SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

C. S. MORAWETZ

Nouveaux problèmes sur les équations mixtes

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1974-1975), exp. nº 15, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1974-1975____A14_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHEMATIQUES

17, rue Descartes

75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - L I O N S - S C H W A R T Z

1 9 7 4 - 1 9 7 5

NOUVEAUX PROBLEMES SUR LES ÉQUATIONS MIXTES

par C. S. MORAWETZ

Exposé n° XV

12 Mars 197[illegible]

§ 1. INTRODUCTION

On considère des équations mixtes de type de Tricomi avec deux variables indépendantes, dont le modèle est donné par :

$$y U_{xx} + U_{yy} = 0$$

mais le véritable intérêt de notre étude sera dans les équations non-linéaires. La propriété la plus importante est la manière dont les caractéristiques approchent la courbe où l'équation devient parabolique (c'est-à-dire dans notre cas, les caractéristiques ne sont pas tangentes à la courbe parabolique).

Ces équations interviennent dans l'étude de l'écoulement compressible et nous commençerons par la formulation d'un problème, très important, dans la théorie du vol. Plus tard, nous indiquerons les relations entre les questions de l'existence, de l'unicité et de la dépendance par rapport aux données pour ce problème et des problèmes correspondants pour l'équation de Tricomi.

§ 2. L'ECOULEMENT AUTOUR D'UN PROFIL

L'écoulement compressible et irrotationnel peut être décrit par un potentiel Φ qui satisfait

$$(\rho\,\Phi_x)_x + (\rho\,\Phi_y)_y = 0 \tag{1}$$

où la fonction $\rho = \rho(|\nabla\Phi|)$ est donnée par la loi de Bernoulli

$$q\,dq + \frac{c^2}{\rho}\,d\rho = 0 \quad , \qquad q = |\nabla\Phi|$$

et la vitesse du son c est une fonction donnée de la densité ρ. Il est facile de voir que l'équation (1) est hyperbolique si $q > c$ et elliptique si $q < c$. Désignons la vitesse quand $q = c$ par c_* .

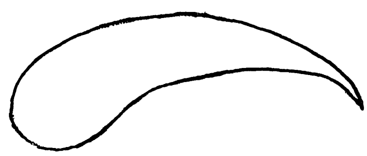
Nous cherchons une solution de (1) dans un domaine Ω, extérieur à un profil, $\partial\Omega$, où la vitesse est tangentielle :

(2) $$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \qquad (x,y) \in \partial\Omega .$$

De plus, à l'infini, le vecteur vitesse est prescrit

(3) $$\nabla \Phi \rightarrow \vec{U} \quad , \; x^2 + y^2 \rightarrow \infty \; .$$

Dans le problème correspondant pour les écoulements incompressibles, il faut donner une autre condition pour avoir l'unicité de la solution. Ordinairement, et nous considérerons ce cas, le profil a un point de rebroussement au point T (cf. figure)



T

et nous demandons que la vitesse au point T soit finie (condition de Kutte-Jukowski) . Cette condition est suffisante pour l'unicité et apparaît raisonnable physiquement. Dans le cas du fluide compressible, il y a un problème parce que la densité ρ devient zéro quand q est plus grand que $\hat{q}$, une certaine vitesse, déterminée par la constante d'integration dans la loi de Bernoulli (2). Ainsi, cela n'a pas de sens de parler de vitesses infinies. Il apparaît qu'il suffit pour l'unicité de demander que la vitesse au point T soit inférieure à $\hat{q}$. Actuellement, le problème le plus intéressant est le problème transonique, et dans ce cas, il est raisonnable de demander que la vitesse au point T soit inférieure à la vitesse du son. En même temps, on cherche un intervalle pour $|U|$ où cette condition est possible.

Avant de décrire le problème transonique, nous présentons un théorème établi d'abord dans un cas particulier (choix de ρ particulier) par Bers [1] en 1949. On renvoie le lecteur, pour le cas général, à son livre [2]). Une nouvelle méthode de démonstration est proposée dans le cas d'un profil symétrique par Brézis et Stampacchia [3] qui utilise les méthodes variationnelles.

Théorème 1 : On suppose que $\partial\Omega\backslash T$ est C^∞ et $\rho(q)\in C^\infty$, $0\leq q\leq c_*$. Alors $\exists\,\tilde{q}<c_*$ tel que, si $0\leq|\vec{U}|<\tilde{q}$, $\exists\,\Phi$ unique qui satisfait (1), (3), (4) avec $\lim\limits_{x^2+y^2\to\infty}\Phi_y/\Phi_x=\theta$. La solution $\Phi\in C^\infty$ si $(x,y)\in\Omega$. La vitesse $\tilde{q}$ dépend du profil $\partial\Omega$ et de l'angle θ. Pour $|\vec{U}|=\tilde{q}$, $|\nabla\Phi|=q=c^*$ en un point de $\partial\Omega$.

On se pose maintenant la question suivante : que peut-on dire quand $|\vec{U}|>\tilde{q}$? Les expériences réalisées dans les "wind tunnels" indiquent que la solution devient faible. C'est-à-dire, qu'en général des chocs apparaissent.

Mathématiquement, on souhaite que ces chocs soient bien définis et n'apparaissent que sur des courbes lisses à travers lesquelles les quantités $\nabla\Phi,\rho$ sont discontinues, mais ψ,Φ restent continues, (si on introduit ψ par $\psi_y=\rho\,\Phi_x$, $\psi_x=-\rho\,\Phi_y$). Nous imposerons cette dernière condition pour l'existence d'une solution faible de (1). Cette condition correspond à la conservation de la masse et du moment au deuxième ordre dans le changement de vitesse.

Quand on admet les chocs, il faut ajouter une condition correspondant à la deuxième loi de la thermodynamique, c'est-à-dire, que l'entropie d'une particule augmente en traversant la ligne de choc. On trouve dans ce cas, la condition

$$(5)\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial n}[\rho]<0$$

où $[\rho]$ désigne le saut de ρ, quand on traverse la ligne de choc.

Deux théorèmes sont suggérés par les expériences réalisées et le calcul numérique, mais aucune démonstration n'existe pour l'instant.

a) le premier concerne :

l'écoulement transonique : l'existence et l'unicité d'une solution faible de (1), (3), (4), (5) avec une vitesse inférieure c^* en T si $|U|<c^*$.

b) le second concerne :

l'écoulement supersonique : Mêmes propriétés avec une vitesse inférieure à $\hat{q}$ (la vitesse de densité zéro) en T et $|\vec{U}|$ inférieur à $\hat{q}$ également.

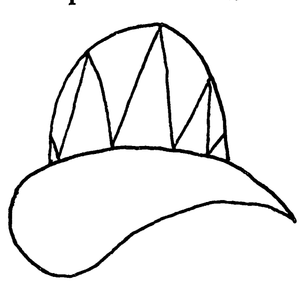
Nous ne considérons pas le cas (b). Dans le cas (a), en plus de la question posée de l'existence, on peut aussi déterminer l'allure des profils critiques [4], [5]. Ce sont les profils autour desquels l'écoulement se fait sans choc pour un vecteur vitesse $\vec{U}$ spécifique, màis par contre pour lequel il y a une région supersonique près du profil et dans laquelle la solution est C^∞. Enfin, signalons certaines méthodes pour calculer l'écoulement [6], [7].

Nous retournerons au paragraphe 4 sur la dernière question et nous éviterons de discuter le problème de la recherche des profils critiques parce qu'il comporte des difficultés particulières. Nous supposerons donc maintenant que nous nous sommes donnés un profil et un écoulement correspondant sans choc (sans nous demander comment on peut le trouver).

La question la plus simple qu'on peut alors se poser est la suivante : le problème d'une perturbation d'un écoulement sans choc est-il bien posé ? La réponse dépend de l'espace dans lequel on cherche la solution du problème de perturbation.

Formulons tout d'abord le problème : soit $\delta\Phi$ la variation en Φ. On trouve que $\delta\Phi$ satisfait une équation linéaire ; les coefficients dépendent de la solution non perturbée. L'équation passe du type elliptique au type hyperbolique (où l'écoulement non perturbé devient supersonique).

On donne un exemple où les caractéristiques sont dessinées



Les conditions au bord deviennent :

$$\frac{\partial}{\partial n}\,\delta\Phi \quad \text{prescrite sur } \partial\Omega$$

$$\nabla\,\delta\Phi \quad \text{prescrit à } l'\infty$$

si on varie le profil $\partial\Omega$ ou la vitesse à $l'\infty$. Un argument, très simple.

où l'on compte les conditions données sur le bord comme si l'équation était $\delta\Phi_{xx} + \delta\Phi_{yy} = 0$ dans la région sous sonique et $-\delta\Phi_{xx} + \delta\Phi_{yy} = 0$ dans la région supersonique, montre que le problème est sur-déterminé. On peut rendre cet argument rigoureux [8] si on ajoute l'hypothèse que $\nabla\delta\Phi$ est continue. Si on ne demande aucune continuité sur $\nabla\Phi$, le problème est sous-déterminé. La vraie difficulté se trouve dans le choix d'un espace pour la perturbation du potentiel $\delta\Phi$. En effet, on s'attend à ce que l'existence d'un choc apparaisse sous la forme d'une singularité dans la variation qui se produit à l'intersection de la ligne parabolique et du profil, la où la vitesse d'une particule passe du supersonique au sous sonique. En raison de la condition (5) sur l'entropie, on ne peut pas avoir ce type de choc à l'autre intersection. Actuellement, on ne sait pas introduire correctement cette singularité. Aussi nous allons étudier maintenant des problèmes modèles.

§ 3. ETUDE DE MODELES

On considère l'équation de Tricomi

(6) $$yU_{xx} + U_{yy} = 0$$

dans une région finie Ω que traverse l'axe $y = 0$. Au lieu de considérer le problème de Neumann comme dans le paragraphe 2, on considère maintenant le problème non homogène avec conditions de Dirichlet homogènes. On suppose que le bord $\partial\Omega \cap \{y < 0\}$ satisfait la condition de Frankel $ydy^2 + dx^2 > 0$.

Cela veut dire simplement que le bord n'est jamais tangent à une caractéristique et qu'il coupe l'axe $y = 0$, avec un angle inférieur à $\pi/2$.

La différence entre les deux problèmes de perturbation décrits au paragraphe 2 peut se voir dans les deux théorèmes suivants.

On est obligé [10] de travailler avec un système équivalent à l'équation de Tricomi,

(7) $$LU = F$$

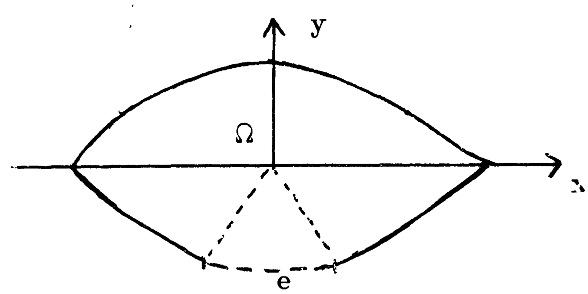
où $U = (u_1, u_2)$, $F = (f_1, 0)$, $L = \begin{pmatrix} y\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{-\partial}{\partial x} \end{pmatrix}$.

Pour simplifier, nous considèrerons seulement que le support du vecteur F est en $y > 0$ et que $\int |F|^2 dxdy < \infty$.

La condition Dirichlet devient

(8) $$u_1 dx + u_2 dy = 0$$

et nous allons l'imposer sur une partie du bord dans le premier théorème et sur tout le bord dans le deuxième. (Dans le premier théorème, si on imposait (8) sur tout le bord, le problème serait trop déterminé). Plus exactement, on choisit un bord $\partial\Omega$ exact mais il suffit ici de faire une figure approximative. On coupe le bord $\partial\Omega$ par les deux caractéristiques issues de l'origine. On désigne par $\mathcal{C}$ le segment de $\partial\Omega$ entre ces deux caractéristiques.



<u>Théorème 2.a</u> : Il existe U unique satisfaisant (7) en Ω, (8) sur $\partial\Omega/C$, et telle que

. $U \in L^2_{loc}$

. $(PU, PU) < \infty$

où (,) est le produit scalaire sur Ω et P est la matrice positive $\begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix}$ avec $p_1 = |y| + \varepsilon|x|$ $\quad p_2 = 1 \quad y > 0$.

<u>Théorème 2.b</u> : Même théorème que précédemment, mais U satisfait (8) sur $\partial\Omega$ et de plus, si $(x_1,0)$ et $(x_2,0)$ sont les deux points paraboliques.

$$p_1 = y_2 \qquad\qquad p_2 = |x - x_2| + \varepsilon S(x - x_1)((x-x_1)^2 + \frac{4}{q}y^3)^{-1}$$

si $y > 0$ et

$$p_1 = |y|^3 + \varepsilon S(x - x_1)(x - x_1)^{-2}|y| ,$$

$$p_2 = |x - x_2| + \varepsilon S(x - x_1)(x - x_1)^{-2}$$

si $y < 0$.
Ici la fonction $S(\xi)$ a son support près de zéro et ϵ est suffisamment petit.

On voit facilement la nature des singularités permises en un point parabolique dans le deuxième cas. Mais il faut remarquer que cette solution est un peu trop faible pour fournir une bonne analogie avec le problème d'écoulement. Dans le cas modèle, il y a une compensation à l'autre point parabolique où la norme force la solution à devenir petite. Dans les deux cas, la démonstration de l'existence, se fait à l'aide du théorème de projection de Riesz. On trouve une matrice $B(x,y)$ satisfaisant

$$(9) \qquad (BV,LV) \leq -k(BV,BV) \qquad , k > 0$$

pour $V \in C^\infty$ et $v_1 dx + v_2 dy = 0$ sur $\partial\Omega/\mathcal{C}$ ($\partial\Omega$ respectivement).

Il est assez facile de trouver de telles matrices si L est un opérateur hyperbolique. Mais dans le cas elliptique, si le bord n'est pas choisi avec soin, il est possible que B n'existe pas. Mais c'est la méthode qui n'est pas bonne. Pour cette raison, on prend un bord spécial. En effet pour $y \geq 0$, $B = \begin{pmatrix} yc & b \\ b & -c \end{pmatrix}$ où $\sqrt{yc} - ib = G(x + i\frac{2}{3}y^{3/2})$ où G est holomorphe, $\mathrm{Re}\, G \geq 0$ et $\mathrm{Re}\, G d(x - i\frac{2}{3}y^{3/2}) \leq 0$ sur le bord. Dans le théorème 2.a $G \quad x + i\frac{2}{3}y^{3/2}$ si $\varepsilon = 0$.

§ 4. ITERATION

C'est bien connu qu'on peut considérer au lieu d'une itération pour calculer la solution d'un problème elliptique, un problème avec une nouvelle variable qui s'appelle le "temps artificiel". L'exemple le plus simple est de remplacer une itération pour Δ par l'étude de l'opérateur parabolique $\frac{\partial}{\partial t} - \Delta$. La méthode peut être rendue rigoureuse dans ce cas (Garebedian [ ]). L'étape suivante est de calculer des solutions pour l'opérateur $\frac{\partial}{\partial t}(\alpha + \beta\frac{\partial}{\partial x} + \gamma\frac{\partial}{\partial y}) - \Delta$. Par exemple, la méthode de SOR peut s'exprimer de cette façon. Dans le cas du calcul des écoulements transoniques (qui a commencé avec le travail de Murman et Cole [6] sur l'équation de Karman et a été poursuivi avec le travail de Jameson [7] même en trois dimensions), on remplace le problème de calcul pour les équations (1), (2), (3), (4), (5) du paragraphe 2 par le problème suivant :
Trouver un opérateur linéaire ou non linéaire, Q, indépendant de t, avec deux propriétés :

(i) le problème de résoudre $Qw_t = (\rho w_x)_x + (\rho w_y)_y$ (où w satisfait la même condition au bord que Φ et/ou w est donné initialement) est bien posé

(ii) les solutions du problème (i) approchent une solution indépendante de t lorsque $t \to \infty$.

Il faut dire que dans les problèmes non linéaires, admettant des chocs, on doit ajouter des termes dans le second membre représentant la viscosité artificielle (en effet, on peut avoir des chocs calculés qui sont très concentrés si ce procédé est bien fait).

Dans le calcul des écoulements, Jameson a trouvé des opérateurs Q qui satisfont (i) mais il est difficile de démontrer (ii). Nous donnons ici une méthode, bien simple, qui indique comment on peut trouver un opérateur Q satisfaisant la deuxième condition dans plusieurs cas; et dans ces cas, l'itération converge nécessairement.

On considère les opérateurs non linéaires $\mathcal{L}$, $\mathcal{N}$, et on cherche une solution de

$$\mathcal{L}\Phi - f = 0 \qquad \text{dans } \Omega ,$$

satisfaisant

$$\mathcal{N}\Phi = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

Soit w une solution de

$$\begin{aligned} Qw_t &= \mathcal{L}w - f \quad \text{dans } \Omega \\ \mathcal{N}w &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Soit $v = w_t$. Alors

$$Qv_t = Lv \quad \text{dans } \Omega, \; Nv = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

où L, N sont les dérivées des opérateurs $\mathcal{L}$, $\mathcal{N}$ et sont aussi linéaires. Introduisant le produit scalaire pour Ω, on a

$$\frac{\partial}{\partial t}(Qv,Qv) = 2(Lv,Qv)$$

Supposons que : $\forall v$ tel que $Nv = 0$, $(x,y) \in \partial\Omega$,

(10) $$(Lv,Qv) \leq -k(Qv,Qv), \quad k > 0$$

On en déduit

$$(Qv,Qv)\big|_t \leq e^{-2kt}(Qv,Qv)\big|_{t=0}$$

et donc $Qv \to 0$. Ainsi $Qw_t = \mathcal{L}w - f \to 0$ si $t \to \infty$.

Le problème est réduit à trouver Q qui satisfait (10). Mais si on ramène l équation du second ordre à un système du 1er ordre, on voit que la condition (10) est exactement la condition (9) du paragraphe 3. On peut donc utiliser les matrices B (construites pour satisfaire (9)) pour calculer les solutions par itération. La seule difficulté théorique reste dans les questions posées par (i). Observons seulement que l'équation pour le système avec le temps artificiel est toujours hyperbolique et que les surfaces t = constante sont toujours caractéristiques.

Pour conclure, on peut remarquer que la recherche d'une bonne méthode d'itération pose de nouvelles questions pour les équations hyperboliques et même de type plus général en dimensions supérieures. Et par ailleurs, les résultats théoriques d'existence ont suggéré de nouvelles méthodes d'itération.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bers,Lipman : Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, Vol. I, pp.41-46 (1949).

[2] Bers,Lipman : Mathematical aspects of subsonic and transonic gas dynamics, John Wiley and sons, 1958.

[3] Brézis H. et Stampacchia G.

[4] Garabedian, P. R. and Korn, D. G. : Analysis of transonic Airfoils Comm. Pure Appl. Math. vol. XXIV, 6 pp. 841-851., 1972.

[5] Garabedian P., Bauer F., Jameson A.. Korn D. : Handbook of supercritical wing sections, Springer Verlag (to appear).

[6] Murman E.M. and Cole, J. D. : Calculation of plane steady transonic Flows AIAA, Vol. IX, pp.114-121 (1971).

[7] Jameson, A. : Iterative solution of transonic flows over Airfoils and wings, including flows at Mach I ; Comm. Pure and Appl. Math. Vol. XXVII, pp. 283-309 (1974).

[8] Morawetz, C. S. : Non existence of transonic flow past a profile; Comm. Pure and Appl. Math., Vol. XVII, pp. 357-367 (1964).

[9] Garabedian, P. R. : Estimation of the relaxation factor for smell meshsize ; Math. Tables Aids Comp., Vol. X, pp. 183-185 (1956).

[10] Morawetz, C. S. : The Dirichlet problem for the Tricomi equation Comm. Pure and Appl. Math., Vol. XXIII, pp. 587-601 (1970).