Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

Ph. Pallu de La Barrière

Existence et prolongement des solutions holomorphes des équations aux dérivées partielles

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1974-1975), exp. n^{o} 12, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1974-1975____A11_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHEMATIQUES

17, rue Descartes

75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - L I O N S - S C H W A R T Z

1 9 7 4 - 1 9 7 5

EXISTENCE ET PROLONGEMENT DES SOLUTIONS HOLOMORPHES DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

par Ph. PALLU de la BARRIERE

Exposé n° XII   19 Février 1975

§ 0. INTRODUCTION

Cet exposé est consacré à l'étude de l'existence et du prolongement des solutions holomorphes d'une équation aux dérivées partielles. Soit Ω un ouvert de $\{\mathbb{C}^{n+1} = M\}$ $(n > 0)$ défini par l'équation :

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \varphi(z,\bar{z}) > 0\}$$

où φ est une fonction <u>analytique</u> réelle à valeurs réelles dont le gradient ne s'annule pas sur $N = \partial\Omega$. On note $\mathcal{O}$ le faisceau des fonctions holomorphes sur M et $\mathcal{O}^+$ le faisceau sur N dont la fibre est définie par :

$$z \in N,\ \mathcal{O}_z^+ = \varinjlim_{z \in \omega} \mathcal{O}(\omega^+),\ \omega^+ = \omega \cap \Omega$$

et ω parcourt un système fondamental de voisinages de z dans M.

Soit P un opérateur différentiel à coefficients holomorphes au voisinage de N :

$$P(z,D_z) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D_z^\alpha,\quad D_z^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial z_0}\right)^{\alpha_0} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial z_n}\right)^{\alpha_n}$$

On donne des conditions nécessaires et des conditions suffisantes pour que l'on ait l'une des propriétés suivantes :

$(PR)_z$ si $f \in \mathcal{O}_z^+$ et $Pf \in \mathcal{O}_z$, alors $f \in \mathcal{O}_z$.

$(EX)_z$ Pour tout $g \in \mathcal{O}_z^+$, il existe $f \in \mathcal{O}_z^+$ tel que $Pf = g$.

Dans le cas où N n'est pas caractéristique pour P en z, Zerner [5] et Bony-Schapira [1] ont montré que l'on a les propriétés $(PR)_z$ et $(EX)_z$. Plus récemment Tsuno [4] a donné une condition nécessaire et une condition suffisante pour que l'on ait la propriété $(PR)_z$ dans le cas où N est simplement caractéristique pour P en z. Ces auteurs ont utilisé des méthodes "géométriques". Notre méthode consiste à montrer que la propriété $(PR)_z$(resp. $(EX)_z$) est équivalente à l'injectivité (resp. à la "surjectivité") dans les microfonctions de Sato d'un système sur N induit par P et le système $\bar{\partial}$ des équations de Cauchy Riemann sur M. On donne ensuite des critères à l'aide des théorèmes de structure de [S.K.K].

§ 1. ENONCE DES RESULTATS ET DEFINITIONS

a) Le système $\bar{\partial}_b$.

Les problèmes étant locaux, on peut supposer que $\frac{\partial \varphi}{\partial z_o} \neq 0$ sur N. On peut alors définir le système $\bar{\partial}_b$ sur N de la manière suivante :

$$\bar{\partial}_b u = 0 \Leftrightarrow X_j u = 0 \qquad j = 1,\dots,n$$

où $X_j = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} - \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_j} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_o}\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_o}$, $j = 1,\dots,n$.

On a $[X_j, X_k] = 0$, $\forall\, j,k = 1,\dots,n$ et si on note

$$\Sigma = \{z^* \in S^* N \mid \sigma(X_1)(z^*) = \dots = \sigma(X_n)(z^*) = 0\}$$

la variété caractéristique de $\bar{\partial}_b$ (où $\sigma(Q)$ désigne le symbole principal d'un opérateur différentiel Q), Σ est la réunion des champs de vecteurs cotangents Σ^+ et Σ^- suivants :

. $\Sigma^+(z) = (z, \xi(z)) \in S^* N$ et $\xi(z) = (\xi_j(z) = -i \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_j}(z))$ $j = 0,\dots,n$

. $\Sigma^-(z)$ est l'antipodal de $\Sigma^+(z)$ dans $S^* N$.

b) L'opérateur P_b

Soit (Y_j) $j = 0,\dots,n$ la famille de $(n+1)$ champs de vecteurs complexes sur N définis par :

$$Y_j = \frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{\partial \varphi}{\partial z_j} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_o}\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_o} \qquad j = 0,\dots,n$$

On a $[Y_j, Y_k] = 0$, $\forall\, j,k = 0,\dots,n$ et la famille (Y_j) $j = 0,\dots,n$ est linéairement indépendante.

On définit alors à partir de P, un opérateur P_b de la manière suivante :

$$P_b = \sum_{|\alpha| \le m} \tilde{a}_\alpha Y^\alpha \quad \text{où } \tilde{a}_\alpha = a_{\alpha}|_N$$

Remarque : N est caractéristique pour P en $z \Leftrightarrow \sigma(P_b)(\Sigma^+(z)) = 0$

c) Forme de Lévi généralisée de (Ω,P).

Soit f et g deux fonctions homogènes sur S^*N. Dans les coordonnées duales de M, le crochet de Poisson $\{f,g\}$ est défini par

$$\{f,g\}(z^*) = \sum_{j=o}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_j}\cdot\frac{\partial g}{\partial \bar z_j} + \frac{\partial f}{\partial \bar\xi_j}\cdot\frac{\partial g}{\partial z_j} - \frac{\partial g}{\partial \xi_j}\cdot\frac{\partial f}{\partial \bar z_j} - \frac{\partial g}{\partial \bar\xi_j}\cdot\frac{\partial f}{\partial z_j}\right)(z^*) .$$

La forme de Levi généralisée de (Ω,P) en z est la forme hermitienne L_z sur $\mathbb{C}^{n+1}$ définie par :

$$\begin{aligned} L_z(\tau) = & \sum_{1\le k,j\le n} \{\sigma(X_k), \overline{\sigma(X_j)}\}(\Sigma^+(z))\tau_k\bar\tau_j + \\ & + 2\mathrm{Re} \sum_{1\le j\le n} \{\sigma(X_j), \sigma(\overline{P_b})\}(\Sigma^+(z))\tau_j\bar\tau_{n+1} + \\ & + \{\sigma(P_b), \sigma(\overline{P_b})\}(\Sigma^+(z))|\tau_{n+1}|^2 \end{aligned}$$

Remarque : La forme $L'_z(\tau') = \sum_{1\le k,j\le n} \{\sigma(X_k),\sigma(\overline{X}_j)\}(\Sigma^+(z))\tau_k\bar\tau_j$

est la forme de Lévi usuelle de l'ouvert Ω en z.

d) Conditions suffisantes

Théorème 1 : *Supposons que P ne soit pas dégénéré en z et que N soit caractéristique pour P en z. Alors*

(i) *si L_z a au moins une valeur propre strictement négative, on a la propriété $(PR)_z$.*

(ii) *si L_z a n+1 valeurs propres strictement positives, on a la propriété $(EX)_z$*

e) Conditions nécessaires

Théorème 2 : *Supposons que P ne soit pas dégénéré en z, que N soit caractéristique pour P en z et que Ω soit strictement pseudo convexe en z. Alors*

i) $\det L_z < 0 \Rightarrow (PR)_z$ et non $(EX)_z$

ii) $\det L_z > 0 \Rightarrow (EX)_z$ et non $(PR)_z$.

Remarques :

. On peut appliquer les théorèmes 1 et 2 pour la propriété $(PR)_z$, si on suppose seulement φ de classe C^3. En effet Ω contient alors localement un ouvert Ω' à frontière analytique, tangent à l'ordre deux à Ω en z.

. Si N n'est pas caractéristique simple pour P en z on a $\sigma(P)(z^*) = a(z^*)[p'(z^*)]^\ell$ avec $a(z,\mathrm{grad}_z\varphi) \neq 0$ au voisinage de $z^* = (z,\mathrm{grad}_z\varphi)$ et on peut remplacer $\sigma(P_b)$ par p'_b dans la définition de L_z comme on le montrera par la suite .

f) Exemples d'application

. $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} | x_o > 0\}$. On peut écrire P sous la forme

$$P(z,D_z) = a(z)D^m_{z_o} + \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ \alpha_o \neq m}} a_\alpha(z)\, D^\alpha_z$$

Le bord de Ω est caractéristique pour P en z^o signifie que $a(z^o) = 0$. On a alors :

$$\exists\, j \in [1,n] \quad \text{tel que} \quad \frac{\partial a}{\partial z_j}(z^o) \neq 0 \;\Rightarrow\; (PR)_{z^o}$$

. Ω^r désigne la boule de centre $(1-r,0,\ldots,0)$ dont la frontière passe par $z^o = (1,0,\ldots,0)$; on écrit P sous la forme

$$P(z,D_z) = \sum_{j=o}^{n} a_j(z) D^{m-1}_{z_o} D_{z_j} + \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ \alpha_o < m-1}} a_\alpha(z) D^\alpha_z$$

et $\partial\Omega^r$ est caractéristique pour P en z^o signifie que $a_o(z^o) = 0$. On a alors :

$$\exists\, k \in [1,n],\ a_k(z^o) \neq 0 \Rightarrow (EX)_{z^o} \text{ et non } (PR)_{z^o} \text{ pour r assez petit}$$

$$\exists\, j \in [1,n],\ \frac{\partial a_o}{\partial z_j}(z^o) \neq 0 \;\Rightarrow\; (PR)_{z^o} \text{ et non } (EX)_{z^o} \text{ pour r assez grand.}$$

§ 2. PLAN DE LA DEMONSTRATION DES THEOREMES 1 ET 2

a) Réduction au bord

On note $\widetilde{\mathcal{C}}$ (resp. $\widetilde{\mathcal{B}}$) le faisceau sur S^*N (resp. sur N) des microfonctions (resp. des hyperfonctions) [S.K.K.]. Rappelons que si $z^* = (z,\xi) \in S^*N$, $\widetilde{\mathcal{C}}_{z^*} = \widetilde{\mathcal{B}}z / \widetilde{\mathcal{B}}z^*$ où $\widetilde{\mathcal{B}}_{z^*} = \{u \in \widetilde{\mathcal{B}}_z \mid z^* \notin \mathrm{SSEu}\}$. (SSEu désigne le support singulier essentiel de u dans S^*N).

On note $\widetilde{\mathcal{C}}_{\Sigma^+}$ le faisceau sur N défini par :

$$\forall\, z \in N,\ (\widetilde{\mathcal{C}}_{\Sigma^+})_z = \widetilde{\mathcal{C}}_{\Sigma^+(z)} .$$

Soit $\widetilde{\mathcal{D}}$ le faisceau sur N des opérateurs différentiels à coefficients analytiques [S.K.K.]. On associe à chaque système différentiel sur N de la forme $P_j u = 0$ $(j = 1,\dots,r)$, un $\widetilde{\mathcal{D}}$-module $\mathcal{M}$ défini par :

$$\mathcal{M} = \widetilde{\mathcal{D}}/\mathcal{J} \quad , \text{ où } \mathcal{J} \text{ est l'idéal de } \widetilde{\mathcal{D}} \text{ engendré par } P_1,\dots,P_r .$$

On note $\widetilde{\mathcal{M}}_{\bar\partial}$ (resp. $\widetilde{\mathcal{M}}^{P}_{\bar\partial}$) le $\widetilde{\mathcal{D}}$-module associé au système $\bar\partial_b$ (resp. $(\bar\partial_b, P_b)$).

<u>Théorème 3</u> : <u>On peut définir une application de valeur au bord</u> (vb) <u>de</u> $\mathcal{O}^+_z$ <u>dans</u> $\widetilde{\mathcal{B}}_z$, $z \in N$.

(i) $\mathrm{vb} : \mathcal{O}^+_z \to \{u \in \widetilde{\mathcal{B}}_z,\ \mathrm{SSEu} \subset \Sigma^+,\ \bar\partial_b u = 0\}$ <u>est un isomorphisme</u>

(ii) vb <u>se prolonge en un isomorphisme</u>

$$\mathrm{vb} : \mathcal{H}^k_F(\mathcal{O})_{|N} \cong \mathcal{E}xt^{k-1}_{\widetilde{\mathcal{D}}}(\widetilde{\mathcal{M}}_{\bar\partial}, \widetilde{\mathcal{C}}_{\Sigma^+}) \quad \forall k > 0 \ (\text{où } F = M - \Omega).$$

(iii) $\mathrm{vb} \circ P = P_b \circ \mathrm{vb}$.

La partie (ii) est due à Kashiwara-Kawai [2]. On donnera une démonstration "élémentaire" de ce théorème au paragraphe 3 .

Théoreme 4 :

(i) $(PR)_z \Leftrightarrow \mathcal{H}om_{\tilde{\mathcal{D}}}(\tilde{\mathcal{M}}^P_{\delta}, \tilde{\mathcal{C}}_{\Sigma^+(z)}) = 0$

(ii) $(EX)_z \Leftarrow \mathcal{E}xt^1_{\tilde{\mathcal{D}}}(\tilde{\mathcal{M}}^P_{\delta}, \tilde{\mathcal{C}}_{\Sigma^+(z)}) = 0$

(iii) si Ω est pseudo convexe en z (forme de Levi ≥ 0 au voisinage de z) ;

$$(EX)_z \Leftrightarrow \mathcal{E}xt^1_{\tilde{\mathcal{D}}}(\tilde{\mathcal{M}}^P_{\delta}, \tilde{\mathcal{C}}_{\Sigma^+(z)}) = 0 \quad .$$

Preuve du theoreme 4 :

1) Si on note $\mathcal{O}_P$ le faisceau des solutions dans $\mathcal{O}$ de $Pf = 0$, $(PR)_z \Leftrightarrow \mathcal{H}^1_F(\mathcal{O}_P)_z = 0$, $(EX)_z \Leftarrow \mathcal{H}^2_F(\mathcal{O}_P)_z = 0$ et si Ω est pseudo convexe en z, $(EX)_z \Leftrightarrow \mathcal{H}^2_F(\mathcal{O}_P)_z = 0$.

2) On a les suites exactes :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_P \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{P} \mathcal{O} \longrightarrow 0 \quad \text{(Th. de Cauchy-Kowalewski)}$$

$$0 \longleftarrow \tilde{\mathcal{M}}^P_{\delta} \longleftarrow \tilde{\mathcal{M}}_{\delta} \xleftarrow{P_b} \tilde{\mathcal{M}}_{\delta} \longleftarrow 0$$

(où P_b est le morphisme de $\tilde{\mathcal{D}}$-modules induit par l'application $P_b(Q) = Q.P_b$ de $\tilde{\mathcal{D}}$ dans $\tilde{\mathcal{D}}$).

On en déduit les suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to \mathcal{H}om_{\tilde{\mathcal{D}}}(\tilde{\mathcal{M}}^P_{\delta}, \tilde{\mathcal{C}}_{\Sigma^+}) & \to & \mathcal{H}om_{\tilde{\mathcal{D}}}(\tilde{\mathcal{M}}_{\delta}, \tilde{\mathcal{C}}_{\Sigma^+}) & \xrightarrow{P_b} & \mathcal{H}om_{\tilde{\mathcal{D}}}(\tilde{\mathcal{M}}_{\delta}, \tilde{\mathcal{C}}_{\Sigma^+}) & \to & \mathcal{E}xt^1_{\tilde{\mathcal{D}}}(\tilde{\mathcal{M}}^P_{\delta}, \tilde{\mathcal{C}}_{\Sigma^+}) & \to & . \\
 & & \wr\uparrow vb & & \wr\uparrow vb & & & & \\
0 \to \mathcal{H}^1_F(\mathcal{O}_P)|_N & \longrightarrow & \mathcal{H}^1_F(\mathcal{O})|_N & \xrightarrow{P} & \mathcal{H}^1_F(\mathcal{O})|_N & \longrightarrow & \mathcal{H}^2_F(\mathcal{O}_P)|_N & \to & \cdots
\end{array}$$

et on déduit du théorème 3, (ii), (iii) les isomorphismes :

$$\mathcal{H}^k_F(\mathcal{O}_P)|_N \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}xt^{k-1}_{\tilde{\mathcal{D}}}(\tilde{\mathcal{M}}^P_{\delta}, \tilde{\mathcal{C}}_{\Sigma^+}) \ , \ k > 0. \qquad \blacksquare$$

b) Etude au bord

Soit $\mathcal{M} : P_j u = 0 \quad i = 1,\dots,r$ un système différentiel sur N. Soit Y le complexifié de N et $P^*Y = \dfrac{T^*_{\mathbb{C}}Y - Y}{\mathbb{C}^*}$ son fibré projectif. Soit $\hat{P}$ le faisceau sur P^*Y des opérateurs pseudo-différentiels complexes d'ordre fini [S.K.K]. La variété caractéristique complexe $V_{\mathbb{C}}(\mathcal{M})$ du système $\mathcal{M}$ est définie de la manière suivante :

$$V_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}) = \{\hat{z}^* \in P^*Y \mid \sum_{j=1}^{r} \Lambda_j \hat{P}_j \neq I, \ \forall \Lambda_j \in \hat{\mathcal{P}}_{z^*}\} .$$

($\hat{P}_j$ désigne le complexifié de P_j).

Soit $z^* \in S^*N$. Si $V_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}) = \{\hat{z}^* \in P^*Y \mid p_1(\hat{z}^*) = \ldots = p_d(\hat{z}^*) = 0\}$ au voisinage de z^* on définit la forme de Levi généralisée de $\mathcal{M}$ [S.K.K.] :

$$L_{z^*}(\tau) = \sum_{1 \leq j,k \leq d} \{p_j, \bar{p}_k\}(z^*)\tau_j \bar{\tau}_k$$

Théorème ([S.K.K.]. Th. 2.3.2, 2.3.6, 2.3.10)

A. (i) Si L_{z^*} a p valeurs propres strictement négatives on a :

$$\mathcal{E}xt^k_{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathcal{M}, \tilde{\mathcal{C}})_{z^*} = 0 \quad \text{pour } k < p.$$

(ii) Si L_{z^*} a q valeurs propres strictement positives on a

$$\mathcal{E}xt^k_{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathcal{M}, \tilde{\mathcal{C}})_{z^*} = 0 \quad \text{pour } k > \text{dim. proj.}\mathcal{M} - q.$$

B. Si L_{z^*} a q valeurs propres strictement négatives et d-q valeurs propres strictement positives on a :

$$\mathcal{E}xt^q_{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathcal{M}, \tilde{\mathcal{C}})_{z^*} \neq 0 .$$

On déduit alors les théorèmes 1 et 2 du théorème précédent, du théorème 4 et de la proposition suivante.

Proposition 5

$$V_{\mathbb{C}}(\tilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}}^{P}) = \{\hat{z}^* \in P^*Y \mid \widehat{\sigma(X_1)}(\hat{z}^*) = \ldots = \widehat{\sigma(X_n)}(\hat{z}^*) = \widehat{\sigma(P_b)}(\hat{z}^*) = 0\} .$$

Remarque : On peut remplacer $\sigma(P_b)$ par p'_b défini dans la dernière remarque du I.e).

§ 3. ESQUISSE DE LA DEMONSTRATION DU THEOREME 3

a) les groupes $\mathcal{H}^k_F(\mathcal{O})_z$, $z \in N$.

Rappelons que :

$$z \in N,\ \mathcal{H}^1_F(\mathcal{O})_z = \mathcal{O}^+_z / \mathcal{O}_z\ ,\ \mathcal{H}^{k+1}_F(\mathcal{O})_z = \varinjlim_{z \in \omega} H^k(\omega^+, \mathcal{O}),\ k > 0\ ;$$

les groupes $H^k(\omega^+, \mathcal{O})$ est le k-ième groupe de cohomologie du complexe de Dolbeault à coefficients hyperfonctions [3] :

$$(1) \qquad 0 \to \mathcal{O}(\omega^+) \to B^{(o)}(\omega^+) \xrightarrow{\overline{\delta}} B^{(1)}(\omega^+) \xrightarrow{\overline{\delta}} \dots$$

l'opérateur $\frac{\partial}{\partial \overline{z}_o}$ est surjectif de $B(\omega^+)$ dans $B(\omega^+)$; on en déduit que le complexe (1) à même cohomologie que le complexe

$$(2) \qquad 0 \to \mathcal{O}(\omega^+) \to B^{(o)}_h(\omega^+) \xrightarrow{\overline{\delta}'} B^{(1)}_h(\omega^+) \xrightarrow{\overline{\delta}'} \dots$$

où $B_h(\omega) = \{u \in B(\omega) \mid \frac{\partial}{\partial \overline{z}_o} u = 0\}$, $B^{(k)}_h(\omega)$ désigne l'ensemble des formes différentielles de degré k à coefficients dans $B_h(\omega)$ et engendrées par n éléments $d\overline{z}_1, \dots, d\overline{z}_n$ et $\overline{\delta}'$ désigne la restriction de $\overline{\delta}$ à $B^{(k)}_h(\omega)$

b) les groupes $\mathcal{E}xt^k_{\widetilde{\mathcal{D}}}(\widetilde{\mathcal{M}}_{\overline{\partial}}, \widetilde{\mathcal{C}}_{\Sigma^+(z)})$.

Soit A un $\widetilde{\mathcal{D}}$-module. En appliquant le foncteur $\mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}}(.,A)$ au complexe le Koszul associé au $\widetilde{\mathcal{D}}$-module $\widetilde{\mathcal{M}}_{\overline{\partial}}$ et à la famille $X_1, \dots, X_n$ (ce complexe est exact) on obtient le complexe suivant :

$$(3) \qquad 0 \to A_{\overline{\partial}_b} \to A^{(o)} \xrightarrow{\overline{\delta}_b} A^{(1)} \xrightarrow{\overline{\delta}_b} \dots$$

où $A_{\overline{\partial}_b} = \{u \in A \mid \overline{\partial}_b u = 0\}$, $A^{(k)}$ désigne l'ensemble des formes différentielles de degré k à coefficients dans A engendrées par n éléments $d\widetilde{z}_1, \dots, d\widetilde{z}_n$ et si $\alpha = \sum_I a_I \, d\widetilde{z}_I$,

$$\overline{\delta}_b \alpha = \sum_I \overline{\delta}_b a_I \wedge d\widetilde{z}_I\ ,\quad \overline{\delta}_b a_I = \sum_{j=1}^n X_j(a_I)\, d\widetilde{z}_j\ .$$

Les groupes $\mathcal{E}xt^k_{\tilde{\mathcal{D}}}(\tilde{\mathcal{M}}_{\bar{\delta}}, A)$ est alors le k-ième groupe de cohomologie du complexe (3).

c) Valeur au bord de $B_h(\omega)$

Il existe un difféomorphisme local partiellement holomorphe qui transforme Ω en le demi espace $\{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid x_0 > 0\}$. On montre alors que l'on a un morphisme de valeur au bord :

$$vb : (B_h^+)_z \to \tilde{\mathcal{B}}_z , \qquad z \in N$$

et des isomorphismes :

$$vb : \mathcal{O}^+/\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}^-/\mathcal{O} \simeq (\tilde{\mathcal{B}}/\tilde{\mathcal{A}})_{\bar{\delta}_b} \ ; vb : B_h^+ \oplus B_h^-/B_h \to \tilde{\mathcal{B}} \ ;$$

où $B_h^{\pm} = \varinjlim_{z \in \omega} B(\omega^{\pm})$ $(\omega^{\pm} = \Omega \cap \{\pm\varphi(z,\bar{z}) > 0\})$

$B_h = \varinjlim_{z \in \omega} B(\omega)$ et $\tilde{\mathcal{A}}$ désigne le faisceau des fonctions analytiques sur N.

Comme $X_j|_{B_h} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}|_{B_h}$ $j = 1,\dots,n$, on a un morphisme de complexes :

$$\begin{array}{ccccc}
0 \to & (B_h^+ \oplus B_h^-)^{(o)} & \xrightarrow{\bar{\delta}'} & (B_h^+ \oplus B_h^-)^{(1)} & \xrightarrow{\bar{\delta}'} \\
 & \downarrow vb & & \downarrow vb & \\
0 \to & (\tilde{\mathcal{B}}/\tilde{\mathcal{A}})^{(o)} & \xrightarrow{\bar{\delta}_b} & (\tilde{\mathcal{B}}/\tilde{\mathcal{A}})^{(1)} & \xrightarrow{\bar{\delta}_b}
\end{array}$$

Ce morphisme induit un isomorphisme sur le cohomologie. Plus précisément :

$$vb : \varinjlim_{z \in \omega} H^k(\omega^+, \mathcal{O}) \oplus H^k(\omega^-, \mathcal{O}) \simeq \mathcal{E}xt^k_{\tilde{\mathcal{D}}}(\tilde{\mathcal{M}}_{\bar{\delta}}, \tilde{\mathcal{B}}/\tilde{\mathcal{A}})_z \ , \quad z \in N$$

est un isomorphisme $\forall k > 0$.

Remarque : Il est aisé de voir que $P_b|_{B_h} = P|_{B_h}$ donc que $vb \circ P = P_b \circ vb$.

d) Microlocalisation

Soit $\tilde{\omega}$ un ouvert de N ; on a $\tilde{\mathcal{B}}/\tilde{\mathcal{A}}(\tilde{\omega}) = \tilde{\mathcal{C}}(S^* . \tilde{\omega})$. On a donc une application de restriction :

$$\tilde{\mathcal{B}}/\tilde{\mathcal{A}} \xrightarrow{r} \tilde{\mathcal{C}}_{\Sigma^+} \oplus \tilde{\mathcal{C}}_{\Sigma^-} \ .$$

Comme le système $\bar{\partial}_b$ est elliptique en dehors de Σ l'application r induit un isomorphisme :

$$r : \mathcal{E}xt^k_{\tilde{\mathcal{D}}}(\tilde{\mathcal{M}}_{\bar{\partial}}, \tilde{\mathcal{B}}/\tilde{\mathcal{A}}) \xrightarrow{r} \mathcal{E}xt^k_{\tilde{\mathcal{D}}}(\tilde{\mathcal{M}}_{\bar{\partial}}, \tilde{\mathcal{C}}_{\Sigma^+}) \oplus \mathcal{E}xt^k_{\tilde{\mathcal{D}}}(\tilde{\mathcal{M}}_{\bar{\partial}}, \tilde{\mathcal{C}}_{\Sigma^-}) \ , \ \forall\, k \geq 0$$

D'autre part si $u \in B_h^+$, $SSE(vb\,u) \cap \Sigma^- = \emptyset$, donc vb est morphisme de $H^k(\omega^+, \mathcal{O})$ dans $\mathcal{E}xt^k_{\tilde{\mathcal{D}}}(\tilde{\mathcal{M}}_{\bar{\partial}}, \tilde{\mathcal{C}}_{\Sigma^+})$ ce qui achève la preuve du théorème.

§ 4. EXTENSION HOLOMORPHE DES HYPERFONCTIONS SUR LE BORD D'UN OUVERT DE $\mathbb{C}^n$.

On déduit du théorème 3 et du théorème de [S.K.K] cité plus haut le

Théorème 5 : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$ à frontière analytique. Soit $z \in \partial\Omega$ et supposons que Ω soit strictement pseudo-convexe en z. Alors toute hyperfonction sur $\partial\Omega$ définie au voisinage de z , solution de $\bar{\partial}_b u = 0$ est valeur au bord d'une fonction holomorphe dans $\Omega \cap \omega$ (ω voisinage de z dans $\mathbb{C}^n$).

BIBLIOGRAPHIE

[S.K.K.] M. Sato, T.Kawai, M. Kashiwara : Microfunctions and pseudo-differential equations. Lecture Notes in Maths. 287 (1971) .

[1] J. M. Bony, P. Schapira : Existence et prolongement des solutions holomorphes des équations aux dérivées partielles. Inv. Math. 17 (1972).

[2] M. Kashiwara, T. Kawai : On the boundary values problem for elliptic system of partial differential equations I. Proc. Jap. Acad. 48 (1970).

[3] H. Komatsu : Resolution by hyperfonctions of sheaves of solutions of differential equations with constants coefficients. Math. Annalen T. 176 p.77-86 (1968).

[4] Y. Tsuno : On the continuations of holomorphic solutions of characteristic differential equations. J. Math. Soc. Japan, Vol. 26, N° 3 (1974).

[5] M. Zerner : Domaine d'holomorphie des fonctions vérifiant une équation aux dérivées partielles. C. R. Acad. Sc. 272 (1971).
