Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

J. M. Lasry
R. Robert

Degré et théorèmes de point fixe pour les fonctions multivoques ; applications

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1974-1975), exp. n° 14, p. 1-21
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1974-1975____A13_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - L I O N S - S C H W A R T Z
1 9 7 4 - 1 9 7 5

DEGRE ET THEOREMES DE POINT FIXE POUR LES FONCTIONS MULTIVOQUES ; APPLICATIONS

par J. M. LASRY et R. ROBERT

Exposé n° XIV

5 Mars 1975

INTRODUCTION

L'idée de définir,une notion de degré topologique pour des multi-applications est due à Eilenberg et Montgomery (voir [7]); ces auteurs définissent le nombre de Lefschetz pour une multi-application à valeurs acycliques sur un métrique compact ANR (absolute neighborhood retract) au moyen d'un théorème d'homologie dû à Victoris. L'extension de cette théorie au cas d'espaces non compacts et de multi-applications compactes est due essentiellement à Granas [9] , Jaworowski [12], [23] et Powers [22].

D'autres approches ont été utilisées pour définir un degré topologique dans le cas de multi-applications semi-continues supérieurement à valeurs convexes compactes. Citons Hukuhara [11] pour la dimension finie, puis Cellina et Lasota [3] qui définissent le degré pour des multi-applications de la forme $I-\Gamma$, avec Γ compacte dans un espace localement convexe métrisable au moyen d'un théorème d'approximation par des fonctions . Plus récemment Ma [13] étend ces résultats aux espaces localement convexes. Enfin avec des conditions supplémentaires sur l'espace (qui reviennent en gros à dire que c'est un espace de Frechet) Petryshyn et Fitzpatrick [15] définissent le degré pour $I-\Gamma$, où Γ est asymptotiquement compacte, au moyen de rétractions; une construction analogue utilisant le théorème d'approximation de Cellina est donnée par Webb [21].

Nous présentons ici une méthode différente de celles précédemment citées pour définir le degré des multi-applications à valeurs convexes. Cette méthode présente un triple intérêt :

1) Elle conduit à une construction particulièrement simple .

2) Elle ne suppose pas que la multi-application est à valeurs compactes dans le cas de la dimension finie; de plus on suppose qu'elle est seulement demi-continue supérieurement.

3) Indépendamment du degré, la méthode elle même fournit des démonstrations trés simples de certains théorèmes de point fixe déjà connus et permet d'énoncer des résultats nouveaux.

Nous donnons les principales propriétés du degré en dimension finie et infinie, renvoyant dans ce dernier cas à Ma [13] pour un exposé plus exhaustif, aprés avoir constaté que les deux notions coïncident.

Nous présentons trois types d'applications :

- Des théorèmes de points fixes et de surjectivité de multi-applications.
- Nous indiquons comment obtenir de façon systématique des résultats du genre théorème de Helly.
- Résolution de certaines équations aux dérivés partielles non linéaires.

Beaucoup de démonstrations ne figurent pas dans cette rédaction, nous renvoyons à [28] pour plus de détails.

A. DEFINITION DU DEGRE ET PRINCIPALES PROPRIETES.

Conventions et notations.

Soit E un espace localement convexe séparé sur $\mathbb{R}$ (e.l.c.s.); nous désignerons par FE l'ensemble des parties fermées non vides de E, par CE l'ensemble des parties convexes fermées non vides, et par KE l'ensemble des parties convexes compactes non vides de E.

Soit X, Y deux espaces topologiques. $x_0 \in X$, et une multi-application $\Gamma: X \to FY$. On dit que Γ est <u>semi-continue supérieurement en x_0</u> si, pour tout ouvert contenant $\Gamma(x_0)$, il existe un voisinage $U(x_0)$ de x_0 dans X tel que pour tout x dans $U(x_0)$ $\Gamma(x)$ soit contenu dans l'ouvert.

On dit que Γ est semi-continue supérieurement (s.c.s.) si elle l'est en tout point de X.

On vérifie facilement que si Y est compact, $\Gamma: X \to FY$ est s.c.s. si et seulement si son graphe $G(\Gamma) = \{(x,y) \mid y \in \Gamma(x)\}$ est fermé dans $X \times Y$. Une autre propriété utile est que si K est un compact contenu dans X, si Y est séparé et si $\Gamma: X \to FY$ est s.c.s. alors $\Gamma(K) = \bigcup_{x \in K} \Gamma(x)$ est compact.

Si Γ_1, Γ_2 sont deux multi-applications s.c.s. de X dans KE (E c.l.c.s.) alors $\Gamma_1 + \Gamma_2$ est s.c.s.

On dit que $\Gamma: X \to FE$ est <u>demi-continue supérieurement</u> (d.c.s.) si pour tout x_0 dans X et tout demi-espace ouvert contenant $\Gamma(x_0)$ il

existe un voisinage $U(x_o)$ de x_o dans X tel que pour tout x dans $U(x_o)$, $\Gamma(x)$ soit contenu dans le demi-espace ouvert.
Remarquons que la semi-continuité supérieure entraîne la demi-continuité supérieure, la réciproque n'étant pas vraie. Nous renvoyons à [18] pour les définitions et propriétés usuelles relatives à la théorie du degré pour les fonctions.

§.1 DEFINITION DU DEGRE SUR $\mathbb{R}^n$ ET PROPRIETES.

Suiveurs

Nous nous intéressons aux multi-applications $\Gamma : K \to F\mathbb{R}^r$, où K est un compact de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.1 : Etant donnée une telle multi-application Γ, on appelle suiveur de Γ sur K, ou suiveur de Γ, toute application continue $p : K \to \mathbb{R}^n$ telle que

$$\forall x \in K \quad p(x).\Gamma(x) \geq 1 \quad (\text{i.e. } p(x)y \geq 1 \ \ \forall y \in \Gamma(x))$$

Donnons maintenant un lemme sur l'existence de suiveurs; nous l'énonçons dans un contexte plus général car il interviendra dans la suite.

Lemme 1.2 : Soit E un e.l.c.s., X un espace topologique paracompact, $\Gamma : X \to CE$ demi-continue supérieurement telle que $\forall x \in X : 0 \notin \Gamma(x)$.
Alors il existe $p : X \to E^*$ (dual topologique de E) continue pour toute topologie d'e.v.t. séparée sur E^* telle que

$$< p(x), \Gamma(x) > \geq 1 \quad \forall x \in X.$$

De plus p est localement de dimension finie et localement compacte (i.e. : $\forall x$, il existe $U(x)$ voisinage de x tel que $p(U(x))$ soit contenu dans un espace de dimension finie et soit relativement compact).
Si en outre X est compact p est de dimension finie.
Démonstration : D'aprés le théorème de Hahn-Banach, pour tout x dans X, il existe q_x dans E^* telle que :

$$< q_x, \Gamma(x) > > 1.$$

Comme Γ est d.c.s., il existe U_x voisinage ouvert de xdans X tel que ;

$$\forall z \in U_x \quad < q_x, \Gamma(z) > > 1.$$

Les U_x constituent un recouvrement ouvert de X; X étant paracompact, il existe un recouvrement plus fin localement fini $(\Omega_i)_{i \in I}$ et une partition continue de l'unité $(\varphi_i)_{i \in I}$ subordonnée à ce recouvrement; on a donc :

(1) $\forall i \in I \ , \quad x_i \in X \ : \ \Omega_i \subset U_{x_i}$

(2) $\varphi_i \geq 0 \ , \ \operatorname{supp} \varphi_i \subset \Omega_i$

(3) $\forall x \in X \quad \sum\limits_{i \in I} \varphi_i(x) = 1$.

Utilisant (1) et l'axiome du choix, on définit une application de I dans $E^* \ : \ i \mapsto q_{x_i}$.

Si $x \in X$, soit $I_x = \{i \in I \mid x \in \Omega_i\}$, I_x est non vide et fini.

Considérons l'application $p : X \to E^*$ définie par :

$$p(x) = \sum_{i \in I} \varphi_i(x) q_{x_i} = \sum_{i \in I_x} \varphi_i(x) \ q_{x_i} \ .$$

Vérifions que p est bien un suiveur de Γ; en effet :

$$< p(x), \Gamma(x) > = \sum_{i \in I_x} \varphi_i(x) < q_{x_i}, \Gamma(x) > \ .$$

Comme : $x \in \Omega_i \subset U_{x_i}$, on a $< q_{x_i}, \Gamma(x) > > 1 \quad \forall i \in I_x$;

d'où :

$$\sum_{i \in I_x} \varphi_i(x) < q_{x_i}, \Gamma(x) > \ \geq \sum_{i \in I_x} \varphi_i(x) = 1 \ .$$

Vérifions que p est continue, localement de dimension finie et localement compacte.

Soit V un voisinage de x ne rencontrant qu'un nombre fini de Ω_i; notons $I_V = \{i \in I \mid V \text{ rencontre } \Omega_i\}$, alors :

$$p(y) = \sum_{i \in I_V} \varphi_i(y) \ q_{x_i}$$

pour tout y dans V; on en déduit immédiatement les propriétés énoncées.

Si X est compact on est tout de suite ramené à I fini. ∎

Remarque 1.3 Si p est un suiveur de Γ sur K, on a $p(x) \neq 0$ $\forall x$.

Lemme et définition 1.4. : Soit D un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^n$, $\overline{D}$ son adhérence, ∂D sa frontière ; soit $\Gamma : \overline{D} \to F\mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe $p = \partial D \to \mathbb{R}^n$ suiveur de Γ sur ∂D. Alors on peut définir $d(0,p,\partial D)$ (degré de p par rapport à 0 et ∂D, au sens des fonctions); ce degré ne dépend pas du suiveur choisi; par définition nous dirons que c'est le degré de Γ par rapport à 0 et D, nous le noterons $d(0,\Gamma,D)$.

Démonstration : p est continue de ∂D dans $\mathbb{R}^n$ et $\forall x$, $p(x) \neq 0$; on rappelle que $d(0,p,\partial D)$ est défini comme étant le degré par rapport à 0 et D de n'importe quelle extension continue $\hat{p}$ de p à $\overline{D}$.
Soient p^1 et p^2 deux suiveurs de Γ sur ∂D. Considérons l'homotopie $(t,x) \to tp_1(x) + (1-t)p_2(x)$, définie sur $[0,1]$ ∂D.

On a bien :

$$\forall t \in [0,1], \forall x \in \partial D\ ,\ tp_1(x) + (1-t)\ p_2(x) \neq 0.$$

En effet, prenons y dans $\Gamma(x)$, on a :

$$tp_1(x)\ .\ y + (1-t)\ p_2(x)\ .\ y \geq 1$$

(Ceci montre au passage que $tp_1 + (1-t)\ p_2$ est encore un suiveur de Γ sur ∂D)
Donc d'aprés les propriétés du degré pour les fonctions, on a bien:

$$d(0,p_1,\partial D) = d(0,p_2,\partial D).\ ∎$$

On vient de définir $d(0,\Gamma,D)$ pour les multi-applications de $\overline{D}$ dans $F\mathbb{R}^n$ possédant un suiveur sur ∂D; le degré est ainsi défini dans un cadre trés général. En particulier, en utilisant le lemme 1.2, on voit que $d(0,\Gamma,D)$ est défini pour toute multi-application $\Gamma : \overline{D} \to C\mathbb{R}^n$ demi-continue supérieurement et telle que $0 \notin \Gamma(\partial D)$.

Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et $\Gamma : \overline{D} \to F\mathbb{R}^n$. Si Γ-a possède un suiveur sur ∂D on définit $d(a,\Gamma,D) = d(0,\Gamma-a,D)$.
Notons $S\Gamma = \{a \in \mathbb{R}^n \mid \Gamma\text{-}a$ possède un suiveur sur $\partial D\}$

Proposition 1.5. Soit $\Gamma : \overline{D} \to F\mathbb{R}^n$, alors $S\Gamma$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenu dans $\mathbb{R}^n \setminus \Gamma(\partial D)$. De plus si Γ est demi-continue supérieurement à valeurs convexes fermées on a : $S\Gamma = \mathbb{R}^n \setminus \Gamma(\partial D)$

Propriétés du degré sur $\mathbb{R}^n$

Donnons tout d'abord une notion d'homotopie adaptée aux multi-applications que nous considérons.

Définition 1.6. On appelle homotopie relative à 0 toute multi-application $\Gamma : [0,1] \times \overline{D} \to F\mathbb{R}^n$ possédant un suiveur sur $[0,1] \times \partial D$, c'est à dire telle qu'il existe $p = [0,1] \times \partial D \to \mathbb{R}^n$ continue vérifiant :

$$p(t,x) \,.\, \Gamma(t,x) \geq 1 \;\; \forall (t,x) \in [0,1) \times \partial D.$$

On dira que Γ est une homotopie relative à a si Γ-a est une homotopie relative à 0.

Exemple : Si $\Gamma : [0,1] \times \overline{D} \to C\mathbb{R}^n$ est d.c.s., et si $0 \notin \Gamma([0,1] \times \partial D$, Γ est une homotopie relative à 0; cela se déduit aisément du lemme 1.2. en prenant $X = [0,1] \times \partial D$.

Enonçons maintenant en un théorème les principales propriétés du degré que nous venons de définir.

Théorème 1.7. Soit $\Gamma : \overline{D} \to F\mathbb{R}^n$ et $a \in S\Gamma$, alors $d(a,\Gamma,D)$ est défini et on a :

(1) S'il existe une section continue f de Γ (i.e. $f = \overline{D} \to \mathbb{R}^n$ continue telle que $f(x) \in \Gamma(x) \; \forall x$), $d(a,f,D)$ est défini et égal à $d(a,\Gamma,D)$.

(2) Continuité par rapport à a.
Il existe un voisinage U de a dans $S\Gamma$ tel que : $\forall b \in U \;\; d(a,\Gamma,D) = d(a,\Gamma,D)$.

(3) Continuité par rapport à Γ.
Il existe $\varepsilon > 0$, tel que $\forall \Gamma'$, $\Gamma' : \overline{D} \to F\mathbb{R}^n$ vérifiant $\Gamma'(x) \subset \Gamma(x) + B(0,\varepsilon)$ pour tout x, on ait $a \in \Gamma'$ et $d(a,\Gamma',D) = d(a,\Gamma,D)$

(4) $d(a,\Gamma,D)$ ne dépend que des valeurs de Γ sur ∂D. i.e. si $\Gamma' : \overline{D} \to F\mathbb{R}^n$ coïncide avec Γ sur ∂D alors $a \in S\Gamma'$ et $d(a,\Gamma',D) = d(a,\Gamma,D)$

(5) S'il existe un suiveur de Γ-a sur $\overline{D}$, on a $d(a,\Gamma,D) = 0$ (c'est le cas si $\Gamma : \overline{D} \to C\mathbb{R}^n$ est d.c.s. et $a \notin \Gamma(\overline{D})$).

(6) Invariance par homotopie.

Soit $\Gamma : [0,1] \ \overline{D} \to F\mathbb{R}^n$ une homotopie relative à a.

Notons $\Gamma_o(x) = \Gamma(0,x)$, $\Gamma_1(x) = \Gamma(1,x)$

Alors : $a \in S\Gamma_o$ et $a \in S\Gamma_1$, et $d(a,\Gamma_o,D) = d(a,\Gamma_1,D)$

(7) Décomposition du domaine .

Soit $a \in S\Gamma$ et $D = D_1 \cup D_2$, D_1, D_2 étant deux ouverts disjoints (alors $\partial D = \partial D_1 \cup \partial D_2$).

On a :

$$d(a,\Gamma,D) = d(a,\Gamma,D_1) + d(a,\Gamma,D_2)$$

(Par convention le degré par rapport à l'ouvert vide est nul).

(8) Propriété d'excision.

Soit K un compact contenu dans $\overline{D}$; s'il existe un suiveur de Γ-a sur $K \cup \partial D$ (c'est le cas si, par exemple $\Gamma : \overline{D} \to C\mathbb{R}^n$ est d.c.s et $a \notin \Gamma(K \cup \partial D)$), on a :

$$d(a,\Gamma,D) = d(a,\Gamma,D \setminus K) \quad .$$

LE THEOREME DE BORSUK SUR $\mathbb{R}^n$.

Théorème 1.8. (Borsuk) Soit D un ouvert borné contenant 0 et symétrique dans $\mathbb{R}^n$, $\Gamma : \overline{D} \to F\mathbb{R}^n$ possédant un suiveur sur ∂D et impair sur ∂D (i.e. $\Gamma(x) = -\Gamma(-x)$ pour tout x dans ∂D). Alors $d(0,\Gamma,D)$ est impair.

Démonstration : Soit p un suiveur de Γ sur ∂D; considérons une extension continue $\hat{p}$ de p à $\overline{D}$ et formons ensuite $q(x) = \frac{1}{2}[p(x) - p(-x)]$; q est impaire sur $\overline{D}$, montrons que q est encore un suiveur de Γ sur ∂D :en effet, pour tout y dans $\Gamma(x)$ on a :

$$q(x).y = \frac{1}{2}\, p(x).y + \frac{1}{2}\, p(-x)(-y)$$

et comme $-y \in \Gamma(-x)$, $q(x).y \geq 1$. on a donc : $d(0,\Gamma,D) = d(0,q,D)$

Et d'aprés le théorème de Borsuk pour les fonctions (voir [18] page 78) le deuxième membre est impair. ■

Théorème 1.9. (Borsuk - Ulam) Supposons D comme en 1.8. et soit

$\Gamma : \partial D \to K\mathbb{R}^n$ demi-continue supérieurement; on suppose de plus que $\Gamma(\partial D)$ est contenu dans un sous espace $E \neq \mathbb{R}^n$. Alors, il existe x dans ∂D tel que

$$\Gamma(x) \cap \Gamma(-x) \neq \emptyset.$$

Corollaire 1.10. Soit S^n la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$ $(n \geq 1)$ $\Gamma : S^n \to K\mathbb{R}^n$ d.c.s. Alors il existe x dans S^n tel que $\Gamma(x) \cap \Gamma(-x) \neq \emptyset$.

Remarque 1.11. Pour les multi-applications à valeurs dans les convexes compacts non vides de $\mathbb{R}^n$ la demi-continuité supérieure est équivalente à la semi-continuité supérieure.

C'est un cas particulier de Valadier [25] p. 49.

§ 2. DEFINITION DU DEGRE EN DIMENSION INFINIE

Notre but est maintenant de définir $d(a, I-\Gamma, D)$ où D est un ouvert d'un e.l.c.s. E, avec $\Gamma : \bar{D} \to KE$ d.c.s. et compacte (i.e. $\Gamma(\bar{D})$ relativement compact) et $a \notin (I-\Gamma)(\partial D)$.

Pour cela nous donnons plusieurs résultats préliminaires.

Lemme 2.1 : Soit D un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, $\Gamma = \bar{D} \to K\,\mathbb{R}^n$ d.c.s. et compacte, telle que $0 \notin (I-\Gamma)(\partial D)$. Alors $d(0, I-\Gamma, \Omega)$ ne dépend pas de l'ouvert borné Ω choisi tel que $D \cap \overline{\Gamma(\bar{D})} \subset \Omega \subset D$; par définition, nous écrivons ce nombre $d(0, I-\Gamma, D)$.

Remarque 2.2 : En remplaçant 0 par a dans le lemme 2.1, la même démonstration montre que $d(a, I-\Omega)$ ne dépend pas de l'ouvert borné Ω tel que $D \cap \overline{(\Gamma+a)(\bar{D})} \subset \Omega \subset D$. On note ce nombre $d(a, I-\Gamma, D)$.
Nous allons maintenant donner une définition du degré sur n'importe quel espace de dimension finie.

Lemme 2.3 : Soit A une bijection linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, Γ_o une multi-application d.c.s. à valeurs convexes fermées non vides, définie sur un ouvert borné D_o de $\mathbb{R}^n$, et soit $a \notin \Gamma_o(\partial D_o)$. Considérons la multi-application Γ_1, définie sur $D_1 = A^{-1}D_o$ par $\Gamma_1(x) = A^{-1}\Gamma_o(Ax)$. Alors Γ_1 est d.c.s., $A^{-1}a \notin \Gamma_1(\partial D_1)$ et on a :

$$d(a, \Gamma_o, D_o) = d(A^{-1}a, \Gamma_1, D_1).$$

Lemme 2.4 : Soit F un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$, D un ouvert borné non vide de F, une multi-application $\Gamma : \bar{D} \to CF$ d.c.s., et $a \notin \Gamma(\partial D)$.
Soient φ_1 et φ_2 deux bijections linéaires de F sur $\mathbb{R}^n$, $D_i = \varphi_i(D)$ $(i = 1,2)$, $\Gamma_i : \bar{D}_i \to C\mathbb{R}^n$ définie par : $\Gamma_i(x) = \varphi_i(\Gamma(\varphi_i^{-1}(x))$; on a alors :

$$d(\varphi_1(a), \Gamma_1 D_1) = d(\varphi_2(a), \Gamma_2 D_2).$$

Définition 2.5 : Dans les conditions du lemme 2.4, soit $\Gamma : \bar{D} \to CF$ d.c.s. et soit $a \in F$, $a \notin \Gamma(\partial D)$. On pose $d(a, \Gamma, D) = d(\varphi(a), \Gamma_\varphi, D_\varphi)$ avec $D_\varphi = \varphi(D)$ et $\Gamma_\varphi(x) = \varphi(\Gamma(\varphi^{-1}(x)))$ où φ est n'importe quelle bijection linéaire de F sur $\mathbb{R}^n$.

Donnons maintenant deux résultats qui vont permettre de passer à la dimension infinie.

<u>Lemme 2.6</u> : Soient F_1 et F_2 deux espaces de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et $F = F_1 \times F_2$, D un ouvert borné non-vide de F, $\Gamma : \overline{D} \to CF_1$ d.c.s. et compacte. Soit $a \in F_1$, $a \notin (I - \Gamma)(\partial D)$ on a alors :

$$d(a, I - \Gamma, D) = d(a, (I - \Gamma)_{|\overline{D \cap F_1}}, D \cap F_1).$$

<u>Lemme 2.7</u> : Mêmes hypothèses que dans le lemme 2.6 sauf pour D qui n'est plus supposé borné ; même conclusion.

Désormais E désignera un espace localement convexe séparé sur $\mathbb{R}$ de dimension infinie, D un ouvert non vide de E et Γ une multi-application de $\overline{D}$ dans KE, demi-continue supérieurement et compacte.

<u>Définition 2.8</u> : Soit $\Gamma : \overline{D} \to KE$ d.c.s. et compacte telle que $\Gamma(\overline{D})$ soit continu dans un sous-espace de dimension finie, et soit $a \notin (I - \Gamma)(\partial D)$. Alors on peut définir $d(a, I - \Gamma, D) = d(a(I - \Gamma)_{|\overline{D \cap F}}, D \cap F)$ pour n'importe quel sous-espace F de dimension finie ≥ 1, contenant a et $\Gamma(\overline{D})$.

En effet soient F_1 et F_2 deux tels sous espaces, il suffit d'appliquer le lemme 2.7 en considérant F_1, $F_1 + F_2$ et F_2, $F_1 + F_2$. Passons au cas général, nous avons besoin de plusieurs lemmes avant de donner la définition du degré.

<u>Lemme 2.9</u> : Soit $\Gamma : \overline{D} \to KE$ d.c.s. et compacte, alors $(I - \Gamma)(\partial D)$ est fermé dans E.

<u>Lemme 2.10</u> : Soit $\Gamma : \overline{D} \to KE$ d.c.s. et compacte, alors Γ est semi-continue supérieurement.

<u>Lemme 2.11</u> : Soit a un point de E n'appartenant pas à $(I - \Gamma)(\partial D)$ et V un voisinage ouvert convexe et équilibré de 0 dans E tel que $(a + V) \cap (I - \Gamma)(\partial D) = \emptyset$. Alors il existe une multi-application Γ_1 de $\overline{D}$ dans KE d.c.s. et compacte telle que :

(i) $a \notin (I - \Gamma_1)(\partial D)$

(ii) $\forall x \in \overline{D}$ $\Gamma_1 x \subset \Gamma_x + V$ et $\Gamma_x \subset \Gamma_1 x + V$

(iii) $\Gamma_1(\overline{D})$ est contenu dans un sous-espace de dimension finie.

<u>Lemme 2.12</u> : Soient Γ_1 et Γ_2 deux multi-applications de $\overline{D}$ dans KE, d.c.s. et compactes, vérifiant les conditions (i), (ii) et (iii) du lemme 2.11 ; alors :

$$d(a, I - \Gamma_1, D) = d(a, I - \Gamma_2, D)$$

<u>Définition 2.13</u> : Soit $\Gamma : \overline{D} \to KE$ d.c.s. et compacte, soit $a \notin (I - \Gamma)(\partial D)$. On définit $d(a, I - \Gamma, D)$ comme étant $d(a, I - \Gamma_1, D)$ où Γ_1 est n'importe quelle multi-application vérifiant les conditions du lemme 2.11, correspondant à n'importe quel voisinage V de 0 dans E ouvert, convexe, équilibré tel que $(a + V) \cap (I - \Gamma)(\partial D) = \emptyset$.

On peut (voir [28]) vérifier les propriétés habituelles du degré; nous nous limiterons à énoncer en un théorème les trois propriétés essentielles.

<u>Théorème 2.14</u> : Soit $\Gamma : \overline{D} \to KE$ d.c.s. et compacte, soit $a \notin (I - \Gamma)(\partial D)$. Alors :

(1) si $f : \overline{D} \to E$ est une section continue de Γ on a :
$d(a, I - \Gamma, D) = d(a, I - f, D)$ ce dernier désignant le degré de Leray-Schauder.

(2) si $a \notin (I - \Gamma)(D)$ on a : $d(a, I - \Gamma, D) = 0$

(3) Invariance par homotopie :
si $H : [0,1] \times \overline{D} \to KE$ est d.c.s. et compacte telle que $a \notin (I - H_t)(\partial D)$ $\forall t \in [0,1]$. Alors $d(a, I - H_0, D) = d(a, I - H_1, D)$.

<u>Théorème de Borsuk en dimension infinie</u> : E désigne toujours un espace localement convexe séparé sur $\mathbb{R}$ de dimension infinie.

<u>Théorème 2.15</u> (Borsuk) : Soit D un ouvert symétrique contenant 0, Γ une multi-application de $\overline{D}$ dans KE d.c.s. et compacte, on suppose que $0 \notin (I - \Gamma)(\partial D)$ et que Γ est impaire sur ∂D (i.e. $\Gamma(-x) = -\Gamma(x)$ $\forall x \in \partial D$), alors $d(0, I - \Gamma, D)$ est impair.

<u>Corollaire 2.16</u> : Soit D un ouvert symétrique contenant 0, Γ une multi-application de $\overline{D}$ dans KE d.c.s. et compacte vérifiant $0 \notin (I - \Gamma)(\partial D)$. Supposons que :

$$\forall \lambda \in [0,1] \ , \ \forall x \in \partial D : (I - \Gamma)(x) \cap \lambda(I - \Gamma)(-x) = \emptyset \ .$$

Alors $d(0, I - \Gamma, D)$ est impair.

Corollaire 2.17 : (Borsuk-Ulam) Soit D un ouvert symétrique contenant 0, $\Gamma : \bar{D} \to KE$ d.c.s. et compacte ; on suppose qu'il existe M, sous-espace propre de E tel que : $(I - \Gamma)(\bar{D}) \subset M$. Alors, il existe x dans ∂D tel que $(I - \Gamma)(x) \cap (I - \Gamma)(-x) \neq \emptyset$.

B. APPLICATIONS

§ 3. THEOREMES DE POINT FIXE ET DE SURJECTIVITE

La théorie du degré donne, bien entendu, des théorèmes de point fixe et de surjectivité de multi-applications. Nous ne développerons pas ici ce paragraphe, on trouvera un exposé détaillé dans [28] ; on y trouvera notamment une démonstration très simple du théorème de non séparation de Fan et un théorème de surjectivité des multi-applications "outward" améliorant des résultats de Rogalski [17]. Nous allons donner simplement une forme multivoque du théorème de Schaefer qui interviendra au paragraphe 5.

Théorème 3.1 Soit E un espace de Banach réel, $\Gamma : E \to KE$ une multi-application s.c.s. telle que pour tout borné $\mathcal{B}$ de E, $\Gamma(\mathcal{B})$ soit relativement compact. Alors si

$$\{x \in E \mid x \in \lambda\Gamma(x),\ \lambda \in \,]0,1[\,\}$$

est borné dans E, il existe x dans E tel que $x \in \Gamma(x)$.

Démonstration : On considère $R > 0$ assez grand pour que $F = \{x \mid x \in \lambda\Gamma(x),\ \lambda \in \,]0,1[\,\}$ soit contenu dans la boule ouverte $B(0,R)$. S'il existe x, $\|x\| = R$, tel que $x \in \Gamma(x)$, c'est terminé, sinon $(\lambda, x) \to x - \lambda\Gamma(x)$ est une homotopie et on a $d(0, I - \Gamma, B(0,R)) = d(0, I, B(0,R)) = +1$ d'où le résultat. ■

§ 4. QUELQUES PROPRIETES COMBINATOIRES DANS $\mathbb{R}^n$

Le but de ce paragraphe est de montrer comment utiliser la théorie que nous avons développé pour obtenir certains résultats combinatoires dans $\mathbb{R}^n$ tels que le théorème de Helly sur l'intersection de convexes ou le théorème de Kuratowski-Knaster-Mazurkiewicz. Nous montrons comment ces résultats se ramènent à des propriétés de multi-applications s.c.s. définies sur des simplexes ; et comment on peut obtenir une grande variété de résultats en choisissant judicieusement la multi-application et le simplexe. Nous mettons l'accent sur l'esprit de la méthode plus que sur les résultats eux-mêmes.

Un peu de géométrie du simplexe de dimension n

Dans $\mathbb{R}^n$, nous désignons par S_n, simplexe de dimension n, l'enveloppe convexe des points $a_o = (0,0\dots,0)$, $a_1 = (1,0,\dots,0)$, $a_2 = (0,1,\dots,0)\dots$ $a_n = (0,\dots,01)$. ∂S_n designe le bord de S_n. Pour tout $x \in \partial S_n$, il existe un sous-ensemble $I \subset \{0,1,\dots,n\}$ et un seul tel que $x \in \text{int.rel}\,[\text{conv.}\{a_i \mid i \in I\}]$ (int.rel. désigne l'intérieur relatif).
Soit p un point quelconque à l'intérieur de S_n ; désignons par φ l'application continue de ∂S_n dans lui-même qui à $x \in \partial S_n$ associe le point $\varphi(x)$ où la droite (p,x) recoupe le bord du simplexe.
Si $x \in \text{int.rel}[\text{conv.}\{a_i \mid i \in I\}]$, et si $\varphi(x) \in \text{int.rel}[\text{conv.}\{a_j \mid j \in \mathcal{J}\}]$, on a $I \cup \mathcal{J} = \{0,\dots,n\}$. En effet $n \in \text{conv}\{x,\varphi(x)\} \subset \text{conv.}\{a_m \mid m \in I \cup \mathcal{J}\}$.

Proposition 4.1 : Soit Γ une multi-application s.c.s. de ∂S_{n+1} dans $K\mathbb{R}^n$, il existe $x \in \partial S_{n+1}$ tel que $\Gamma(x) \cap i(\varphi(x)) \neq \emptyset$.

Démonstration : ∂S_{n+1} est homéomorphe à la sphère de dimension n par l'homéomorphisme $\alpha(x) = \frac{x-p}{\|x-p\|}$, et comme par cet homéomorphisme l'application φ devient $x \to -x$ le résultat se déduit immédiatement du théorème de Borsuk (Corollaire 1.10). ■

Théorème 4.2 : (Helly) Soit, dans $\mathbb{R}^n$, m convexes $C_1,\dots,C_m$ avec $m \geq n+1$; si l'intersection de $n+1$ quelconques d'entre eux n'est pas vide, alors l'intersection de tous les C_i est non vide.

Démonstration : On commence par se ramener au cas où les C_i sont compacts. Pour tout ensemble I de $n+1$ éléments dans $\{1,\dots,m\}$ prenons un point dans $\bigcap_{i \in I} C_i$, notons A l'ensemble fini ainsi obtenu et considérons $\hat{C}_i = \text{conv}\, A \cap C_i$. Il est clair que les $\hat{C}_i$ sont convexes compacts et vérifient encore l'hypothèse d'intersection. Et comme $\hat{C}_i \subset C_i$ il suffit de montrer le théorème pour les $\hat{C}_i$.

Montrons alors le résultat par récurrence. C'est trivial pour $m = n+1$; supposons donc $m > n+1$ et le résultat vrai pour $m-1$ montrons qu'il est vrai pour m d'après l'hypothèse de récurrence, toute intersection de $m-1$ $\hat{C}_i$ est non vide. Soit Γ la multi-application s.c.s. de ∂S_{m-1} dans $K\mathbb{R}^n$ définie par :

$\Gamma(a_i) = \hat{C}_i$, $\Gamma(x) = \hat{C}_i \cap \hat{C}_j$ pour $x \in]a_i, a_j[$ et d'une façon générale :

$$\Gamma(x) = \bigcap_{i \in I} \hat{C}_i \text{ pour } x \in \text{int.rel.}\,[\text{conv}\,\{a_i \mid i \in I\}]$$

Soit φ l'application définie à la proposition 4.1 , il existe alors $x \in \partial S_{m-1}$ tel que $\Gamma(x) \cap \Gamma(\varphi(x)) \neq \emptyset$. Ceci signifie

$$\bigcap_{i \in I} \hat{C}_i \cap \bigcap_{j \in \mathcal{J}} \hat{C}_j \neq \emptyset$$

et d'après ce qui a été dit au début du paragraphe $I \cup \mathcal{J} = \{1,\ldots,m\}$. ∎

<u>Remarque 4.3</u> : Le lecteur interessé par le théorème de Helly et ses à côtés pourra consulter [10] ; on trouve d'autres démonstrations dans Rockafeller [16] ou dans Eggleston [6].

Pour illustrer la méthode, nous allons donner un autre exemple relatif aux intersections de convexes.

<u>Théorème 4.4</u> : Soient C_i, $i = 1,2,\ldots,6$ six convexes de $\mathbb{R}^2$ vérifiant :

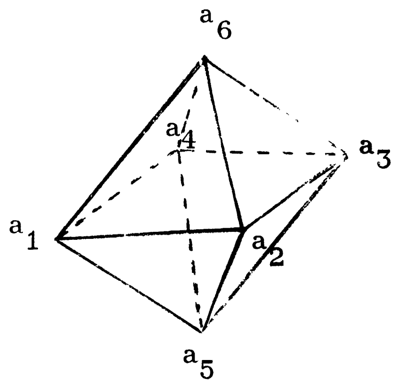
$$C_i \cap C_{i+1} \cap C_k \neq \emptyset \qquad \text{pour } i = 1,2,3, \quad \text{et} \quad k = 5,6$$

et

$$C_4 \cap C_1 \cap C_k \neq \emptyset \qquad k = 5,6$$

Alors il en existe au moins quatre qui ont une intersection non vide.

Démonstration : On se ramène au cas ou les C_i sont compacts par le même argument qu'en 4.2.
Considérons un octaèdre dans $\mathbb{R}^3$ et numérotons ses sommets de la façon suivante :



Notons Δ cet octaèdre et définissons une multi-application s.c.s. Γ de $\partial\Delta$ dans $K\mathbb{R}^2$ par :

$$\Gamma(a_i) = C_i$$
$$\Gamma(x) = C_i \cap C_j \quad \text{si} \quad x \in \,]a_i, a_j[\qquad i, j \text{ distincts}$$
$$\Gamma(x) = C_i \cap C_j \cap C_k \quad \text{si } x \in \text{int.rel}[\text{conv}\{a_i, a_j, a_k\}]$$

pour i, j, k distincts.

Prenons un point p à l'intérieur de l'octaèdre ne se situant sur aucun des plans $a_i\, a_j\, a_k$ i,j,k distincts, considérons l'application φ construite comme précédemment. Par un raisonnement identique, on conclut qu'il existe $x \in \partial\Delta$ tel que $\Gamma(x) \cap \Gamma(\varphi(x)) \neq \emptyset$. D'après le choix de p, la droite $(x, \varphi(x))$ n'est contenue dans aucun des plans (a_i, a_j, a_k). On en déduit que $\Gamma(x) \cap \Gamma(\varphi(x)) = \bigcap_{i \in I} C_i$ avec Card $I \geq 4$.

Remarque 4.5 : Ici on suppose seulement 8 conditions d'intersection, correspondant aux huit faces de l'octoèdre. Pour pouvoir appliquer le théorème de Helly et conclure que l'intersection des six convexes est non vide il faudrait que l'intersection de trois quelconques d'entre eux soit non vide soit 20 conditions.

D'une façon générale on voit que les propriétés d'intersection de convexes de $\mathbb{R}^n$ sont liées à la géométrie des polyèdres de $\mathbb{R}^{n+1}$.

§ 5. APPLICATIONS AUX EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

Soit X un compact, dx une mesure de Radon sur X. On note Mes_n l'ensemble des fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}^n$; on note $L^p_n = L^p(X,\mathbb{R}^n)$.

Soit f une multi-application de $X\times\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ telle que

(1) le graphe de f est borélien

(2) pour presque tout x (p.t.x) et pour tout $\alpha\in\mathbb{R}^n$, $f(x,\alpha)$ est un convexe compact non vide de $\mathbb{R}^n$

(3) pour presque tout x, la multi-application $\alpha\to f(x,\alpha)$ est s.c.s.

Il résulte de (2) que si $u\in Mes_n$ la multi-application $F_u : x\to f(x,u(x))$ est mesurable de X dans $\mathbb{R}^m$. On note $\mathbb{F}(u)$ l'ensemble convexe non vide des sections mesurables de F_u, c'est-à-dire :

$$\mathbb{F}(u) = \{z\in Mes_m \mid z(x)\in f(x,u(x)) \quad \text{p.t.x}\}$$

Théorème 5.1 : Soit p, r dans $[1,+\infty[$. Supposons que pour tout $u\in L^p(X,\mathbb{R}^n)$ on a $\mathbb{F}(u)\subset L^r(X,\mathbb{R}^m)$. Alors :

(i) $\mathbb{F}(u)$ est un convexe fermé borné de $L^r(X,\mathbb{R}^m)$

(ii) si $\|u_n - u\|_p\to 0$ et si $z_n\in\mathbb{F}(u_n)$ on a $\lim\limits_{n\to\infty}[\mathrm{dist}_r(z_n,\mathbb{F}(u))] = 0$

avec

$$\mathrm{dist}_r(z,\mathbb{F}(u)) = \inf\{\|z-y\|_r \mid y\in\mathbb{F}(u)\}$$

(iii) si la mesure dx est diffuse, $\mathbb{F}$ est borné (c.à.d : $\mathcal{B}$ borné $\Rightarrow\mathbb{F}(\mathcal{B})$ borné).

Corollaire 5.2 : Supposons qu'il existe $A\in L^r(X,\mathbb{R})$ et $b\in\mathbb{R}_+$ tels que

$$(5)\qquad \begin{cases} |y| \leq A(x) + b|\alpha|^{p/r} & \text{pour presque tout } x, \text{ tout } \alpha\in\mathbb{R}^n \\ \text{et tout } y\in f(x,\alpha) \end{cases}$$

On a alors (i) et (ii), et la multi-application $\mathbb{F}$ est bornée.

Remarque 5.3 : Lorsque f est univoque le point (ii) implique que la fonction $\mathbb{F}$ est continue de L^p_n dans L^r_n pour les topologies fortes. On retrouve le théorème I.2.2 de Krasnoselskii [27] sans l'hypothèse que dx est diffuse (cf. Krasnoselskii [27] p. 32).

Nous ne donnons que la démonstration de (ii). Soit (u_i) une suite telle que $\|u_i - u\|_p \to 0$ et soit $z_i \in \mathbb{F}(u_i)$. On extrait une sous-suite encore notée (u_i) telle que $\Sigma\|u_i - u\|_p < +\infty$ et $u_i(x) \to u(x)$ pour presque tout x. D'après l'hypothèse (3) on a donc (6):
$d(z_i(x), f(x,u(x))) \to 0$ pour presque tout x. Soit

(7) $$h(x) = \sup_{i \in \mathbb{N}} d(z_i(x), f(x,u(x)))$$

Pour presque tout x, il existe au moins un entier n_x tel que

$$h(x) = d(z_{n_x}(x),\ f(x,u(x)))$$

En outre on peut choisir n_x de telle sorte que l'application $x \to n_x$ soit mesurable. Soit q et w les fonctions mesurables définies par $w(x) = u_{n_x}(x)$ et $q(x) = z_{n_x}(x)$. On a $\|w - u\|_q \leq \Sigma \| u_i - u\|_p < +\infty$. Donc $w \in L^p_n$.
On a $q \in \mathbb{F}(w)$ donc $q \in L^r_m$ d'après l'hypothèse (4). Donc $h \in L^r(X, \mathbb{R})$. On en déduit, d'après (6), (7) et le théorème de Lebesgue, que $\mathrm{dist}_r(z_i, \mathbb{F}(u)) \to 0$ quand $i \to \infty$.

<u>Corollaire 5.4</u> : Supposons que f vérifie (1,2,3,4) et que la mesure dx est diffuse. Soit $\mathbb{K}$ un opérateur linéaire compact de $L^r(X,\mathbb{R}^n)$ dans $L^p(X,\mathbb{R}^m)$. Alors $\mathbb{K} \circ \mathbb{F}$ est s.c.s. de $L^p(X,\mathbb{R}^m)$ dans lui-même et $\overline{\mathbb{K}(\mathbb{F}(\mathcal{B}))}$ est compact pour tout borné .

<u>Démonstration</u> : Soit $\mathcal{B}$ un borné de L^p_n. D'après le point (iii) du théorème 1 $\mathbb{F}(\mathcal{B})$ est borné dans L^r_m, donc $\mathbb{K}(\mathbb{F}(\mathcal{B}))$ est relativement compact dans L^p_n.

Il suffit donc de montrer que le graphe de Γ est fermé. Supposons que $\|u_i - u\|_p \to 0$, que $\|z_i - z\|_p \to 0$ et que $z_n \in \mathbb{K}(\mathbb{F}(u_i))$. Soit y_i tels que $z_i = \mathbb{K}y_i$ et $y_i \in \mathbb{F}(u_i)$. D'après le point (ii) du théorème 1, $\mathrm{dist}_r(y_i, \mathbb{F}(u)) \to 0$. Comme $\mathbb{K}$ est continu on en déduit que $\mathrm{dist}_p(z_i, \mathbb{K}(\mathbb{F}(u))) \to 0$. Donc $z \in \mathbb{K}(\mathbb{F}(u))$. <u>cqfd.</u>

Remarque 5.5 : Ce corollaire montre que l'on peut appliquer les résultats des chapitres 2 et 3 pour montrer l'existence éventuelle d'un point fixe $u \in \mathbb{K}(\mathbb{F}(u))$

Exemple : Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$. Soit $X = \overline{\Omega}$ et soit dx la mesure de Lebesgue. Soit f une multi-application de $X \times \mathbb{R}^{n+1}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie (1), (2), (3) et (4) avec $p = r = 2$. C'est le cas par exemple si $|f(x,\alpha,\beta)| \leq A(x) + b(\alpha^2 + \beta^2)$ pour tout $x \in \Omega$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}^n$.

Soit $\mathbb{K}: L^2(\Omega) \to H_o^1(\Omega)$ l'application linéaire compacte définie par $u = \mathbb{K}v$ où u est la solution de l'équation suivante

$$u \in H_o^1(\Omega) \quad , \quad \Delta u = v$$

D'après le corollaire 2 la multi-application $u \to \mathbb{K}(\mathbb{F}(u,\text{grad } u))$ est s.c.s. compacte de $H_o^1(\Omega)$ dans $H_o^1(\Omega)$, et $u \in \mathbb{K}(\mathbb{F}(u,\text{grad } u))$ si et seulement si

(8) $$u \in H_o^1(\Omega) \quad \text{et} \quad \Delta u(x) \in f(x,u(x), \text{grad } u(x) \qquad \text{p.t.x.}$$

Proposition 1.6 : S'il existe α et β positifs tels que

(9) $$\begin{cases} y(x) \in f(u(x),\text{grad } u(x) \quad \text{pour presque tout } x \text{ implique} \\ -\int_\Omega y(x)\, u(x)\, dx \leq \alpha + \beta \|u\|_{H^1(\Omega)} \end{cases}$$

l'équation (8) a au moins une solution.

Démonstration : On a vu que l'équation (8) est équivalente à $u \in \mathbb{K} \circ \mathbb{F}(u)$. On va montrer que $\mathbb{K} \circ \mathbb{F}$ vérifie les hypothèses du théorème de Schaefer multivoque (cf. chapitre 3). La seule hypothèse qui reste à vérifier est "l'estimation a priori".

Pour tout $u \in H_o^1$ on a l'inégalité de Poincaré $\int \nabla u^2 \geq \gamma \|u\|^2_{H^1}$. Soit C la plus grande racine de $\gamma x^2 = \alpha x + \beta$. Nous allons montrer que $u \in \mathbb{K}(\mathbb{F}(u))$ et $0 \leq \lambda \leq 1$ impliquent $\|u\|_{H^1} \leq C$.

Par définition $u \in \lambda \mathbb{K}(\mathbb{F}(u))$ signifie

$$(10) \qquad \begin{cases} u \in H_o^1(\Omega) \text{ et} \\ \Delta u(x) \in \lambda f(x, u(x), \text{ grad } u(x)) \end{cases}$$

D'où : $\gamma \|u\|_{H^1}^2 \leq \int (\text{grad } u)^2 = -\int u \Delta u \leq \alpha + \beta \|u\|_{H^1}$ d'après l'hypothèse (9).
D'où $\|u\|_{H^1} \leq C$ d'après la définition de C.

Remarque 5.7 : On peut remplacer Δ par n'importe quel autre isomorphisme linéaire continu $A : H^2(\Omega) \cap H_o^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ tel que $-(Au,u) \geq k\|u\|_{H^1}^2$.
Plus généralement si l'on revient au corollaire 5.4, on voit que l'exemple choisi est très particulier : nous avons surtout cherché à montrer la méthode. Nous avons appliqué le théorème de Schaefer, théorème que l'on peut démontrer directement à partir du théorème de Kakutani-Fan sans utiliser la théorie du degré. La proposition 5.6 peut aussi être démontrée à l'aide du théorème 5.1 et des résultats de Schatzman [26].

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. Berge : Espaces topologiques, fonctions **multivoques** . Paris, Dunod, I966.

[2] M. et M. Berger : Perspectives in non Linearity. New York. W.A. Benjamin, Inc. 1968.

[3] A. Cellina et Lasota: Accad.Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 47(1969) pp 434-440.

[4] J. Cronin : Fixed points and topological degree in nonlinear analysis Mathematical surveys Number II; American Mathematical Society, Providence, Rhode Island 1964.

[5] J. Dugundji : Pacific Journal of Math.1(1951) pp.353-36

[6] H.G. Eggleston : Convexity. Cambridge University Press 1963.

[7] S. Eilenberg et Montgomery : Amer. Journ. of Math., 58. (1946) 214-222

[8] K. Fan : A minimax inequality and Applications, Inequalities III Oved Shisha ed. 1972.

[9] A.Granas : Bull. Acad. Polon. Sci.,8(I959), 191-194.

[10] L.Danzer, B.Grunbaum, V. Klee : Helly's theorem and its relatives, Proceedings of symposia in pure Mathematics Volume VII A.M.S. Providence Rhode Island 1963.

[11] M.Hukuhara : Funkciaj Ekvacioj, 10 (1967),43-66.

[12] J.W. Jaworowski : Bull. Acad. Polon. Sci., 4 (1959) , 187-192.

[13] T.W. Ma, : Dissertationes Math.,92 (1972), 1-43.

[14] E. Michael : A survey of continuous selections, Lectures notes in Math. 171 Springer-Verlag 1970.

[15] W.V. Petryshyn et P.M. Fitzpatrick : Trans. Amer. Math. Soc. 194 (1974) 1-25.

[16] R.T. Rockafellar : Convex Analysis , Princeton University Press 1970 .

[17] M.Rogalski : Bull. Sc. Math de France 2ème série, 96, (1972) 83-87

[18] J.T. Schwartz : Non linear Functional Analysis, Gordon and Breach 1969.

[19] F. Terkelsen : Proc. Amer. Math. Soc. 42 (1974) 643-644.

[20] T. Van Der Walt : Fixed and almost fixed points, Mathematical Centre Tracts, Amsterdam 1967.

[21] J.R.L. Webb : Bolletino U.M.I., (4), 9, (1974) 137-158.

[22] M.J. Powers : Thesis, Indiana University 1968.

[23] J.W. Jaworowski : Lectures notes in mathematics 171 , Springer Verlag 1970.

[24] E. Michael : Trans. Amer. Math. Soc., 71 (1951) 152-182.

[25] M. Valadier : Contribution à l'analyse convexe . Thèse , Paris, 1970.

[26] M. Schatzman : Annali Sc. Normale Sup. Pisa , Vol XXVII, fasc. IV , 1973.

[27] M.A. Krasnoselskii : Topological Methods in the theory of non linear integral Equations, Macmillan, New-York 1965.

[28] J.M. Lasry et R. Robert : Cahiers Mathématiques de la Décision Université Paris IX - Dauphine (à paraître) .