Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

P. Bolley
J. Camus
B. Helffer

Sur une classe d'opérateurs partiellement hypoelliptiques

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1974-1975), exp. nº 13, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1974-1975____A12_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHEMATIQUES

17, rue Descartes

75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - L I O N S - S C H W A R T Z

1 9 7 4 - 1 9 7 5

SUR UNE CLASSE D'OPERATEURS PARTIELLEMENT HYPOELLIPTIQUES

par P. BOLLEY, J. CAMUS, B. HELFFER

Exposé n° XIII

26 Février 1975

§ 1. INTRODUCTION

On considère l'opérateur L défini dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n = \{(t,x); t\in\mathbb{R}, x\in\mathbb{R}^n\}$ par $L = L(t;D_t,D_x) = \sum_{\substack{j+|\alpha|\leq m\\ k\in\mathbb{N}}} a_{kj\alpha}\, t^k D_t^j D_x^\alpha$ où $a_{kj\alpha}\in\mathbb{C}$. On suppose que L est elliptique pour $t\neq 0$ et que son symbole a une propriété de quasi-homogénéité de la forme suivante : il existe $\delta\geq 0$ et $\sigma\in\mathbb{Z}$ tels que pour tous $\lambda>0$, $\tau\in\mathbb{R}$, $\xi\in\mathbb{R}^n$ on ait :

$$L(\frac{t}{\lambda};\lambda\tau,\lambda^\delta\xi) = \lambda^{-\sigma}L(t;\tau,\xi).$$

Autrement dit L est du type suivant :

$$L(t;D_t,D_x) = \sum_{\substack{j+|\alpha|\leq m\\ \sigma+\delta|\alpha|+j\in\mathbb{N}}} a_{j\alpha}\, t^{\sigma+\delta|\alpha|+j} D_t^j D_x^\alpha$$

et l'hypothèse d'ellipticité impose que $\sigma+m$ et $\sigma+\delta m$ soient dans $\mathbb{N}$.

Le cas où la variété $t=0$ est non caractéristique, i. e. quand $\sigma=-m$, a été traité dans [6] ; on montre que l'étude de l'hypoellipticité de cet opérateur L se ramène à l'étude du noyau dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ d'opérateurs différentiels à une variable ; plus précisément l'opérateur L est hypoelliptique si et seulement si, pour tout $\xi\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, l'équation: $L(t;D_t,\xi)v(t) = 0$, n' a que la solution triviale dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

On se propose d'étudier, toujours du point de vue de l'hypoellipticité, l'opérateur L dans le cas où la variété $t=0$ est caractéristique, i.e. quand $\sigma>-m$. On commence par donner deux résultats négatifs :

- quand $\delta>0$, l'opérateur L est du type de Fuchs au sens de [1] ; or il a été montré dans [8] que les opérateurs du type de Fuchs ne sont pas hypoelliptiques lorsque la variété $t=0$ est caractéristique. C'est le cas pour L dès que $\sigma>-m$.
- quand $\delta=0$, l'opérateur L n'est plus du type de Fuchs mais il n'est pas non plus hypoelliptique (de façon précise, pour $\ell\in\mathbb{N}$, on peut construire un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, une fonction $u(t,x)\in C^\ell(\mathbb{R}\times\Omega)$, telle que

$u \notin C^{\ell+1}(\mathbb{R}\times\Omega)$ et $Lu \in C^{\infty}(\mathbb{R}\times\Omega)$; la fonction u est cherchée du type : $u(t,x) = Y(t)\,t^{\ell+1}\varphi(x)$. la fonction φ étant construite en résolvant un problème de Cauchy en x).

On pose le problème de l'hypoellipticité partielle de L, c'est à dire l'hypoellipticité à partir d'un espace de distributions qui sont C^{∞} dans la direction t. On montre :

- quand $\delta > 0$, que l'étude de l'hypoellipticité partielle de L se ramène à l'étude du noyau dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ d'opérateurs différentiels ordinaires (comme dans le cas où la variété $t = 0$ est non caractéristique) ; plus précisément L est partiellement hypoelliptique si et seulement si pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ l'équation $L(t;D_t,\xi)\,(t) = 0$ n'a que la solution triviale dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.
- quand $\delta = 0$, que l'opérateur L est toujours partiellement hypoelliptique.

Pour fixer les idées, on donne tout de suite quelques exemples :

- l'opérateur $t\,D_t^2 + t\,D_x^2 + \lambda D_x + \mu D_t$ (correspondant à $m = 2$, $\sigma = -1$, $\delta = 1$) est partiellement hypoelliptique dans $\mathbb{R}^2$
- l'opérateur $D_t^2 + t^2 D_x^2 + \lambda D_x$ (correspondant à $m = 2$, $\sigma = -2$, $\delta = 2$) est partiellement hypoelliptique dans $\mathbb{R}^2$ (et donc hypoelliptique dans $\mathbb{R}^2$, car la variété $t = 0$ n'est pas caractéristique.) pour $\lambda \neq \pm(2n+1)$, $n \in \mathbb{N}$. (cf. [6]).
- l'opérateur $t\,D_t^2 + i\,D_x^2 + \lambda\,D_t$ (correspondant à $m = 2$, $\sigma = -1$, $\delta = \frac{1}{2}$) est partiellement hypoelliptique dans $\mathbb{R}^2$.
- L'opérateur $t^2 D_t^2 + D_x^2$ (correspondant à $m=1$, $\sigma=0$, $\delta=0$) est partiellement hypoelliptique dans $\mathbb{R}^2$.

Pour les démonstrations complètes de ce qui suit et pour des compléments, on renvoie à [3], [4].

§ 2. ETUDE DU CAS $\delta > 0$

2.1 Enoncé des résultats

Plus généralement on considère les opérateurs définis sur I × (où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0 et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$) par

$$L = \sum_{j+|\alpha|\leq m} a_{j\alpha}(t,x)\, t^{[\sigma+\delta|\alpha|+j]} D_t^j D_x^\alpha$$

où $t \in I$, $x = (x_1,\dots,x_n) \in \Omega$, $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$,

$D_x^\alpha = i^{-|\alpha|} \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $D_t = i^{-1} \dfrac{\partial}{\partial t}$, $m \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$, $\sigma \in \mathbb{Z}$ tels que

$\sigma + m \in \mathbb{N}$ et $\sigma + \delta m \in \mathbb{N}$, $\lceil \sigma + \delta|\alpha| + j \rceil$ désigne le plus petit entier de $\mathbb{N}$ supérieur ou égal à $\sigma + \delta|\alpha| + j$.

On suppose que les coefficients $a_{j\alpha}$ appartiennent à $C^\infty(\overline{I \times \Omega})$.

On introduit les conditions suivantes :

<u>Condition 1</u> : L est elliptique pour $t \neq 0$ dans $I \times \Omega$, i.e. pour tout $(t,x) \in I \times \Omega$, $t \neq 0$ et pour tout $(\tau,\xi) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ on a :

$$\sum_{j+|\alpha|=m} a_{j\alpha}(t,x)\, t^{\lceil \sigma+\delta|\alpha|+j \rceil} \tau^j \xi^\alpha \neq 0 \ .$$

On introduit une partie principale L^o de L définie par

$$L^o = L^o(x;D_t,D_x) = \sum_{\substack{j+|\alpha|\leq m \\ \sigma+\delta|\alpha|+j \in \mathbb{N}}} a_{j\alpha}(0,x)\, t^{\sigma+\delta|\alpha|+j} D_t^j D_x^\alpha \ .$$

<u>Condition 2</u> : L^o est elliptique pour $t \neq 0$ dans $I \times \Omega$ i.e. pour tout $(t,x) \in I \times \Omega$, $t \neq 0$ et pour tout $(\tau,\xi) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ on a :

$$\sum_{\substack{j+|\alpha|=m \\ \sigma+\delta|\alpha|+j \in \mathbb{N}}} a_{j\alpha}(0,x)\, t^{\sigma+\delta|\alpha|+j} \tau^j \xi^\alpha \neq 0 \ .$$

(notons que la condition 2 entraîne la condition 1 dans un voisinage de $t = 0$, éventuellement plus petit que $I \times \Omega$).

<u>Condition 3</u> : Pour tout $\omega \in \mathbb{R}^n$, $|\omega| = 1$, et pour tout $x \in \Omega$, l'équation $L^o(x;D_t,\omega)\, v(t) = 0$ n'a que la solution $v = 0$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

On a alors :

<u>Théorème 1</u> : Si l'opérateur L vérifie les conditions 1,2,3 il est partiellement hypoelliptique dans $I \times \Omega$, i.e. : pour tous ouverts $I' \subset I$ et $\Omega' \subset \Omega$, pour tout $u \in C^\infty(I; \mathcal{D}'(\Omega))$ tel que $Lu \in C^\infty(I' \times \Omega')$ alors $u \in C^\infty(I' \times \Omega')$.

Lorsque les coefficients $a_{j\alpha}$ de la partie principale L^o sont constants, on a le résultat plus précis suivant :

<u>Théorème 2</u> : Si les coefficients de L^o sont constants et si la condition 2 est vérifiée, alors L^o est partiellement hypoelliptique dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ si et seulement si la condition 3 est satisfaite.

<u>Remarque</u> : On peut préciser le théorème 1.1 en utilisant la régularité normale des opérateurs de Fuchs donnée dans [1] ; il suffit en fait de supposer que $u \in C^k(I;\mathcal{D}'(\Omega))$ où l'entier k dépend de l'équation indicielle de l'opérateur L en $t = 0$.

Il se peut que les conditions précédentes ne soient vérifiées que pour $t > 0$. Plus précisément on considère les conditions suivantes :

<u>Condition 1'</u> : L'opérateur L est elliptique pour $t > 0$ dans $I \times \Omega$.

<u>Condition 2'</u> : L'opérateur L^o est elliptique pour $t > 0$ dans $I \times \Omega$.

<u>Condition 3'</u> : Pour tout $\omega \in \mathbb{R}^n$, $|\omega| = 1$ et tout $x \in \Omega$, l'équation $L^o(x,D_t,\omega)\, v(t) = 0$ n'a que la solution $v = 0$ dans $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

On a alors :

<u>Théorème 1'</u> : Si l'opérateur L vérifie les conditions 1', 2' et 3', il est partiellement hypoelliptique dans $I_+ \times \Omega$ où $I_+ = \{t \in I;\ t \geq 0\}$, i.e. pour tout sous intervalle I' de I_+ et tout ouvert $\Omega' \subset \Omega$, pour tout $u \in C^\infty(I_+;\mathcal{D}'(\Omega))$ tel que $Lu \in C^\infty(I' \times \Omega')$, alors $u \in C^\infty(I' \times \Omega')$.

<u>Remarque</u> : Lorsque la variété $t = 0$ est non caractéristique i.e. $\sigma = -m$ on peut remplacer hypoellipticité partielle par hypoellipticité. On retrouve les résultats de [6] pour $\delta > 1$ et on retrouve les opérateurs elliptiques pour $\delta = 1$.

L'étude de l'hypoellipticité partielle est abordée par deux méthodes :

- une méthode basée sur les quotients différentiels à partir d'une estimation a priori,

- une méthode basée sur la construction d'une paramétrix partielle en x.

Les deux méthodes nécessitent une étude préalable des opérateurs en la seule variable t, associés à l'opérateur L^o, qui interviennent dans les conditions 3 et 3'.

2.2 Etude d'opérateurs différentiels à une variable

Soit l'opérateur différentiel ordinaire L défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$L \equiv L(t,D_t) \equiv \sum_{\substack{k+j\leq m \\ \sigma+\delta k+j\in\mathbb{N}}} a_{jk}\, t^{\sigma+\delta k+j} D_t^j$$

où $D_t = \frac{1}{i}\frac{d}{dt}$, $m\in\mathbb{N}$, $\delta>0$, $\sigma\in\mathbb{Z}$, $a_{jk}\in\mathbb{C}$, $k\in\mathbb{N}$, $j\in\mathbb{N}$.

On introduit la condition

(H) : pour tout $t\neq 0$ et pour tout $\tau\in\mathbb{R}$ on a : $\displaystyle\sum_{\substack{k+j=m \\ \sigma+\delta k+j\in\mathbb{N}}} a_{jk}\, t^{\sigma+\delta k+j}\, \tau^j \neq 0$

Cette condition est équivalente à dire que les polynômes

$$P^+(\tau) = \sum_{\substack{k+j=m \\ \sigma+\delta k+j\in\mathbb{N}}} a_{jk}\,\tau^j \quad \text{et} \quad P^-(\tau) = \sum_{\substack{k+j=m \\ \sigma+\delta k+j\in\mathbb{N}}} a_{jk}(-1)^{\delta j}\,\tau^j$$

ne s'annulent pas sur $\mathbb{R}$. On note m_+ (resp. m_-) le nombre de zéros τ de $P^+(\tau)$ (resp. $P^-(\tau)$) tels que $\operatorname{Im}\tau>0$ (resp. <0).

Soit $F(\lambda) = 0$, l'équation indicielle de l'opérateur L en $t=0$ i.e. : $\displaystyle F(\lambda) = \sum_{\substack{0\leq j\leq m \\ \sigma+j\in\mathbb{N}}} a_{jo}(-i)^j\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-j+1)$.

On note r_p le nombre de racines de $F(\lambda) = 0$ telles que $\operatorname{Re}\lambda > p-\sigma-\frac{1}{2}$. Pour $p\in\mathbb{N}$, on désigne par $W^p(\mathbb{R})$, l'espace de Sobolev avec poids :

$$W^p(\mathbb{R}) = \{u\in H^{-\sigma}(\mathbb{R}),\ t^{\sigma+\delta k+j}D_t^{j+h}u\in L^2(\mathbb{R}),\ 0\leq h\leq p,\ k+j\leq m,\ \sigma+\delta k+j\in\mathbb{N}\}\ .$$

On a alors le résultat suivant :

Théorème 3 : Si la condition H est vérifiée et si l'équation $F(\lambda) = 0$ n'a pas de racine sur la droite $\mathrm{Re}\,\lambda = p - \sigma - \frac{1}{2}$, alors l'opérateur L est un opérateur à indice de $W^p(\mathbb{R})$ dans $H^p(\mathbb{R})$, d'indice : $m_+ + m_- + \sigma - 2(m-r_p + \min(\sigma,p))$.

Lorsque δ est un entier, l'expression de l'indice se simplifie.

Lorsque p est assez grand, l'indice est constant et on a : $\mathrm{Ker}\, L \cap W^p(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}\, L \cap \mathcal{S}(\mathbb{R})$ où $\mathrm{Ker}\, L = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}), Lu = 0\}$.

En particulier pour $\delta = 1$ et pour p assez grand, $\mathrm{Ker}\, L \cap W^p(\mathbb{R}) = \{0\}$ de sorte que $\mathrm{Ker}\, L \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{0\}$. Il en est bien sûr tout autrement dans le cas général.

Sur $\mathbb{R}_+$ on a des résultats du même type. On introduit la condition :

(H') : pour tout $t > 0$ et pour tout $\tau \in \mathbb{R}$ on a : $\sum\limits_{\substack{k+j=m \\ \sigma+\delta k+j \in \mathbb{N}}} a_{jk}\, t^{\sigma+\delta k+j}\tau \neq 0$.

On a alors :

Théorème 3' : Si la condition (H') est vérifiée et si l'équation $F(\lambda) = 0$ n'a pas de racine sur la droite $\mathrm{Re}\,\lambda = p - \sigma - \frac{1}{2}$, alors l'opérateur L est un opérateur à indice de $W^p(\mathbb{R}_+)$ dans $H^p(\mathbb{R}_+)$, d'indice $m_+ - m + r_p - \min(\sigma,p)$.

Lorsque p est assez grand l'indice est constant et $\mathrm{Ker}_+ L \cap W^p(\mathbb{R}_+) = \mathrm{Ker}_+ L \cap \mathcal{S}(\bar{\mathbb{R}}_+)$ où $\mathrm{Ker}_+ L = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+), Lu = 0\}$.

Pour démontrer ces résultats, on fait une étude au voisinage de chaque point singulier de l'opérateur L, à savoir $t = 0$ et $t = \infty$, et on regroupe les différents résultats grâce à des théorèmes généraux d'indic

2.3 Esquisse de la démonstration des théorèmes 1 et 1'

On se limite à la démonstration du théorème 1 ; la démonstration du théorème étant analogue.

On applique le théorème 3 à l'opérateur $L^o(x,D_t,\omega)$ pour $\omega \in \mathbb{R}^n$, $|\omega| = 1$: il existe un entier p_o tel que, pour tout entier $p \geq p_o$, pour tout $\omega \in \mathbb{R}^n$, $|\omega| = 1$, pour tout $x \in \Omega$ (qu'on peut supposer relativement compact), l'opérateur $L^o(x,D_t,\omega)$ est un isomorphisme de $W^p(\mathbb{R})$ sur un sous-espace fermé de $H^p(\mathbb{R})$. Par suite il existe une constante $C_p > 0$ telle que, pour tout $\omega \in \mathbb{R}^n$, $|\omega| = 1$, pour tout $x \in \Omega$ et pour tout $v(s) \in W^p(\mathbb{R})$, on ait :

$$\sum_{0\leq h\leq p} \sum_{\substack{j+k\leq m \\ \sigma+\delta k+j\in\mathbb{N}}} \|s^{\sigma+\delta k+j} D_s^j v\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C_p \sum_{0\leq h\leq p} \|D_s^h(L^o(x;D_s,\omega)v(s))\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

Pour $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $u(t) \in W^p(\mathbb{R})$, on pose $s = t|\xi|^{1/\delta}$ et $v(s) = u(t)$. Il en résulte, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, $|\xi| \geq 1$, l'inégalité :

$$\sum_{0\leq h\leq p} \sum_{\substack{j+k\leq m \\ \sigma+\delta k+j\in\mathbb{N}}} (1+|\xi|^2)^{k+\frac{p-h}{\delta}} \|t^{\sigma+\delta k+j} D_t^{j+h} u\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq$$

$$C_p \sum_{0\leq h\leq p} (1+|\xi|^2)^{\frac{p-h}{\delta}} \|D_t^h(L^o(x,D_t,\omega)u(t))\|^2_{L^2(\mathbb{R})} .$$

A partir de cette estimation pour la partie principale L^o, on termine par deux méthodes :

- <u>1ère méthode</u> : <u>les quotients différentiels</u>

Par des arguments de perturbation et de compacité on déduit de l'inégalité précédente l'estimation a priori suivante :
pour tout $x_o \in \Omega$, pour tout entier $p \geq p_o$ il existe une constante $\varepsilon_p > 0$ et pour tout $q \in \mathbb{R}$, il existe une constante $C_{pq} > 0$, tels que, si $u \in W^{p,q}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ avec $\operatorname{supp} u \subset \{(t,x) \in I\times\Omega,\ |t| + |x-x_o| < \varepsilon_p\}$, on ait :

$$\|u\|_{W^{p,q}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)} \leq C_{pq}\left\{\sum_{0\leq h\leq p} \|D_t^h(Lu)\|_{L^2(\mathbb{R};H^{\frac{p-h}{\delta}+q}(\mathbb{R}^n))} + \|u\|_{W^{p,q-1}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)}\right\}$$

où

$$W^{p,q}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)\ ;\ t^{\sigma+\delta k+j}D_t^{j+h} u \in L^2(\mathbb{R};H^{\frac{p-h}{\delta}+k+q}(\mathbb{R}^n))$$
$$\sigma+\delta k+j \in \mathbb{N},\ k+j \leq m,\ 0 \leq h \leq p\}$$

De cette estimation a priori on déduit par une méthode de quotients différentiels en x, le résultat de régularité suivant : si $u \in W^{p,q}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ avec supp u $\subset \{(t,x) \in I\times\Omega,\ |t| + |x-x_o| < \varepsilon_p\}$ et si $D_t^h(Lu) \in L^2(\mathbb{R}; H^{\frac{p-h}{\delta}+q}(\mathbb{R}^n))$ pour $0 \leq h \leq p$ alors $u \in W^{p,q+1}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$.

On peut alors démontrer le résultat d'hypoellipticité partielle : soit donc $u \in C^\infty(I; \mathcal{D}'(\Omega))$ tel que $Lu \in C^\infty(I'\times\Omega')$ et soit à montrer que u est indéfiniment dérivable au point $(t_o,x_o) \in I'\times\Omega'$.

Si $t_o \neq 0$, le résultat est classique puisque l'opérateur L est elliptique en tout point (t,x) pour lequel $t \neq 0$.

Si $t_o = 0$, soit $\phi \in C_o^\infty(I'\times\Omega')$ et égale à 1 au voisinage de $(0,x_o)$.

D'après la structure locale des distributions de $C^\infty(I;\mathcal{D}'(\Omega))$, pour tout entier p, il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que $\phi u \in W^{p,q}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$. Pour $p \geq p_o$ on peut appliquer le résultat de régularité précédent : il s'en suit que $\phi u \in W^{p,q+1}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$. Itérant le procédé on gagne la régularité maximum en x et ceci pour chaque $p \geq p_o$. D'où l'on déduit que u est indéfiniment dérivable en $(0,x_o)$.

- <u>2ème méthode</u> : <u>construction d'une paramétrix partielle</u>

On utilise la technique des opérateurs pseudo-différentiels à valeurs vectorielles ([7], [9], [10]) avec comme dans [9] "des normes dépendant de ξ".

On note $H^{p,\xi}(\mathbb{R})$ l'espace $H^p(\mathbb{R})$ muni de la norme suivante dépendant du paramètre $\xi \in \mathbb{R}^n$:

$$\|u\|^2_{H^{p,\xi}(\mathbb{R})} = \sum_{0\leq h\leq p} (1+|\xi|^2)^{\frac{p-h}{\delta}} \|D_t^h u\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$$

et de même on note $W^{p,\xi}(\mathbb{R})$ l'espace $W^p(\mathbb{R})$ muni de la norme :

$$\|u\|^2_{W^{p,q}(\mathbb{R})} = \sum_{\substack{k+j\leq m\\ h+\ell\leq p}} (1+|\xi|^2)^{\frac{1}{\delta}((\sigma+\delta k+j-\ell)^+ - j-h-\sigma+p)} \|t^{(\sigma+\delta k+j-\ell)^+} D_t^{j+h} u\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$$

(où pour $A \in \mathbb{R}$ on note $A^+ = \sup(A,0)$).

On définit l'espace des symboles $S^0(\Omega \times \mathbb{R}^n; W^{p,\xi}(\mathbb{R}), H^{p,\xi}(\mathbb{R}))$ comme l'espace des fonctions $p(x,\xi)$ C^∞ à valeurs dans $\mathcal{L}(W^{p,\xi}(\mathbb{R}), H^{p,\xi}(\mathbb{R}))$ telles que, pour tout compact $K \subset \Omega$, pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$, il existe une constante $C_{K\alpha\beta} > 0$ telle que pour tout $x \in K$, tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ on ait :

$$\| D_x^\beta D_\xi^\alpha p(x,\xi) \|_{\mathcal{L}(W^{p,\xi}(\mathbb{R})), H^{p,\xi}(\mathbb{R}))} \leq C_{K\alpha\beta} (1+|\xi|)^{-|\alpha|} .$$

Pour p grand, l'opérateur L, convenablement modifié en dehors de $t = 0$, qu'on note alors $L^{\varepsilon}p(x,t,D_t,D_x)$, peut être considéré comme un opérateur pseudo-différentiel dont le symbole $L^{\varepsilon}p(x,t,D_t,\xi)$ appartient à $S^0(\Omega \times \mathbb{R}^n; W^{p,\xi}(\mathbb{R}), H^{p,\xi}(\mathbb{R}))$ et pour lequel on construira une paramétrix dont le symbole appartient à $S^0(\Omega \times \mathbb{R}^n; H^{p,\xi}(\mathbb{R}), W^{p,\xi}(\mathbb{R}))$.

Par des arguments de perturbation on déduit de l'estimation obtenue pour $L^0(x,D_t,\xi)$ que :

pour tout entier $p \geq p_0$, il existe une constante $\varepsilon_p > 0$, il existe une constante $A > 0$, il existe une constante $C_p > 0$, telles que, pour tout $x \in \Omega$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, $|\xi| \geq A$ et pour tout $u \in W^p(\mathbb{R})$, on ait :

$$\|u\|_{W^{p,\xi}(\mathbb{R})} \leq C_p \| L^{\varepsilon}p(x,t,D_t,\xi) u\|_{H^{p,\xi}(\mathbb{R})}$$

L'entier p étant fixé, on pose pour simplifier $L(x,\xi) = L^{\varepsilon}p(x,t,D_t,\xi)$. On considère l'opérateur adjoint $L^*(x,\xi)$ défini par : pour tout $u \in H^{p,\xi}(\mathbb{R})$ et $v \in W^{p,\xi}(\mathbb{R})$:

$$(L^*(x,\xi)u, v)_{W^{p,\xi}(\mathbb{R})} = (u, L(x,\xi)v)_{H^{p,\xi}(\mathbb{R})}$$

Alors $L^*(x,\xi) \circ L(x,\xi)$ appartient à $S^0(\Omega \times \mathbb{R}^n; W^{p,\xi}(\mathbb{R}), W^{p,\xi}(\mathbb{R}))$ et est un isomorphisme de $W^{p,\xi}(\mathbb{R})$ sur $W^{p,\xi}(\mathbb{R})$ pour $|\xi| \geq A$ et on a :

il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \in \Omega$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ avec $|\xi| \geq A$ et pour tout $u \in W^{p,\xi}(\mathbb{R})$ on ait :

$$\|u\|_{W^{p,\xi}(\mathbb{R})} \leq C \|L^*(x,\xi) \circ L(x,\xi) u\|_{W^{p,\xi}(\mathbb{R})} .$$

On peut donc construire un inverse $R(x,\xi)$ tel que pour $|\xi| \geq A$

$$\begin{cases} R(x,\xi)\circ L^*(x,\xi)\circ L(x,\xi) = L^*(x,\xi)\circ L(x,\xi)\circ R(x,\xi) = I \\ \|R(x,\xi)u\|_{W^{p,\xi}(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{W^{p,\xi}(\mathbb{R})} \end{cases}$$

Alors $R(x,\xi)$ convenablement modifié pour $|\xi| < A$ est un symbole appartenant à $S^o(\Omega\times\mathbb{R}^n, W^{p,\xi}(\mathbb{R}), W^{p,\xi}(\mathbb{R}))$. Il existe alors un opérateur pseudo-différentiel $R^p(x,D)$ dont le symbole $R^p(x,\xi)$ est dans $S^o(\Omega\times\mathbb{R}^n; H^{p,\xi}(\mathbb{R}), W^{p,\xi}(\mathbb{R}))$, admettant $R(x,\xi)\circ L^*(x,\xi)$ comme symbole principal et tel que :

$$R^p(x,D)\circ L^{\varepsilon}{}^p(x,t,D_t,D_x) = I + S^p(x,D) \ .$$

$R^p(x,D)$ est un opérateur continu de $H^s_{comp}(\Omega,H^{p,\xi}(\mathbb{R}))$ dans $H^s_{loc}(\Omega,W^{p,\xi}(\mathbb{R}))$ pour tout $s\in\mathbb{R}$ et $S^p(x,D)$ est continu de $H^s_{comp}(\Omega,W^{p,\xi}(\mathbb{R}))$ dans $H^t_{loc}(\Omega,W^{p,\xi}(\mathbb{R}))$ pour tous s et $t\in\mathbb{R}$.

Une telle paramétrix (qui dépend de p) permet de démontrer le résultat d'hypoellipticité partielle.

2.4 Exemples d'étude des conditions 3 et 3'

On se limite à l'étude d'opérateurs d'ordre $m=2$ (des méthodes données ci-après pouvant être appliquées à m quelconque). On se propose donc d'étudier le noyau dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ des opérateurs L à une variable de la forme :

$$\begin{aligned} Lu(t) = {} & t^{\sigma+2}D_t^2u + a_{10}t^{\sigma+1}D_tu + a_{oo}t^{\sigma}u + a_{11}t^{\sigma+\delta+1}D_tu \\ & + a_{o1}t^{\sigma+2}u + a_{o2}t^{\sigma+2\delta}u \end{aligned}$$

où $\sigma\in\mathbb{Z}$ avec $\sigma\geq -2$, $\delta>0$ avec $\sigma+2\delta\in\mathbb{N}$, $a_{ij}\in\mathbb{C}$ avec $a_{ji}=0$ si $\sigma+\delta i+j\notin\mathbb{N}$.

On suppose que le polynôme $\tau^2+a_{11}\tau+a_{o2}$ admet deux racines τ_+ et τ_- avec $\mathrm{Im}\,\tau_+>0$ et $\mathrm{Im}\,\tau_-<0$.

On commence par traiter le cas $\delta=1$ qui joue un rôle particulier.

- Cas où $\delta = 1$

D'une manière générale $\mathrm{Ker}\, L \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{0\}$ (comme il résulte du calcul de l'indice. Cf. Théorème 3) i.e. la condition 3 est toujours satisfaite. Par contre la condition 3' n'est pas toujours satisfaite. Plus précisément, si $\sigma = -1$: $\mathrm{Ker}_+ L \cap \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+) = \{0\}$, si et seulement si, pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, on a : $a_{10}\tau_+ + a_{00} \neq ip(\tau_+ - \tau_-)$. (cf. [2])

Ainsi par exemple l'opérateur $t(D_t^2 + D_x^2) + \lambda D_t + \mu D_x$ est partiellement hypoelliptique dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ quels que soient λ et $\mu \in \mathbb{C}$ et est partiellement hypoelliptique dans $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}$, si et seulement si, pour tout entier $p \geq 0$, on a $\mu \neq \pm (2p + i\lambda)$.

- Cas où $\delta \neq 1$

Une méthode générale consiste à trouver une décomposition du noyau de l'opérateur L dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ puis par un changement de variable, à se ramener au cas précédent. Signalons qu'une telle décomposition a déjà été utilisée dans [5].

On n'examine que deux cas particuliers $\delta = \frac{1}{2}$ et $\delta = 2$ (remarquons que δ est soit un entier > 0, soit de la forme $\frac{2k+1}{2}$ avec $k \in \mathbb{N}$).

D'une manière générale pour $\delta = \frac{1}{2}$, $\mathrm{Ker}\, L \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{0\}$ et $\mathrm{Ker}_+ L \cap \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+) = \{0\}$ i.e. que les conditions 3 et 3' sont toujours satisfaites. En effet on effectue le changement de variable $s \to t = s^2 : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ et on pose $u(t) = v(s)$. Si $u(t) \in \mathrm{Ker}_+ L \cap \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ alors $v(s) \in \mathrm{Ker}\, \mathcal{L} \cap \mathcal{S}(\mathbb{R})$ avec

$$\mathcal{L}v(s) \equiv s^2\left(\frac{1}{4}D_s^2 + a_{02}\right)v + s\left(\frac{i}{4} + \frac{a_{10}}{2}\right)D_s v + a_{00}v$$

Comme $\mathcal{L}$ est un opérateur pour lequel $\delta = 1$ on en déduit que $v \equiv 0$ donc $u \equiv 0$; ainsi $\mathrm{Ker}_+ L \cap \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+) = \{0\}$. De là on en déduit que $\mathrm{Ker}\, L \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{0\}$ car si $u \in \mathrm{Ker}\, L \cap \mathcal{S}(\mathbb{R})$ alors u est analytique sur $\mathbb{R}$ et $u_{|\mathbb{R}_+} \in \mathrm{Ker}_+ L \cap \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+)$

Ainsi par exemple l'opérateur $tD_t^2 + D_x^2 + \lambda D_t$ est partiellement hypoelliptique dans $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}$ quel que soit $\lambda \in \mathbb{C}$; de même l'opérateur $tD_t^2 + tD_xD_t + iD_x^2 + \lambda D_t$ est partiellement hypoelliptique dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ et dans $\overline{\mathbb{R}}_- \times \mathbb{R}$ quel que soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

Pour $\underline{\delta = 2}$, la situation est tout à fait différente. On note $F(\lambda)$ l'équation indicielle de L en $t=0$, i.e. $F(\lambda) = -\lambda(\lambda - 1) - ia_{10}\lambda + a_{oo} = 0$. Soit $u(t) \in \operatorname{Ker} L \cap \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors u est analytique ; soit $u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n$. On a les relations :

$$\begin{cases} F(0)u_o = F(1)u_1 = 0 \\ F(2)u_2 + a_{01}u_o = F(3)u_3 + (-ia_{11} + a_{01})u_1 = 0 \\ F(n)u_n + (-ia_{11}(n-2) + a_{01})u_{n-2} + a_{02}u_{n-4} = 0 \quad \text{pour } n \geq 4 \end{cases}$$

ainsi : i) si $F(\lambda) = 0$ n'a pas de racine entière, $\operatorname{Ker} L \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{0\}$

ii) si $F(\lambda) = 0$ a une seule racine entière $m \geq 0$ ou bien deux racines entières ≥ 0 de même parité, m étant la plus petite, $\operatorname{Ker} L \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{0\}$ si et seulement si pour tout entier $p \in \mathbb{N}$ on a : $(a_{10} - i(2m+1))\tau_+ + a_{01} - im\,a_{11} \neq 2ip(\tau_+ - \tau_-)$.

En effet, si $u \in \operatorname{Ker} L \cap \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors $u(t) = t^m v(t^2)$ où v est une fonction analytique. On effectue le changement de variable $t \to s = t^2 : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, alors $v(s) \in \operatorname{Ker}_+ \mathcal{L} \cap \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ avec

$$\mathcal{L}v(s) = s(4D_s^2 + 2a_{11}D_s + a_{02})v + (2a_{10} - 2i - 4im)D_s v + (a_{01} - im\,a_{11})v$$

Comme $\mathcal{L}$ est un opérateur pour lequel $\delta = 1$ et $\sigma = -1$ on applique la condition nécessaire et suffisante donnée précédemment.

iii) si $F(\lambda) = 0$ a deux racines entières m_1 et $m_2 \geq 0$ de parités différentes $\operatorname{Ker} L \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{0\}$ si et seulement si pour tout entier $p \in \mathbb{N}$ et $j = 1,2$, on a : $(a_{10} - i(2m_j + 1))\tau_+ + a_{01} - im_j a_{11} \neq 2ip(\tau_+ - \tau_-)$.

En effet si $u \in \operatorname{Ker} L \cap \mathcal{S}(\mathbb{R})$ alors $u(t) = t^{m_1}v(t^2) + t^{m_2}w(t^2)$ où v et w sont analytiques. Comme $u(-t) \in \operatorname{Ker} L \cap \mathcal{S}(\mathbb{R})$ alors $t^{m_1}v(t^2)$ et $t^{m_2}w(t^2) \in \operatorname{Ker} L \cap \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et on termine comme en (ii).

On étudierait de façon analogue $\operatorname{Ker}_+ L \cap \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+)$. Ainsi par exemple l'opérateur $tD_t^2 + t^3D_x^2 + \lambda D_t + \mu t D_x$, lorsque $1 - i\lambda$ n'est pas un entier impair, est partiellement hypoelliptique dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ou dans $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}$ si et seulement si, pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, on a : $\mu \neq \pm(i\lambda + 4p - 1)$.

§ 3. ETUDE DU CAS $\delta = 0$

3.1 Enoncé des résultats

On considère les opérateurs définis sur $I \times \Omega$ par :

$$L = \sum_{j+|\alpha| \leq m} a_{j\alpha}(t,x)\, t^{\sigma+j} D_t^j D_x^\alpha$$

Les notations sont celles utilisées en II (ici $\sigma \in \mathbb{N}$).

On introduit la condition :

Condition 1 : Pour tout $(t,x) \in I \times \Omega$ et pour tout $(\tau,\xi) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ on a :

$$\sum_{j+|\alpha| = m} a_{j\alpha}(t,x)\, \tau^j \xi^\alpha \neq 0$$

(cette condition 1 est équivalente aux conditions 1 et 2 introduites en 2 et écrites pour $\delta = 0$).

On a alors :

Théorème 4 : Si l'opérateur L vérifie la condition 1, il est partiellement hypoelliptique dans $I \times \Omega$.

Il se peut que la condition précédente ne soit pas vérifiée. On introduit la condition :

Condition 1' : Pour tout $(t,x) \in I_+ \times \Omega$ et pour $(\tau,\xi) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ on a :

$$\sum_{j+|\alpha| = m} a_{j\alpha}(t,x)\, \tau^j \xi^\alpha \neq 0$$

(notons que la condition 1' entraîne la condition 1 dans un voisinage de $t = 0$ éventuellement plus petit que $I \times \Omega$; ce qui n'est pas toujours vrai en II quand $\delta > 0$).

On a alors :

Théorème 4' : si l'opérateur L vérifie la condition 1', il est partiellement hypoelliptique dans $I_+ \times \Omega$.

3.2 Esquisse de la démonstration des théorèmes 4 et 4'

On s'intéresse à la démonstration du théorème 4' ; le théorème 4 s'en déduit. On se ramène tout d'abord au cas où $\sigma = 0$. On fait le changement de variable $t = e^y$ (pour $t > 0$ et $y \in \mathbb{R}$) et de fonction $u(t,x) = e^{-y/2} v(y,x)$ pour l'opérateur $\sum_{j+|\alpha|=m} a_{j\alpha}(0,x) t^j D_t^j D_x^\alpha$ qui est transformé en un opérateur elliptique sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ pour lequel on a des estimations classiques. Puis en revenant à la variable t et en utilisant des arguments de perturbation on en déduit l'estimation a priori suivante :

pour tout $x_0 \in \Omega$, il existe une constante $\varepsilon > 0$, et pour tout $q \in \mathbb{R}$, il existe une constante $C_q > 0$ telles que, si $u \in W^q(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ avec $\operatorname{supp} u \subset \{(t,x) \in I_+ \times \Omega,\ |t| + |x - x_0| < \varepsilon\}$ on ait :

$$\|u\|_{W^q(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)} \leq C_q \{ \|Lu\|_{L^2(\mathbb{R}_+; H^q(\mathbb{R}^n))} + \|u\|_{W^{q-1}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)} \}$$

où

$$W^q(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n) = \{ u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n),\ t^j D_t^j u \in L^2(\mathbb{R}_+; H^{m-j+q}(\mathbb{R}^n)),\ 0 \leq j \leq m \}$$

De cette estimation a priori, on déduit, par une méthode de quotients différentiels en x, le résultat de régularité suivant :

si $u \in W^q(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ avec $\operatorname{supp} u \subset \{(t,x) \in I_+ \times \Omega, |t| + |x - x_0| < \varepsilon\}$ et $Lu \in L^2(\mathbb{R}_+; H^{q+1}(\mathbb{R}^n))$ alors $u \in W^{q+1}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$.

On peut alors démontrer le résultat d'hypoellipticité partielle : soit donc $u \in C^\infty(I; \mathcal{D}'(\Omega))$ tel que $Lu \in C^\infty(I' \times \Omega')$ et soit à montrer que u est indéfiniment dérivable au point $(0, x_0) \in I' \times \Omega'$.

Soit $\phi \in C_0^\infty(I' \times \Omega')$ égale à 1 au voisinage de $(0, x_0)$. D'après la structure locale des distributions de $C^\infty(I; \mathcal{D}'(\Omega))$ il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que $\phi u \in W^q(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$. On applique le résultat de régularité précédent et il s'ensuit que $\phi u \in W^{q+1}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$. Itérant le procédé on déduit en particulier que $\phi u \in L^2(\mathbb{R}_+; H^q(\mathbb{R}^n))$ pour tout $q \in \mathbb{R}$. Comme de plus d'après la structure locale des distributions de $C^\infty(I_+; \mathcal{D}'(\Omega))$, pour tout $p \in \mathbb{N}$ il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $D_t^p(\phi u) \in L^2(\mathbb{R}_+; H^r(\mathbb{R}^n))$, il s'en suit que $D_t^\ell(\phi u) \in L^2(\mathbb{R}_+; H^s(\mathbb{R}^n))$ pour tout $\ell \in \mathbb{N}$ et tout $s \in \mathbb{N}$. Il en résulte que u est indéfiniment dérivable en $(0, x_0)$.

<u>Remarque</u> : Pour ces opérateurs l'hypoellipticité partielle n'est pas vraie si l'on part d'un espace de distributions qui ne sont pas C^∞ en t (cf. introduction) alors que, comme on l'a noté, dans le cas fuchsien, i.e. pour $\delta > 0$, l'hypoellipticité partielle est vraie si l'on part d'un espace $C^k(I; \mathcal{D}'(\Omega))$ l'entier k dépendant de l'opérateur.

<u>Remarque</u> : On a des résultats analogues pour les opérateurs :

$$I = \sum_{j+|\alpha| \leq m} a_{j\alpha}(t,x)\, t^{\sigma + [qj]} D_t^j D_x^\alpha$$

où q est un nombre réel > 0. (Cf. [4]).

Bibliographie

[1] Baouendi (M. S.) et Goulaouic (C) : "Cauchy problems with multiplie characteristics in spaces of regular distributions". Uspehi, Vol. XXIX, 2 (176), 1974, 70-76.

[2] Bolley (P) et Camus (J) : "Sur une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés à une variable". J. Math. pures et appl., t.51, (1972), 429-463.

[3] Bolley (P.), Camus (J.) et Helffer (B.) : "Sur une classe d'opérateurs partiellement hypoelliptiques". A paraître au J. Math. Pures et app.

[4] Bolley (P.), Camus (J.) et Helffer (B.) : à paraître .

[5] G[illegible] (A) et Treves (F.) : "An example in the solvability theory of linear partial differential equations".

[6] Grusin (V.V.) : "On class of hypoelliptic operators", Math. Sbornik 83 (125) (1970), 456-473 (Math. U.S.S.R. Sbornik 12, (1970), 458-47[illegible]

[7] Grusin (V.V.) : "Hypoelliptic differential equations and pseudodiffe-tial operators with operator valued symbols". Math. Sbornik 88 (130) (1972), 504-521 (Math. U.S.S.R. Sbornik 17, (1972), 497-514).

[8] Helffer (B.) et Zuily (C.) : "Non hypoellipticité des opérateurs du type de Fuchs". C. R. Acad. Sc. Paris, t.277, (1973), 1061-1067.

[9] Sjostrand (J.) : "Parametrix for pseudodifferential operators with multiplie characteristics", Arkiv for Mat. Vol. 12, n° 1 (1974), 85-130.

[10] Trèves (F.) : "A new method of proof of the subelliptic estimates" Comm. Pure Appl. Math. Vol. XXIV, (1973), 71-115.