Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

J. M. Kantor

Prolongement méromorphe de f^{λ}, et division des distributions, d'après I. N. Bernstein

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1973-1974), exp. n° 9, p. 1-16

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1973-1974____A8_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 3 - 1 9 7 4

PROLONGEMENT MEROMORPHE DE f^λ, ET DIVISION DES DISTRIBUTIONS, D'APRES I. N. BERNSTEIN

par J. M. KANTOR

Exposé N° IX

12 Décembre 1973

On connaît le théorème de division de Lojasiewicz. Une démonstration en a été donnée par M. Atiyah et I. Bernstein-S. Gelfand [1,2], qui utilise le théorème de résolution des singularités d'Hironaka.

L'article important de Bernstein dont il est question ici [3] développe le principe suivant :
remplacer l'étude des distributions par celle du module des équations aux dérivées partielles qu'elles satisfont.

Nous voulons souligner les conclusions les plus intéressantes de son travail : outre une démonstration algébrique (sans le théorème de résolution) du théorème de division par un polynôme, il met en évidence une nouvelle classe de distributions, à laquelle s'étendent les "opérations usuelles" de la théorie des fonctions (produit, composition...)

§ 1. PROLONGEMENT MEROMORPHE DE f^{λ}.

1.1 On démontre le théorème suivant :

Théorème 1 : Soit P un polynôme sur $\mathbb{R}^N$ à valeurs non-négatives, et I_λ la distribution définie par

$$I_\lambda(\varphi) = \int P^\lambda(x)\ \varphi(x)dx,\quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\ ,\quad \mathcal{R}e\,\lambda > 0$$

la fonction I se prolonge en une fonction méromorphe dans le plan complexe, à valeurs dans $\mathcal{S}'$, et dont les pôles appartiennent à une famille finie d'ensembles de la forme

$$A_i = \{\lambda_i - n,\ n \in \mathbb{N}\}$$

Ceci signifie que pour toute fonction test φ, la fonction $I_\lambda(\varphi)$ se prolonge en une fonction méromorphe (ses pôles appartenant à la famille décrite).

Ce théorème va résulter du suivant :

<u>Théorème 2</u> : Soit P un polynôme à valeurs non-négatives sur $\mathbb{R}^N$. Il existe un opérateur différentiel D à coefficients polynômiaux en $(x_1,\dots,x_N,\lambda)$, et un polynôme $\rho(\lambda)$ non nul, tels que

(1) $$D(P^{\lambda+1}) = \rho(\lambda)P^{\lambda}$$

Admettons le théorème 2. Alors :

$$\int P^{\lambda}(x)\ \varphi(x)\,dx = \frac{1}{\rho(\lambda)} \int D(P^{\lambda+1})(x)\ \varphi(x)\ dx$$
$$= \frac{1}{\rho(\lambda)} \int P^{\lambda+1}(x)\ \ (D^t\varphi)(x)\,dx,$$

où D^t désigne le transposé de D.

Cette égalité définit un prolongement méromorphe de P^{λ} pour

$$\Re e\,\lambda > -1$$

On peut alors itérer le processus ; d'où le théorème 1.

Signalons que J. E. Bjork a démontré, en appliquant la même méthode que [3], l'analogue analytique [5] :

<u>Théorème 2'</u> : Soit φ un germe de fonction analytique à l'origine de $\mathbb{R}^N$, à valeurs non négatives. Il existe un germe d'opérateur différentiel D à coefficients analytiques à l'origine, dépendant polynômialement d'un paramètre λ complexe, et un polynôme non nul $\rho(\lambda)$, tel que l'on ait

(2) $$D(\varphi^{\lambda+1}) = \rho(\lambda)\,\varphi^{\lambda}.$$

Nous démontrons le théorème 2.

1.2 <u>Fonctions de Hilbert-Samuel</u>

On désigne par $\mathbb{D}_X$ l'anneau des opérateurs différentiels à coefficients polynômiaux sur l'espace vectoriel X, $\mathbb{D}_N$ s'il s'agit de $\mathbb{R}^N$. On considère la filtration (notations usuelles)

$$\mathbb{D}_N = \bigcup_{i=0}^{+\infty} \mathbb{D}_N^i\ ,$$

où $\mathbb{D}_N^i$ désigne l'espace vectoriel engendré par

$$x^{\alpha}(\frac{\partial}{\partial x})^{\underline{\beta}} \ , \ |\alpha| + |\underline{\beta}| \leq i$$

L'anneau gradué associé Σ est l'anneau des polynômes de (2N) variables, et on a le résultat suivant [6, th.41, p.232].

<u>Théorème 3</u> : Soit R un anneau de polynômes , et $\tilde{M}$ un R-module gradué de type fini, non nul,

$$\tilde{M} = \bigoplus_q \tilde{M}_q$$

sa décomposition homogène. La fonction de Hilbert-Samuel de $\tilde{M}$

$$\tilde{H}(q) = \dim_{\mathbb{C}} \tilde{M}_q$$

coïncide, pour les grandes valeurs de q, avec un polynôme. On désigne par $d(\tilde{M})$ son degré, et par $e(\tilde{M})$ la multiplicité de $\tilde{M}$, égale au produit de $d(\tilde{M})$! par le coefficient directeur de ce polynôme. La multiplicité est un nombre <u>entier</u> strictement positif.

Soient M un $\mathbb{D}_N$- module de type fini, et $(f_1,\dots,f_s)$ un système de générateurs.On pose

$$M^i = \mathbb{D}_N^i .(f_1,\dots,f_s) = \{f = \sum_{j=1}^{s} P_j f_j ,\ P_j \in \mathbb{D}_N^i\}$$

On déduit sans difficultés du théorème 3 que la dimension de M_i est une fonction polynômiale (pour i assez grand) ; on lui associe les entiers d(M), e(M), comme plus haut.

<u>Proposition 1</u> :

1) d(M), e(M), ne dépendent pas de la famille génératrice choisie.
2) Si on a la suite exacte de $\mathbb{D}_N$ -modules de type fini

$$0 \to M_1 \to M \to M_2 \to 0$$

alors $d(M) = \sup\ (d(M_1),d(M_2))$ et

$$d(M) = d(M_1) > d(M_2) \Rightarrow e(M) = e(M_1)$$
$$d(M) = d(M_2) > d(M_1) \Rightarrow e(M) = e(M_2)$$
$$d(M) = d(M_1) = d(M_2) \Rightarrow e(M) = e(M_1) + e(M_2)$$

La démonstration est élémentaire.

Il faut considérer des $\mathbb{D}_N$- modules qui ne sont pas nécessairement de type fini :

Définition 1 : On appelle (d,e)-filtration d'un module M sur $\mathbb{D}_N$, une filtration (M^j) telle que

1) $\mathbb{D}_N^i M^j \subset M^{i+j}$

$$\bigcup_{j=o}^{+\infty} M^j = M$$

2) $\dim_{\mathbb{C}} M^j \leq \frac{e}{d!} j^d + o(j^d)$

Remarque 1 : S'il existe une telle (d,e)-filtration, pour tout sous-module L de type fini,

$$d(L) \leq d, \text{ et } d(L) = d \Rightarrow e(L) \leq e.$$

Les filtrations définies plus haut sur les modules de type fini sont des (d,e)-filtrations.

Le résultat remarquable de Bernstein est le suivant :

Théorème 4 : Si M est un $\mathbb{D}_N$- module de type fini, non-nul,

$$N \leq d(M) \leq 2N$$

ou, ce qui est équivalent :

Théorème 4' : Si un $\mathbb{D}_N$ -module M admet une (N,e)-filtration, il est de longueur finie au plus égale à e (et donc aussi de type fini).

Le théorème 4' implique le théorème 4, compte tenu du lemme suivant, que nous admettrons :

Lemme 1 : Si un $\mathbb{D}_N$-module est de longueur finie sur $\mathbb{D}_{N-1}$ (pour une injection naturelle d'anneaux relativement à une variable $\mathbb{D}_{N-1} \subset \mathbb{D}_N$) alors il est nul.

Admettant le théorème 4', le théorème 4 en est une conséquence : si M est de degré d(M) strictement inférieur à (N - 1), il est nul, puisque de longueur finie sur $\mathbb{D}_{N-1}$.

Supposons le théorème 4 démontré, et soit M un $\mathbb{D}_N$- module muni d'une (N,e)-filtration. Choisissons une suite strictement croissante (M_i) de sous-modules de type fini. On a

$$d(M_i) \leq N$$

d'après la remarque 1, donc

$$d(M_i) = N \Rightarrow e(M_i) < e(M_{i+1}) < \dots \leq e$$

Il y a donc au plus e termes dans la suite (M_i).

La démonstration du théorème 4' est faite par récurrence sur N.

a) Soit M un $\mathbb{D}_1$-module de type fini, avec une (1,e)-filtration. On a pour une suite croissante de sous-modules (M_i) (de type fini)

$$d(M_i) = 1$$

d'après le lemme 1 et l'hypothèse. On conclut qu'il y a au plus e termes dans la suite.

b) Supposons le théorème démontré pour (N-1), et soit M un $\mathbb{D}_N$-module muni d'une (N,e)-filtration. On applique le même raisonnement et le lemme 1, pour conclure que M est de longueur finie au plus égale à e.

1.3 Applications à P^λ .

Remarque 2 : Dans les énoncés qui précèdent, on peut remplacer l'anneau $\mathbb{D}_N$ par l'anneau $\mathbb{D}_N(\lambda)$ des opérateurs différentiels de N variables à coefficients polynômiaux sur le corps $\mathbb{C}(\lambda)$ des fractions rationnelles de la variable λ.

Considérons le module M_P des éléments de la forme $QP^{\lambda-k}$, où on identifie

$$QP^{\lambda-k} = Q'P^{\lambda-k'} \Leftrightarrow QP^{k'} = Q'P^{k}$$

et la structure de $\mathbb{D}_N(\lambda)$-module est définie par

$$x_i(QP^{\lambda-k}) = (x_iQ)P^{\lambda-k}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(Q.P^{\lambda-k}) = \frac{\partial Q}{\partial x_i} P^{\lambda-k} + Q(\lambda-k)\frac{\partial P}{\partial x_i} P^{\lambda-k-1}$$

Considérons la filtration

$$M_P^n = \{QP^{\lambda-k} \ ; \ \deg Q \leq (\deg P+1)n\}.$$

On vérifie que c'est une (N,e)-filtration, et donc que le module M_P est de type fini. Par suite, la famille croissante de sous-modules

$$M_{P,j} = \mathbb{D}_N(\lambda) \ . \ P^{\lambda-j}$$

est stationnaire ; il existe un entier j_o , et un opérateur $\mathcal{D}$, tels que

$$\mathcal{D}\, P^{\lambda-j_o} = P^{\lambda-j_o-1}$$

Le changement de variable

$$\lambda \longrightarrow \lambda - j_o - 1$$

donne la formule (1) ; on vérifie que pour la partie réelle de λ assez grande, l'égalité (1) a lieu entre fonctions continues.

§ 2. LA CLASSE $\mathscr{S}'_o$.

2.1. Régularisation des distributions tempérées

Soit P un polynôme fixé, à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}^N$, vérifiant

(3) $$\lim_{|x|\to+\infty} P(x) = +\infty$$

$$P(x) > o \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

Définition 2 : Soit T une distribution tempérée sur $\mathbb{R}^N$. On appelle régularisation de T la fonction holomorphe à valeurs dans $\mathscr{S}'$:

(4) $$T_P(\lambda) = \mathscr{F}^{-1}\left(\frac{1}{P^\lambda}\mathscr{F}T\right)$$

On a

$$T_P(0) = T$$

Lemme 2 : Pour tout entier ℓ. il existe un entier $p(\ell)$ tel que la distribution $T_P(\lambda)$ soit une fonction continue à l'ordre ℓ pour

$$\mathscr{R}e\lambda > p(\ell) .$$

Fixons une application polynômiale entre deux espaces vectoriels

$$A : Y \to X$$

Si T est une distribution tempérée sur X, la fonction

$$\lambda \to A^*[T_P(\lambda)] = T_P(\lambda).A$$

est bien définie pour

$$\mathscr{R}e\lambda > p(0)$$

On voudrait la prolonger comme fonction méromorphe dans le plan complexe.

On pourrait alors définir l'image inverse $A^*(T)$ de la distribution T, comme le coefficient d'ordre zéro du développement de Laurent de cette fonction à l'origine.

De même, on voudrait définir le produit $T \cdot T_1$ de deux distributions tempérées comme le coefficient d'ordre zéro du développement de Laurent à l'origine de $T_p(\lambda) \cdot T_1$.

2.2 <u>Définition 3</u> : La classe $\mathcal{S}'_o$ est l'ensemble des distributions tempérées E telles que

$$d(\mathbb{D}_N . E) \leq N \qquad (E \in \mathcal{S}'_{\mathbb{R}^N}) \quad , \text{ (c'est-à-dire } d(\mathbb{D}_N . E) = N)$$

Admettons un résultat préliminaire à l'étude de $\mathcal{S}'_o$.

<u>Proposition 2</u> :

1) $\mathcal{S}'_o$ est un $\mathbb{D}_N$-sous-module de $\mathcal{S}'$, invariant par transformation de Fourier.

2) Soit Φ une application méromorphe à valeurs dans $\mathcal{S}'_o$. En un point arbitraire du plan complexe, les coefficients du développement de Laurent de Φ appartiennent à $\mathcal{S}'_o$.

Cette classe $\mathcal{S}'_o$ était déjà étudiée dans [4], où Bernstein démontrait la propriété suivante de ces distributions :

<u>Théorème 5</u> : Considérons l'injection canonique

$$\mathbb{R}^N \hookrightarrow \mathbb{C}^N ,$$

et soient E une distribution de $\mathcal{S}'_o$. Il existe un vrai sous-ensemble analytique $\tilde{\Delta}$ de $\mathbb{C}^n$, dont la trace Δ sur $\mathbb{R}^N$ est un (vrai) sous-ensemble analytique Δ, tels que :

E soit analytique dans $\mathbb{R}^N - \Delta$, et se prolonge en une fonction analytique multiforme dans $\mathbb{C}^N - \tilde{\Delta}$, dont les déterminations engendrent un espace vectoriel de dimension finie.

Voici un exemple :

Proposition 3 : Soit T une distribution tempérée sur $\mathbb{R}$, qui vérifie une équation

$$DT = 0$$

où D est un opérateur différentiel à coefficients polynômiaux non-nul. Alors T appartient à $\mathcal{S}'_0$.

Démonstration : Considérons la suite exacte

$$0 \to K \to \mathbb{D}_1 \xrightarrow[\varphi]{} \mathbb{D}_1 . T \to 0$$

$$\varphi(D) = D.T$$

on a

$$d(\mathbb{D}_1) = 2 \quad , \quad e(\mathbb{D}_1) = 1$$

L'idéal K contient un idéal principal non nul $\mathcal{J}$, donc isomorphe à $\mathbb{D}_1$. On en déduit qu'on ne peut avoir

$$d(K) = 1$$

donc

$$d(K) = 2 \Rightarrow d(\mathbb{D}_1 . T) = 1$$

2.3 Images inverses de modules

Définition 4 : Soit M un $\mathbb{D}_X$-module . On appelle image inverse de M le module

$$A^*(M) = \mathbb{C}[y] \otimes_{\mathbb{C}[x]} M$$

produit tensoriel relativement à l'application

$$A : Y \to X \quad A^* : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[y]$$

muni de la structure de $\mathbb{D}_Y$- module définie par

$$Q \in \mathbb{C}[y], \quad f \in M$$

$$\frac{\partial}{\partial y_j}(Q \otimes f) = \frac{\partial Q}{\partial y_j} \otimes f + \sum_1^N Q \frac{\partial A_i}{\partial y_j} \otimes \frac{\partial}{\partial x_i} f$$

$$j = 1,\dots,M \qquad A(y_1,\dots,y_M) = (A_1(y),\dots A_i(y),\dots,A_N(y))$$

Exemple : Y est le sous-espace défini par l'annulation de x_1.

$$A^*(M) = M_Y = \frac{M}{x_1 M}$$

et la loi de $\mathbb{D}_Y$- module est évidente.

Proposition 4 : Si le $\mathbb{D}_X$ - module M admet une (d,e)-filtration, le module $A^*(M)$ admet une (d',e)-filtration, avec

$$d' = d - (\dim X - \dim Y)$$

Nous démontrons cette proposition sous les hypothèses supplémentaires suivantes (qui suffisent pour la démonstration du théorème 6) :

- M est de type fini
- $A : Y \hookrightarrow X$

est une injection linéaire. Il suffit alors de considérer

$$Y = \{x_1 = 0\} \subset X = (x_1,\dots,x_N)$$

a) On peut supposer

$$(5) \qquad x_1 f \neq 0 \qquad \forall f \in M, \ f \neq 0$$

En effet, en utilisant la règle de dérivation

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1 g) = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} g + g$$

on montre que le module L formé des éléments f de M tels que

$$\exists\, n, x_1^n f = 0$$

vérifie

$$x_1 L = L$$

et il suffit de démontrer la proposition pour

$$M' = M/L$$

car :

$$M'_Y = \frac{M}{x_1 M + L} = M_Y$$

b) Introduisons dans M_Y la filtration

$$M_Y^k = M^k / M^k \cap x_1 M$$

où $\{M^k\}$ désigne une (d,e)-filtration de M engendrée par une famille génératrice . On a

$$x_1 M^{k-1} \subset M^k \cap x_1 M \subset M^k$$

et donc, d'après (5)

$$\dim_{\mathbb{C}} M_Y^k \leq \dim_{\mathbb{C}} M^k - \dim_{\mathbb{C}} M^{k-1}$$

On a pour k assez grand

$$\dim_{\mathbb{C}} M^k = \frac{e}{d!} k^d + o(k^{d-1}) .$$

La proposition en résulte.

2.4 <u>Théorème 6</u> : a) Soient T, T_1, deux distributions sur $\mathbb{R}^N$, de la classe $\mathcal{S}'_o$. La fonction $T_p(\lambda).T_1$ se prolonge en une fonction méromorphe dans le plan complexe à valeurs dans $\mathcal{S}'_o$.

b) La fonction $A^*[T_p(\lambda)]$ se prolonge en une fonction méromorphe à valeurs dans $\mathcal{S}'_o$.

Démonstration de a) (b) est démontré dans [3]).

a) Désignons par $\hat{S}$ l'espace des fonctions holomorphes de λ à valeurs distributions définies pour

$$\Re e\ \lambda > c \qquad c \to +\infty .$$

D'autre part, à tout module M sur $\mathbb{D}_N(\lambda)$, associons le module $\mathcal{F}M$ isomorphe à M comme espace vectoriel par l'intermédiaire de l'application $\mathcal{F}$, et vérifiant

$$\mathcal{F} : M \to \mathcal{F}M \qquad \mathcal{F}(Df) = \mathcal{F}(D)\,\mathcal{F}(f) \qquad \begin{array}{l} \forall\ D \in \mathbb{D}_N(\lambda) \\ \forall\ f \in M \end{array}$$

b) Considérons les modules

$$\mathcal{M} = \mathcal{F}[\mathbb{D}_N(\lambda).T]$$
$$\mathcal{N} = \mathcal{F}[\mathbb{D}_N(\lambda).T_1]$$

On a, d'après l'hypothèse, et compte tenu du 1) de la proposition 2,

$$d(\mathcal{M}) = d(\mathcal{N}) = N$$

On peut associer à $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ un $\mathbb{D}_{2N}(\lambda)$-module $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, de manière canonique (on fait agir les N premières variables x ou ξ sur $\mathcal{M}$, les autres sur $\mathcal{N}$). Posons alors

$$(\mathcal{M} \otimes \mathcal{N})^k = \sum_{o}^{k} \mathcal{M}^i \otimes \mathcal{N}^{k-i}$$

relativement à une (N,e)-filtration $(\mathcal{M}^i)$ (resp. $(\mathcal{N}^j)$) de $\mathcal{M}$(resp. $\mathcal{N}$).
On a

$$\dim_{\mathbb{C}} (\mathcal{M} \otimes \mathcal{N})^k \leq C\, k^{2N} + o(k^{2N-1})$$

D'après la proposition 4, le module

$$\mathcal{R} = (\mathcal{M} \otimes \mathcal{N})_{\mathbb{R}^N}$$

induit par l'application diagonale

$$\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$$

vérifie

$$d(\mathcal{R}) = N$$

Explicitement, en tant que $\mathbb{C}[x,\lambda]$-module,

$$\mathcal{R} = \mathcal{M} \otimes_{\mathbb{C}[x,\lambda]} \mathcal{N}$$

et la structure de $\mathbb{D}_N(\lambda)$- module est définie par

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f \otimes g) = \frac{\partial}{\partial x_i} f \otimes g + f \otimes \frac{\partial}{\partial x_i} g$$

c) On définit une application Φ de $\mathbb{D}_N(\lambda)$-modules

$$\Phi : \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{M} \otimes \mathcal{N})_{\mathbb{R}^N}) \to S^{\wedge}$$

par la formule

$$\Phi(T \otimes T_1) = T_P(\lambda) . T_1$$

la multiplication par P^{-1} définit un morphisme τ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}^{-1}\mathcal{R} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\tau"'] & S^{\wedge} \arrow[d, "*"] \\ \mathcal{F}^{-1}\mathcal{R} \arrow[r, "\Phi"] & S^{\wedge} \end{tikzcd}$$ où $(*f)(\lambda) = f(\lambda+1)$

D'après le théorème 4', le module $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{R}$ est de type fini. La suite de sous-modules

$$\mathcal{R}_i = \mathcal{F}^{-1}\mathbb{D}_N(\lambda) . (T, \tau^{-1}T, \ldots, \tau^{-i}T)$$

est donc stationnaire ; il en est de même des $\Phi(\mathcal{R}_i)$. On en déduit une relation

$$T_p(\lambda).T_1 = \mathcal{D}_1 T_p(\lambda+1).T_1 + \ldots \mathcal{D}_k T_p(\lambda+k).T_1$$

où

$$\mathcal{D}_i \in \mathbb{D}_N(\lambda).$$

D'où le théorème 6.

§ 3. APPLICATIONS A LA DIVISION DES DISTRIBUTIONS

3.1 Théorème 7 : Soit X une variété analytique réelle, connexe, dénombrable à l'infini. Il existe une application canonique

$$D : \mathcal{A}^*(X) \longrightarrow \mathcal{D}'(X)$$

telle que

$$fD(f) = 1$$

où $\mathcal{A}^*(X)$ désigne l'ensemble des fonctions analytiques réelles non identiquement nulles, et $\mathcal{D}'(X)$ l'espace des courants, dual des formes différentielles de degré maximal.

Démonstration : Quitte à remplacer f par $f\bar{f}$, on peut supposer la fonction analytique à valeurs non négatives. D'après le théorème 2' , il existe un recouvrement ouvert dénombrable (U_i) de X, et des opérateurs différentiels D_i à coefficients analytiques dans U_i, et dépendant polynômialement d'un paramètre complexe λ, tels que

$$D_i(f_i^{\lambda+1}) = \rho_i(\lambda) f_i^{\lambda}$$

$$f_i = f|U_i$$

$$\rho_i \text{ polynôme.}$$

On peut donc définir comme en I.1 une fonction méromorphe f_i^{λ} à valeurs dans $\mathcal{D}'(U_i)$; ses pôles appartiennent à

$$A_i = \{\lambda \in \mathbb{C} \quad \lambda = \lambda_j^i - n, \; j = 0\ldots j(i), n \in \mathbb{N}\}$$

Dans l'ouvert $U_i \cap U_j$, on a

$$f_i^\lambda = f_j^\lambda \quad \text{pour } \mathcal{R}e\,\lambda > 0$$

Cette égalité a donc lieu entre les fonctions méromorphes dans $\mathbb{C}$. On peut dès lors définir une fonction méromorphe f^λ dans $\mathbb{C}$, dont les pôles appartiennent à la réunion des A_i ; on appelle D(f) le coefficient d'ordre zéro du développement de Laurent de f^λ au point (-1).

<u>Remarque 2</u> : Illustrons le caractère "canonique" de D. Soit

$$\pi : \tilde{X} \to X$$

une surjection propre de variétés analytiques réelles, de même dimension et $(D_X, D_{\tilde{X}})$ les applications définies dans le théorème 7. On a

$$D_X(f) = \pi_* D_{\tilde{X}}[\pi^*(f)]$$

où π_* désigne l'image directe des courants. Cependant, il n'est pas évident que D se prolonge à l'espace des fonctions semi-méromorphes (ce qui permettrait de comparer l'application D et l'application "valeur principale de Cauchy").

3.2 Plus généralement, on peut se demander s'il existe une application canonique D_f associée à chaque fonction analytique f sur X, non identiquement nulle :

$$D_f : \mathcal{D}'(X) \to \mathcal{D}'(X),$$

telle que

$$fD_f(T) = T$$

Voici une réponse partielle :

<u>Théorème 8</u>: Soit Q un polynôme non nul dans $\mathbb{R}^N$. Il existe une application canonique

$$D_Q : \mathcal{S}'_0 \to \mathcal{S}'_0$$

telle que

$$Q\,D_Q(T) = T$$

<u>Démonstration</u> : La même méthode permet de montrer que la fonction

$$\tilde{T}(\lambda) = (Q\bar{Q})^{\lambda}(\bar{Q}T)$$

se prolonge en une fonction méromorphe à valeurs dans $\mathcal{S}'$. On définit $D_Q(T)$ comme le coefficient d'ordre zéro du développement de Laurent à l'origine.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. F. Atiyah : Resolution of singularities and division of distributions, Comm. Pure and Appl. Math. 23, N°2, 145-150 (1970).

[2] I. N. Bernstein, S. I. Gelfand : Prolongement méromorphe de la fonction P^{λ}, Function Anal. 3, N°1, p.84-86 (1969).

[3] I. N. Bernstein : Prolongement analytique des distributions dépendant d'un paramètre, Function. Anal. 6, N° 4, p.26-40 (1972).

[4] I. N. Bernstein : Modules sur l'anneau des opérateurs différentiels ; solution élémentaire des opérateurs à coefficients constants, Function Anal. 5, N°2 , p.1-16 (1971).

[5] J. E. Bjork : Dimensions over algebras of differential operators, (à paraître).

[6] Samuel-Zariski : Commutative Algebra, vol. II (Van Nostrand, 1960).