Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

J. M. Bony

P. Schapira

Propagation des singularités analytiques pour les solutions des équations aux dérivées partielles

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1973-1974), exp. n° 21 et 22, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1973-1974____A20_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHEMATIQUES

17, rue Descartes

75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 3 - 1 9 7 4

PROPAGATION DES SINGULARITES ANALYTIQUES POUR LES SOLUTIONS DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

par J. M. BONY et P. SCHAPIRA

Exposés n^{os} XXI-XXII

17-24 Avril 1974

Cet exposé est consacré à l'étude des opérateurs (pseudo-)différentiels à coefficients analytiques, dont la variété caractéristique est régulière (de codimension $r \geq 1$) et involutive.

Nous démontrons que le support essentiel analytique des solutions de $Pu = v$ se propage (en dehors du support essentiel de v) le long de r-feuilles bicaractéristiques. Nous démontrons également un théorème d'existence microlocal.

Nous nous bornons dans cet exposé à donner une idée très succinte des démonstrations. Elles utilisent largement la théorie des microfonctions et des opérateurs pseudo-différentiels développée par Sato-Kashiwara-Kawai [S-K-K].

Dans une première étape, les transformations canoniques quantifiées de [S-K-K] permettent de se ramener à l'étude des opérateurs pseudo-différentiels qui sont, en un certain sens, partiellement elliptique par rapport à un groupe de variables.

Une deuxième étape consiste à résoudre $Pf = g$ (avec P pseudo-différentiel) où f et g sont holomorphes dans des ouverts de $\mathbb{C}^n$, et à démontrer que si g est holomorphe dans un ouvert qui "touche" $\mathbb{R}^n$, il en est de même de f. Cela nécessite un calcul pseudo-différentiel précisé sur les opérateurs pseudo-différentiels dans le complexe introduits par S-K-K et à démontrer un théorème de Cauchy-Kowalevski dans des ouverts dont on contrôle la forme.

Il est alors possible de mettre en œuvre des méthodes proches de celles que nous avons déjà utilisées dans [2] pour les opérateurs différentiels : les microfonctions dans le domaine réel se représentant comme valeur au bord de fonctions holomorphes, on résoud $Pf = g$ ou on prolonge les solutions de $Pf = 0$ dans le domaine complexe, et on "prend la valeur au bord des résultats obtenus".

§ 0. HYPERFONCTIONS, MICROFONCTIONS, OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS

Soit M une variété analytique réelle de dimension ν, X un complexifié de M. Nous désignerons par $\mathcal{O}$ le faisceau sur X des germes de fonctions holomorphes, par $\mathcal{A}$ sa restriction à M. Nous utiliserons le faisceau $\mathcal{B}$ des hyperfonctions sur M et le faisceau $\mathcal{C}$ des microfonctions sur S^*M, le fibré en sphères cotangent à M. Nous renvoyons le lecteur à l'article de Sato-Kashiwara-Kawai [S-K-K] pour tout ce qui concerne le faisceau $\mathcal{C}$.

Rappelons simplement que si π désigne la projection $S^*M \to M$, la suite exacte

$$0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{B} \to \pi_*\mathcal{C} \to 0$$

permet de définir le support essentiel d'une hyperfonction sur M comme le support de son image dans $\Gamma(M,\pi_*\mathcal{C}) = \Gamma(S^*M,\mathcal{C})$.

D'autre part le faisceau $\mathcal{C}$ étant flasque, on peut considérer les microfonctions sur un ouvert $\mathcal{U}$ de S^*M comme les hyperfonctions sur M, modulo les hyperfonctions dont le support essentiel ne rencontre pas $\mathcal{U}$.

Soit maintenant P^*X le fibré cotangent projectif à X. A tout ouvert $\mathcal{U}$ de P^*X correspond canoniquement un ouvert $\tilde{\mathcal{U}}$ de T^*X. Le faisceau $\mathcal{P}^f$ des opérateurs pseudo-différentiels (d'ordre fini) est construit dans [S-K-K] (cf. aussi l'article de Boutet de Monvel et Krée [3]) Un opérateur pseudo-différentiel P d'ordre $\leq \mu$ sur $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}^\nu \times \mathbb{P}^{\nu-1}$ est (équivalent à la donnée d') une série

$$P(z,\zeta) = \sum_{-\infty}^{\mu} p_k(z,\zeta)$$

où les $p_k(z,\zeta)$ sont les fonctions holomorphes sur $\tilde{\mathcal{U}}$, homogènes de degré k, la série convergeant uniformément sur tout compact de $\mathcal{U}$ pour $|\zeta|$ assez grand.

Soit γ l'application naturelle de S^*M dans P^*X. Le faisceau $\mathcal{P}^f_M$ des opérateurs pseudo-différentiels sur M n'est autre que $\gamma^{-1}(\mathcal{P}^f)$. Autrement dit la donnée d'un opérateur pseudo-différentiel P au voisinage de (x,ξ) dans $\mathbb{R}^\nu \times S^{\nu-1}$ est la donnée d'un opérateur P au voisinage de l'image de (x,ξ) dans $\mathbb{C}^\nu \times \mathbb{P}^{\nu-1}$. Rappelons que $\mathcal{P}^f$ et $\mathcal{P}^f_M$ sont des faisceaux d'anneaux et que le faisceau $\mathcal{C}$ est un faisceau de modules à gauche sur $\mathcal{P}^f_M$.

§ 1. ENONCES DES THEOREMES ET PREMIERE REDUCTION

Soit P un opérateur pseudo-différentiel d'ordre μ sur un ouvert de $\mathbb{R}^\nu \times S^{\nu-1}$, de symbole principal $P_\mu(x,\xi)$.

Désignons par V sa variété caractéristique :

$$V = \{(x,\xi) \in \mathcal{U} \mid P_\mu(x,\xi) = 0\}$$

On fait les hypothèses:

1) V est une variété non singulière de codimension n dans $\mathcal{U}$.
2) $P_\mu(x,\xi)$ s'annule à l'ordre m sur V dans toutes les directions, c'est à dire : pour tout vecteur $(\Delta x,\Delta\xi)$ transverse en (x,ξ) à V on a :

$$P_\mu(x + \varepsilon\Delta x,\xi + \varepsilon\Delta\xi) = a\,\varepsilon^m + O(\varepsilon^{m+1}), \quad a \neq 0$$

3) V est involutive, et si $q_1(x,\xi),\ldots,q_n(x,\xi)$ sont n fonctions homogènes en ξ définissant V, en tous points (x,ξ) de V, les $dq_1,\ldots,dq_n$ et la 1-forme $\sum_{i=1}^{\nu} \xi_i\, dx_i$ sont $(n+1)$ vecteurs linéairement indépendants.

L'hypothèse 3) entraîne l'existence d'un feuilletage de V par des feuilles de dimension n, auxquelles sont tangents les champs de vecteurs hamiltoniens H_{q_i} (de composantes $(\frac{\partial q_i}{\partial \xi_k}, -\frac{\partial q_i}{\partial x_k})$), et ce feuilletage ne dépend pas des fonctions $q_1,\ldots,q_n$ définissant V. Ce sont ces n-feuilles que l'on appelle feuilles bicaractéristiques.

<u>Théorème 1</u> (propagation) : On fait les hypothèses 1), 2), 3) sur P. Soit u une microfonction sur $\mathcal{U}$ solution de $Pu = 0$.

Alors le support de u est union de n-feuilles bicaractéristiques.

<u>Corollaire</u> : Soit P un opérateur différentiel, u et v des microfonctions telles que $Pu = v$. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^\nu \times S^{\nu-1}$ où P vérifie les hypothèses 1,2,3 et tel que le support essentiel de v ne rencontre par $\mathcal{U}$. Alors le support essentiel de u est réunion de feuilles bicaractéristiques.

Théorème 2 (existence) : On fait les hypothèses 1) 2) 3) sur P. Soit $(x,\xi) \in \mathcal{U}$ et v une microfonction définie au voisinage de (x,ξ) . Alors il existe u, microfonction au voisinage de (x,ξ), solution de $Pu = v$.

De plus si on suppose $\mathrm{supp}(v) \subset \omega \times K$, ω voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}^\nu$, K compact de $S^{\nu-1}$, pour tout voisinage compact K' de K, il existe ω' voisinage ouvert de x_0, et u microfonction sur $\omega' \times S^{\nu-1}$ à support dans $\omega' \times K'$, solution de $Pu = v$.

Corollaire : Si P est un opérateur différentiel sur un ouvert $\omega \subset \mathbb{R}^\nu$, vérifiant les hypothèses précédentes sur $\omega \times S^{\nu-1}$, pour tout $x \in \omega$, on a:

$$P(\mathcal{B}/\mathcal{A})_x = (\mathcal{B}/\mathcal{A})_x$$

Exemples d'opérateurs vérifiant les hypothèse précédentes

1) Les opérateurs (pseudo-)différentiels de multiplicité complexe constante, la 1-forme canonique ne s'annulant pas sur la variété caractéristique réelle, et vérifiant l'hypothèse a) ou b) :

a) p, le symbole principal réduit de P est réel.

b) p est complexe, mais $d\,\mathrm{Re}\,p$ et $d\,\mathrm{Im}\,p$ sont linéairement indépendants et leur crochet de Poisson s'annule sur V.

2) Soient P_i des opérateurs différentiels de même ordre, $P = \sum_i P_i^{2m} + Q$ avec Q d'ordre inférieur, où on suppose les dP_i et la 1-forme canonique linéairement indépendants et les crochets de Poisson $\{P_i, P_j\}$ nuls sur V.

Dans le cas 1), ces résultats ont été démontrés par Sato-Kashiwara-Kawai [S-K-K, ch.3, § 21,22]. Dans le cadre distribution, ils ont également été démontrés par Anderson [1] et Hörmander [4].

Transformation canonique

Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ deux ouverts de $\mathbb{R}^\nu \times S^{\nu-1}$, $\tilde{\mathcal{U}}$ et $\tilde{\mathcal{U}}'$ les ouverts correspondants de $\mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}^\nu - \{0\})$ et soit T une transformation canonique homogène de $\tilde{\mathcal{U}}$ sur $\tilde{\mathcal{U}}'$. On sait [S-K-K, ch.2,§33,ch.3,§13] qu'il existe (de manière non unique) des isomorphismes $\tilde{T} : P^f(\mathcal{U}) \longleftrightarrow P^f(\mathcal{U}')$, $\mathcal{C}(\mathcal{U}) \longleftrightarrow \mathcal{C}(\mathcal{U}')$, compatibles avec les structures de modules et avec le symbole principal des opérateurs.

Les hypothèses et les conclusions étant de type local, et invariantes par transformation canonique, on peut supposer $\nu = n + p$, $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{n+p} \times S^{n+p-1}$, et V est défini par :

$$V = \{\xi_1 = \dots = \xi_n = 0\}$$

Changeons de notations et désignons par (x,t) un point de $\mathbb{R}^{n+p} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, (ξ,τ) un point de $\mathbb{R}^{n+p}-\{0\}$ ou son image dans S^{n+p-1}.

Les n-feuilles bicaractéristiques sont alors définies par $t = Cte$, $\tau = Cte$ (et $\xi = 0$).

En multipliant P par un opérateur pseudo-différentiel elliptique d'ordre $m - \mu$, ce qui est loisible, on peut supposer P d'ordre m, et on est ramené à :

- P opérateur pseudo-différentiel d'ordre m sur un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ du point $x = t = \xi = 0, \tau = (0,\dots,0,1)$ dans $\mathbb{R}^{n+p} \times S^{n+p-1}$, de symbole principal $P_m(x,t,\xi,\tau)$.
- $P_m(x,t,\xi,\tau) = 0 \Longleftrightarrow \xi = 0$
- $P_m(x,t,\xi,\tau) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x,t,\xi,\tau)\xi^\alpha$ où les a_α sont des symboles pseudo-différentiels homogènes d'ordre 0, et le polynôme en ξ

$$\sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x,t,0,\tau)\xi^\alpha$$

est elliptique en tout point $(x,t,0,\tau) \in \mathcal{U}$.

§ 2. OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS OPERANT SUR LES FONCTIONS HOLOMORPHES

Le calcul pseudo-différentiel dans le domaine complexe a été élaboré par Sato-Kashiwara-Kawaï [S-K-K, ch.2]. Nous développons ici un calcul précisé qui sera indispensable dans la suite.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}^\nu \times \mathbb{P}^{\nu-1}$, $\tilde{\mathcal{U}}$ l'ouvert correspondant de $\mathbb{C}^\nu \times (\mathbb{C}^\nu - \{0\})$, P un opérateur pseudo-différentiel sur $\mathcal{U}$ d'ordre μ :

$$P(z,\zeta) = \sum_{-\infty}^{\mu} p_k(z,\zeta)$$

supposons que $\mathcal{U}$ soit un voisinage du point (z^o,ζ^o), où $\zeta^o = (1,0,\dots,0)$.

On peut développer en séries les fonctions holomorphes $p_k(z,1,\zeta')$ $(\zeta = (\zeta_1,\zeta'))$:

$$p_k(z,1,\zeta') = \sum_{\alpha'\geq 0} a_{k,\alpha'}(z)\zeta'^{\alpha}$$

et on en déduit :

$$P(z,\zeta) = \sum_{\substack{-\infty < |\alpha| \leq \mu \\ \alpha' \geq 0}} a_\alpha(z)\zeta^\alpha$$

où $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_\nu$, $\alpha' = (\alpha_2,\dots,\alpha_\nu)$ $-\infty < \alpha_1 \leq \mu$.

Soit maintenant Σ un hyperplan complexe de $\mathbb{C}^\nu$ de normale $\zeta^0 \in \mathbb{P}^{\nu-1}$. Si k est un entier positif et f une fonction holomorphe au voisinage de Σ, désignons par $(D_{1\Sigma}^{-k})f$ la k-ième primitive de f en z_1, nulle à l'ordre k sur Σ, et posons :

$$P_\Sigma f = \sum_{\substack{-\infty < |\alpha| \leq \mu \\ \alpha' \geq 0}} a_\alpha(z) D_\Sigma^\alpha f$$

où $D_\Sigma^\alpha = D_{1\Sigma}^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \dots D_\nu^{\alpha_\nu}$ si $\alpha_1 < 0$.

<u>Proposition 1</u> : Si f est holomorphe au voisinage de z^0, il en est de même de $P_\Sigma f$.

<u>Proposition 2</u> : Si Q est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre ≤ 0 défini au voisinage de (z^0,ζ^0) :

$$(PQ)_\Sigma f = P_\Sigma(Q_\Sigma f)$$

<u>Remarques</u> : - Des calculs analogues à ceux faits ici mais dans le cas où α_1 ne prend qu'un nombre fini de valeurs négatives ont été faits par Wagschal [6].

- On pourrait , à l'aide de [S-K-K], définir P_Σ sur une variété analytique complexe dont Σ est une hypersurface, P étant défini au voisinage du fibré normal à cette hypersurface.

- Pour caractériser les ouverts dans lesquels P_Σ opère nous avons besoin d'introduire la définition suivante .

<u>Définition</u> : Nous dirons qu'un ouvert convexe Ω de $\mathbb{C}^\nu$ est k-Σ-plat si :

$$z \in \Omega, \ \tilde{z} \in \Sigma, \ |z_1 - \tilde{z}_1| \geq k \ |z_i - \tilde{z}_i| \qquad \forall \ i = 2,\dots,\nu$$

entraîne $\tilde{z} \in \Omega \cap \Sigma$.

<u>Proposition 3</u> : On suppose P défini sur $\Omega_o \times V_o$, où Ω_o est un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^\nu$ et V_o un voisinage de ζ^o dans $\mathbb{P}^{\nu-1}$. Il existe $k > 0$, $r > 0$ tel que : si $\Omega \subset\subset \Omega_o$ est un ouvert convexe de diamètre $\leq r$, si $\Omega \cap \Sigma$ est non vide et Ω est k-Σ-plat, on a :

$$f \in \mathcal{O}(\Omega) \Rightarrow P_\Sigma f \in \mathcal{O}(\Omega)$$

La démonstration de ce théorème utilise le noyau [S-K-K ch.2,§ 14]

$$K(z,w) = \sum_{\substack{|\alpha| = -\infty \\ \alpha' \geq 0}}^{\mu} a_\alpha(z)\, \Phi_\alpha(w)$$

où $\Phi_\alpha(w) = \Phi_{\alpha_1}(w_1)\dots\Phi_{\alpha_n}(w_n)$

$$\Phi_n(t) = \frac{(-1)^{n+1}}{2i\pi} \ \frac{n!}{t^{n+1}} \qquad n \geq 0$$

$$\Phi_{-n}(t) = \frac{-1}{2i\pi} \ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \ \mathrm{Log}\ t \qquad (-n) < 0$$

et une représentation

$$P_\Sigma f(z) = \int_\gamma K(z, z - z') f(z') dz'$$

où γ est un n-cycle "bien choisi" s'appuyant sur Σ.

<u>Remarque</u> : En utilisant la représentation intégrale ci-dessus, on peut dans les ouverts k-Σ-plats, estimer la croissance au bord de $P_\Sigma f$ par celle de f. Ces estimations sont fondamentales pour la démonstration du théorème 3.

La proposition 3 permet d'interpréter comment les opérateurs pseudo-différentiels opèrent sur le faisceau $\mathcal{C}$. En effet soit Γ un cône ouvert convexe de $\mathbb{R}^\nu$, dont le polaire Γ^o est contenu dans un voisinage d'ordre $<$ k de $\xi^o = (1,0,\dots,0) \in S^{\nu-1}$. Il est facile de voir que l'origine $0 \in \mathbb{C}^\nu$ admet un système fondamental de voisinages convexes W ayant la propriété :

$$\exists\ \Sigma = \{z \in \mathbb{C}^\nu \mid z_1 = i\sigma\} \ ,$$

tel que l'ouvert $(\mathbb{R}^\nu + i\Gamma) \cap W$ est k-Σ-plat. Soit maintenant f holomorphe dans $(\mathbb{R}^\nu + i\Gamma) \cap W$. Sa valeur au bord b(f) est une microfonction à support dans $\mathbb{R}^\nu \times \Gamma^o$.

<u>Proposition 4</u> :

$$b(P_\Sigma f) = P\, b(f)$$

§ 3. <u>THEOREME DE CAUCHY-KOWALEVSKI POUR LES OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS</u>

Changeons maintenant de notations et désignons par (z,w) un point de $\mathbb{C}^{n+p}$, par (ζ,θ) un point de $\mathbb{C}^{n+p}-\{0\}$ ou son image dans $\mathbb{P}^{n+p-1}$. Posons

$$z = (z_1, z'),\ w = (w', w_p),\ \zeta = (\zeta_1, \zeta')$$

et soit ζ^o et θ^o les vecteurs de composantes :

$$\zeta^o = (1,0,\dots,0),\ \theta^o = (0,\dots,0,1)$$

Soit P un opérateur pseudo-différentiel d'ordre $\mu \geq 0$, défini sur un ouvert $\Omega_o \times V_o$, où V_o est un voisinage de θ^o, de la forme :

$$P(z,w,\zeta,\theta) = \zeta_1^m + \sum_{0\leq |\alpha'| \leq m-1} a_{\alpha'}(z,w,\zeta',\theta)\zeta'^{\alpha'}\zeta_1^{m-|\alpha'|} +$$

$$+ \sum_{0 \leq k \leq m-1} b_k(z,w,\zeta',\theta)\zeta_1^{m-k-1}$$

où les $a_{\alpha'}$ sont des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre ≤ 0, les b_k

d'ordre $\leq k$.

Soit Σ un hyperplan complexe de $\mathbb{C}^{n+p}$ de normale θ^o, et H un hyperplan de normale ζ^o.

Nous dirons qu'un ouvert convexe Ω est z_1-k-Σ plat si

$$\begin{cases} (z,w) \in \Omega, \quad (\tilde{z},\tilde{w}) \in \Sigma \\ |w_p - \tilde{w}_p| \geq k|w_i - \tilde{w}_i| \quad i = 1,\dots,p-1 \\ |w_p - \tilde{w}_p| \geq k|z_j - \tilde{z}_j| \quad j = 2,\dots,n \\ \qquad z_1 = \tilde{z}_1 \end{cases}$$

entraîne $(\tilde{z},\tilde{w}) \in \Sigma \cap \Omega$.

Nous dirons qu'un ouvert convexe Ω est w-δ-H plat si

$$\begin{cases} (z,w) \in \Omega, \quad (\tilde{z},\tilde{w}) \in H \\ |z_1 - \tilde{z}_1| \geq \delta|z_j - \tilde{z}_j| \quad j = 2,\dots,n \\ \qquad w = \tilde{w} \end{cases}$$

entraîne $(\tilde{z},\tilde{w}) \in H \cap \Omega$.

<u>Théorème 3</u> : Sous les hypothèses précédentes sur P, il existe $R > 0$, $k > 0$, $\delta > 0$ tel que si Ω est un ouvert convexe de Ω_o avec

- $\Omega \subset\subset \Omega_o$, diamètre $(\Omega) \leq R$
- Ω est z_1-k-Σ plat
- Ω est w-δ-H plat

alors pour toute fonction g holomorphe dans Ω, et pour tout m-uple de fonctions (h), holomorphe dans $\Omega \cap H$, il existe une unique fonction f, holomorphe dans Ω, solution du problème de Cauchy

$$P_\Sigma f = g, \ \gamma_H(f) = (h)$$

où γ_H désigne les m premières traces de f sur H.

Si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}^{n+p}$, avec $0 \in \partial\Omega$, on note $\tilde{\mathcal{O}}(\Omega)$ l'espace des fonctions holomorphes dans Ω au voisinage de 0 :

$$\tilde{\mathcal{O}}(\Omega) = \varinjlim_{W \ni 0} \mathcal{O}(\Omega \cap W)$$

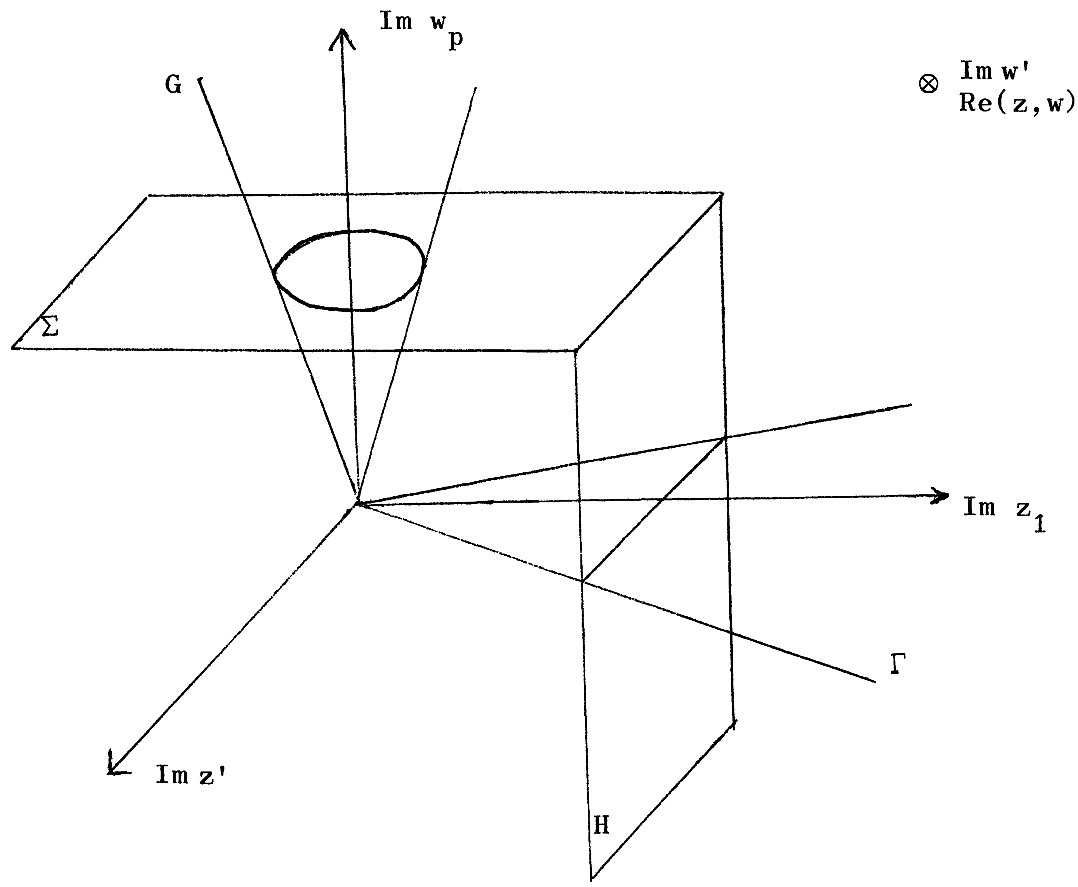
<u>Corollaire</u> : On fait les mêmes hypothèses sur P que dans le théorème 3. Il existe $k > 0$ et $\delta > 0$ tels que si G est un cône ouvert convexe de $\mathbb{R}^{n+p}$ dont le polaire G^o est contenu dans un voisinage d'ordre k de θ^o et si Γ est un cône ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ dont le polaire dans S^{n-1} est contenu dans un voisinage d'ordre δ de $\xi^o = (1,\dots,0)$, on ait :

1) $\forall\, g \in \tilde{\mathcal{O}}(\mathbb{R}^{n+p} + i(G+\Gamma))$, $\exists f \in \tilde{\mathcal{O}}(\mathbb{R}^{n+p} + i(G+\Gamma))$ avec $P\,b(f) = b(g)$

2) $\forall\, f \in \tilde{\mathcal{O}}(\mathbb{R}^{n+p} + i(G+\Gamma))$, $Pb(f) = 0$ entraîne $f \in \tilde{\mathcal{O}}(\mathbb{R}^{n+p} + i(G+\mathbb{R}^n))$.

(On identifie $\mathbb{R}^n$ a son image $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ dans $\mathbb{R}^{n+p}$).

La démonstration du corollaire consiste à construire un système fondamental de voisinages ouverts convexes W de 0 dans $\mathbb{C}^{n+p}$, et pour tout W des hyperplans complexes Σ et H de normales θ^o et ζ^o, tels que $(\mathbb{R}^{n+p} + i(G+\Gamma)) \cap W$ soit à la fois $z_1 - k - \Sigma$ plat et $w - \delta$ - H-plat.



§ 4. DEMONSTRATION DES THEOREMES 1 ET 2

Dans ce paragraphe P désigne un opérateur pseudo-différentiel défini au voisinage du point $(0,\tau^o) \in \mathbb{R}^{n+p} \times S^{n+p-1}$, dont le symbole principal s'écrit :

$$P_m(x,t,\xi,\tau) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x,t,\xi,\tau)\xi^\alpha$$

les a_α étant des symboles homogènes d'ordre 0, et le polynôme en ξ $\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x,t,0,\tau)\xi^\alpha$ étant elliptique.

Proposition 5 : Il existe $k>0$, tel que si G est un cône ouvert convexe de $\mathbb{R}^{n+p}$ dont le polaire est contenu dans un voisinage d'ordre k de τ^o, pour tout cône ouvert convexe Γ de $\mathbb{R}^n$ on a :
1) $\forall g \in \tilde{\mathcal{O}}(\mathbb{R}^{n+p}+i(G+\Gamma))$, $\exists f \in \tilde{\mathcal{O}}(\mathbb{R}^{n+p}+i(G+\Gamma))$, solution de $Pb(f) = b(g)$.
2) $\forall f \in \tilde{\mathcal{O}}(\mathbb{R}^{n+p}+i(G+\Gamma))$, $Pb(f) = 0$ entraîne $f \in \tilde{\mathcal{O}}(\mathbb{R}^{n+p}+i(G+\mathbb{R}^n))$
(En fait on peut démontrer la proposition 5 sous l'hypothèse plus faible où $\Sigma\, a_\alpha(x,t,o,\tau)\,\xi^\alpha \neq 0$ pour tout ξ normal à Γ).

La proposition 5 résulte du corollaire du théorème 3 et des deux résultats suivants :
1) Pour tout $\varepsilon>0$, il existe un nombre fini de cônes ouverts convexes Γ_j dont les polaires Γ_j^o ont des diamètres $\leq \varepsilon$, avec $\Gamma = \bigcap_j \Gamma_j$, tels que si W est un voisinage de Stein de 0 :

$$\forall f \in \mathcal{O}((\mathbb{R}^{n+p}+i(G+\Gamma)) \cap W),\ \exists f_j \in \mathcal{O}((\mathbb{R}^{n+p}+i(G+\Gamma_j)) \cap W),\ f = \sum_j f_j .$$

2) $\forall\, \xi \in S^{n-1}$, il existe des opérateurs pseudo-différentiels E_ξ et Q_ξ au voisinage de $(0,\tau^o)$, l'opérateur E_ξ étant inversible d'ordre 0, avec $P = E_\xi . Q_\xi$, et tels que si $\xi = (1,0,\ldots,0)$, l'opérateur Q_ξ vérifie les hypothèses du théorème 3 (en particulier est polynômial en ξ_1).

Ceci résulte des hypothèses faites sur P et du théorème de préparation de Weierstrass pour les opérateurs pseudo-différentiels [S-K-K, ch.2, §22].

Proposition 6 : Il existe $k > 0$ tel que si G est un cône ouvert convexe de $\mathbb{R}^{n+p}$ dont le polaire est contenu dans un voisinage d'ordre k de τ^o, on a :

1) $\forall\, g \in \tilde{\mathcal{O}}(\mathbb{R}^{n+p} + iG)$ $\exists\, f \in \tilde{\mathcal{O}}(\mathbb{R}^{n+p} + iG)$ avec $P\,b(f) = b(g)$

2) $\forall\, f \in \tilde{\mathcal{O}}(\mathbb{R}^{n+p} + iG)$, $Pb(f) = 0$ entraîne $f \in \tilde{\mathcal{O}}(\mathbb{R}^{n+p} + i(G + \mathbb{R}^n))$.

La proposition 6 résulte de la proposition 5 et du lemme ci-dessous.

Soient $A_n = \{+1,-1\}^n$, $C_n = \{+1,0,-1\}^n$ et $B_n = \{\beta \in C^n \mid \beta_i \neq 0$ excepté pour un indice $i\}$.

Pour $i = 1,\dots,n$, soit $\hat{\imath}$ l'application de A_n dans B_n:

$$\hat{\imath}((\alpha_1,\dots,\alpha_i,\dots,\alpha_n)) = (\alpha_1,\dots,0,\dots,\alpha_n)$$

Associons à $\alpha \in A_n$ et $\beta \in B_n$ les ouverts

$$\Gamma_\alpha = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \forall i,\ \alpha_i y_i > 0\}$$

$$\Delta_\beta = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \forall i,\ \beta_i \neq 0 \Rightarrow \beta_i y_i > 0\}$$

Lemme : Soit W un voisinage de Stein de 0 dans $\mathbb{C}^{n+p}$, G un cône ouvert convexe de $\mathbb{R}^{n+p}$

1) $\forall\, f \in \mathcal{O}((\mathbb{R}^{n+p} + iG) \cap W)$, $\exists f_\alpha \in \mathcal{O}((\mathbb{R}^{n+p} + i(G + \Gamma_\alpha)) \cap W)$, $f = \sum_{\alpha \in A_n} f_\alpha$.

2) Si $f_\alpha \in \mathcal{O}((\mathbb{R}^{n+p} + i(G + \Gamma_\alpha)) \cap W)$, $\alpha \in A_n$, et $\sum_{\alpha \in A_n} f_\alpha = 0$ dans $\mathbb{R}^{n+p} + iG$, il existe pour tout $\beta \in B_n$, $f_\beta \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^{n+p} + i(G + \Delta_\beta)) \cap W)$ avec $f_\alpha = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f_{\hat{\imath}(\alpha)}$.

Fin de la démonstration des théorèmes 1 et 2

- La deuxième partie de la proposition 6 entraîne le théorème 2 (compte tenu de la flasquitude du faisceau $\mathcal{C}$).

- Soit u une microfonction au voisinage de $(0,\tau^o)$, solution de $Pu = 0$. Le théorème d'existence permet de se ramener au cas $\operatorname{supp}(u) \subset \mathbb{R}^{n+p} \times K$, où K est un voisinage compact assez petit de τ^o. Il existe alors un cône ouvert convexe de $\mathbb{R}^{n+p}$ et une fonction f holomorphe dans $(\mathbb{R}^{n+p} + iG) \cap W$ avec $b(f) = u$.

La première partie de la proposition 6 prouve donc :

Proposition 7 : Soit u une microfonction sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ au voisinage de $(0,\tau^o) \in \mathbb{R}^{n+p} \times S^{n+p-1}$, solution de $Pu = 0$.

Il existe une microfonction $\tilde{u}$ sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^p$, au voisinage de $(0,\tau^o) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^p \times S^{2n+p-1}$, solution du système de Cauchy-Rieman partiel $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} \tilde{u} = 0$, $(i = 1,\dots,n)$, dont la restriction à $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ est u.

Le théorème de propagation résulte alors de ce que la "restriction au réel" d'une microfonction partiellement holomorphe (i.e. solution du système de Cauchy Rieman partiel) est une opération injective, et du théorème de propagation pour les microfonctions partiellement holomorphes [S-K-K, ch.3, §22].

BIBLIOGRAPHIE

[1] K. G. Anderson : Analytic wave front sets for solutions of linear partial differential equations of principal type, Trans. Amer. Mat. Soc. 176 (1973) 5-22.

[2] J. M. Bony, P. Schapira : Existence et prolongement des solutions holomorphes des équations aux dérivées partielles. Inventiones Math. 17 (1972) 95-105.
Solutions hyperfonctions du problème de Cauchy, Lecture Notes in Math. 287, Springer (1973), 82-98.

[3] L. Boutet de Monvel, P. Krée : Pseudo-differential operators and Gevrey classes. Ann. Inst. Fourier 17 (1967) 295-323.

[4] L. Hörmander : Uniqueness theorem and wave front sets for solutions of linear differential equations with analytic coefficients. Comm. Pure Appl. Math. 24 (1971) 617-704.

[S-K-K] M. Sato, M. Kashiwara, T. Kawai : Hyperfunctions and pseudo-differential equations. Lect. Notes in Math. 287, Springer (1973), 265-529.

[6] C. Wagschal : Une généralisation du problème de Goursat pour des systèmes d'équations intégro-différentielles holomorphes ou partiellement holomorphes, à paraître au Journal de Mathématiques Pures et Appliquées.