du théorème 2 et si le nombre $T > 0$ est assez petit</u> (indépendamment de la feuille Σ), <u>l'application</u> (qui est analytique)

$$(x',t) \mapsto z(x',t) \tag{26}$$

<u>est un homéomorphisme de</u> Σ_x <u>sur un ouvert</u> $\mathcal{O}_x$ <u>de</u> $\mathbb{C}$. <u>Son jacobien est égal à</u>

$$-\frac{|\vec{b}(x.t)|}{r(x)}(1+O(t)).$$

<u>Exemple 1</u> : Soit $L = \frac{\partial}{\partial t} + it^k \frac{\partial}{\partial x}$ dans $\mathbb{R}^2$. Il y a une feuille unique, et $r(x)^2 = \frac{T^k}{k+1}$ ne joue aucun rôle. On peut prendre $\chi = x' - x$, et $z = x' - x - i\frac{t^{k+1}}{k+1}$. Prenons par exemple $x = 0$. Alors $(x',t) \mapsto x' + i\frac{t^{k+1}}{k+1}$ est un homéomorphisme si et seulement si k est <u>pair</u>, en d'autre mots, si et seulement si L est résoluble.

<u>Exemple 2</u> : Soit $L = \frac{\partial}{\partial t} + ix\frac{\partial}{\partial x}$ dans $\mathbb{R}^2$. Il y a trois feuilles : Σ_+, le demi-plan $x > 0$; Σ_-, le demi-plan $x < 0$; Σ_0, l'axe $x = 0$. Ici $r(x) = |x|$. Dans Σ_+, donc lorsque x et x' sont > 0, $\chi = \log \frac{x'}{x}$. D'autre part, la solution de (25) est donnée par $z = \log\frac{x'}{x} - it$.

L'intérêt de l'application (26) réside en ce qu'elle transforme L en un multiple de $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$. En effet :

$$\begin{aligned} L &= (L\bar{z})\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = 2i\frac{|\vec{b}(x,t)|}{r(x)}\frac{\partial \bar{z}}{\partial \chi}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \\ &= 2i\frac{|\vec{b}(x.t)|}{r(x)}(1+O(t))\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \end{aligned} \tag{27}$$

d'où l'idée de résoudre l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \left\{\frac{1}{2i}\left(\frac{|\vec{b}(x,t)|}{r(x)}\frac{\partial \bar{z}}{\partial \chi}\right)^{-1} f\right\}^{\natural} = F(z,\bar{z}) \tag{28}$$

(le beccar $\natural$ indique qu'on a fait le transfert via au moyen de l'application (26) ; le lecteur ne doit pas s'inquiéter de la présence de $|\vec{b}(x,t)|$ au dénominateur : d'une part, on peut supposer f divisible par $|\vec{b}|$, d'autre part le facteur $r(x)/|\vec{b}(x,t)|$ va disparaître dans la formule finale). Pour résoudre (28) la première pensée qui vient est d'employer la solution élémentaire habituelle $\frac{1}{\pi z}$ de $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$. C'est ici qu'on se heurte à la difficulté provenant du comportement divers des orbites. Mais on remarque que l'ouvert $\mathcal{O}_x$ de la proposition 1 est contenu dans une bande horizontale $|\mathrm{Im}\, z| \leq C\left|\int_0^t \frac{|\vec{b}(x,s)|}{r(x)}ds\right| \leq C\sqrt{t/2T}$.

On utilise alors une autre solution élémentaire de $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, nommément $\mathcal{E} = e^{-z^2}/\pi z$. On remarque en effet que $w \mapsto \mathcal{E} * w$ transforme les fonctions w qui ont leur support dans une bande $|\mathrm{Im}\, z| \le M < +\infty$ et qui sont à décroissance rapide à l'infini (resp. bornée, resp. périodiques en Ré z , resp. presque périodiques en Ré z , etc...) en fonctions du même type. On écrit donc

$$(29) \qquad u(z,\bar{z}) = \frac{1}{2\pi i}\iint \frac{e^{-(z-z')^2}}{z'-z} F(z',\overline{z'})\,dz' \wedge d\overline{z'}$$

et on repasse ensuite aux variables (x,t), (x',t'). Il faut démontrer qu'on peut effectivement le faire : tout d'abord que u définit bien une fonction $\tilde{u}$ sur Σ_x et que l'intégrale converge (incidemment $dz' \wedge d\bar{z}' = \frac{|b(x',t')|}{r(x')}(1 + O(t'))dx'\, dt'$, d'après la conclusion de la proposition 1, ce qui fait disparaître le dénominateur gênant dans F) ; ensuite que $\tilde{u}$ est une fonction C^∞ de (x,t) dans $(U_0 \setminus \mathcal{N}_0) \times]-T,T[$; enfin que $\tilde{u}$ est r-plate. Moyennant des calculs assez longs (et grâce aux propriétés de z(x,t) et de e^{-z^2}), on y parvient.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Beals and C. Fefferman : On local solvability of linear partial differential equations, Annals of Math. 97 (1973), 482-498.

[2] J. J. Duistermaat and L. Hörmander : Fourier integral operators, II, Acta Math. 128 (1972), 183-269.

[3] L. Hörmander : Fourier integral operators, I, Acta Math. 127, (1971), 79-183.

[4] L. Nirenberg and F. Treves : Solvability of a first-order linear partial differential equation, Comm. Pure Appl. Math. 16 (1963), 331-351.

[5] L. Nirenberg and F. Treves : On local solvability of linear partial differential equations, II : sufficient conditions. Comm. Pure Appl. Math. 23 (1970), 459-509.

[6] F. Treves : Solution of Cauchy problems modulo flat functions, Ecole Polytechnique, Séminaire Goulaouic-Lions-Schwartz 1974-75, Exposé XI, 5 Février 1975.
