Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

L. Boutet de Monvel

Opérateurs hypoelliptiques à caractéristiques doubles

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1973-1974), exp. nº 1 et 2, p. 1-16

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1973-1974____A1_0>

CENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

SEMINAIRE GOULAOUIC-SCHWARTZ 1973-1974

OPERATEURS HYPOELLIPTIQUES A CARACTERISTIQUES DOUBLES

par L. BOUTET DE MONVEL

Exposés I et II

16 et [illegible] Octobre 1973

Le but de ces conférences est de présenter quelques résultats récents d'hypoellipticité concernant les opérateurs différentiels (ou pseudo-différentiels) à caractéristiques doubles. Le matériel présenté ici est issu d'un travail en collaboration avec F. Trèves ([2], [3], [4]). Certains résultats ont été trouvés simultanément par S. Sjöstrand ([13], [14]), généralisant des résultats de M. I. Visik et V. V. Grusin ([7], [8], [9]). Les énoncés ci-dessous sont simples, et sans aucun doute ils peuvent être démontrés par des méthodes d'inégalités a priori assez grossières. Je préfère ici donner des indications sur la construction de parametrix pour ces opérateurs ; cette méthode, si elle est plus longue, donne aussi bien sûr des renseignements plus complets ; elle est aussi plus conforme au goût du jour, qui demande des démonstrations plus constructives quand cela est possible ♦ J'en profiterai aussi pour faire un usage systématique des opérateurs intégraux de Fourier et des transformations canoniques de L. Hörmander. Bien qu'ils ne soient pas non plus indispensables, ils s'avèrent, comme bien on pense, un outil d'une très grande souplesse. Il ne saurait être question, ici, de donner des démonstrations complètes ; je me contenterai de décrire les résultats, et de donner quelques indications sur les démonstrations, en renvoyant aux articles cités ci-dessus pour plus de détails.

§ 0. NOTATIONS ET CONVENTIONS

On adopte les notations usuelles pour les espaces de distributions, multi-indices, etc...

Soit X un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Un symbole sur X est une fonction C^∞ $a(x,\xi)$ sur $T^*X = X \times \mathbb{R}^n$, "qui ne croit pas trop vite" pour $\xi \to \infty$ (il convient de préciser). Si a est un symbole, on note $a(x,D)$ l'opérateur pseudo-différentiel défini par

$$(0.1) \qquad a(x,D)f = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\xi} a(x,\xi)\, \hat{f}(\xi)\, d\xi$$

où $\hat{f}$ désigne la transformée de Fourier de f.

♦ Faut quand même pas se faire trop d'illusions !

Si S est un ensemble de symboles, nous noterons OPS l'ensemble des opérateurs pseudo-différentiels de la forme $a(x,D)+R$, avec $a \in S$, R étant un opérateur à noyau C^∞ (de dégré $-\infty$).

En particulier $OPS^{-\infty}$ est l'ensemble des opérateurs à noyau C^∞.

Les opérateurs que nous voulons étudier ici seront toujours (mod.$OPS^{-\infty}$) de la forme $a(x,D)$ où a admet un développement asymptotique (au sens de [10]).

(0.2) $$a(x,\xi) \sim \sum_{0}^{\infty} a_{m-j}(x,\xi)$$

où a_{m-j} est homogène de degré $m-j$ (j entier ≥ 0) en ξ. Nous dirons qu'un tel opérateur est homogène (de degré m) ; c'est le cas par exemple d'un opérateur différentiel, et des parametrix d'un opérateur différentiel elliptique. Le symbole (partie principale) de $A = a(x,D)$ est alors $\sigma(A) = a_m(x,\xi)$; c'est une fonction homogène de degré m sur T^*X. Nous réservons à la fonction elle même (ou plutôt à sa classe mod. $S^{-\infty}$) le nom de symbole complet de $A = a(x,D)$; celui-ci dépend du choix des coordonnées locales.

Bien sûr, il y a d'autres classes d'opérateurs pseudo-différentiels, par exemple la classe $OPS^m_{\rho,\delta}$ de [10], ou la classe $OPS^m_{\Phi,\varphi}$ de [1]. De tels opérateurs n'interviendront ici que comme outils (partitions de l'unité, approximation de l'unité par troncature et régularisation) ou comme parametrix des opérateurs étudiés.

Rappelons qu'on a pour les symboles les formules suivantes :

(0.3) $$\begin{aligned} \sigma(AB) &= \sigma(A)\ \sigma(B) \\ \sigma(A^*) &= \overline{\sigma(A)} \quad \text{(ou } \sigma(A)^* \text{ s'il s'agit d'un système)} \\ \sigma([A,B]) &= \frac{1}{i}\{\sigma(A),\ \sigma(B)\} \end{aligned}$$

où $[A,B] = AB - BA$ désigne le commutateur de A et B (il est de degré $m+m'-1$ si A est de degré m et B de degré m'), et $\{f,g\}$ est le crochet de Poisson :

$$(0.4) \qquad \{f,g\} = \Sigma \frac{\partial f}{\partial \xi_j}\frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial g}{\partial \xi_j}$$

L. Hörmander a décrit dans [10] les opérateurs intégraux de Fourier. Un tel opérateur est associé à une transformation canonique homogène $\phi : T^*X - \{0\} \to T^*Y - \{0\}$ (i.e. ϕ est C^∞, homogène de degré 1, compatible avec les formes canoniques de T^*X et T^*Y (i.e. $\phi^*(\Sigma\, d\eta_j \wedge dy_j) = \Sigma\, d\xi_j \wedge dX_j$), ou, ce qui revient au même, avec les crochets de Poisson). En particulier on peut définir les opérateurs intégraux de Fourier elliptiques (ϕ est alors un isomorphisme). Si F est un tel opérateur, il admet une parametrix (inverse mod. les opérateurs à noyau C^∞) que nous noterons F^{-1} ; et si alors A est un opérateur pseudo-différentiel homogène, il en est de même de $F A F^{-1}$, et on a

$$(0.5) \qquad \sigma(F A F^{-1}) = \sigma(A) \circ \phi$$

(ces formules sont encore valables pour des classes plus larges d'opérérateurs pseudo-différentiels par exemple $OPS^m_{\rho,\delta}$ si $0 \leq \delta = 1 - \rho < 1/2$ - mais ne sont plus valables pour les opérateurs $A \in OPS^m_{1/2,1/2}$, dont nous aurons à nous servir ici).

Les constructions rappelées ci-dessus peuvent être localisées sur la sphère cotangente ; on a par exemple, pour les symboles complets, la formule $a(x,D) \circ b(x,D) = c(x,D)$ avec

$$c(x,\xi) \sim \sum_\alpha \frac{i^{-|\alpha|}}{\alpha!} \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\alpha a \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha b$$

et des formules analogues pour A^*, $[A,B]$, $F A F^{-1}$. Ainsi, dans un ouvert conique $U \subset T^*X-\{0\}$, la classe (mod.$S^{-\infty}$) du symbole complet de $A \circ B$ (resp. de A^*, $[A,B]$, $F A F^{-1}$) ne dépend que des restrictions à U de celles de A et B. Les classes mod. $OPS^{-\infty}$ d'opérateurs pseudo-différentiels engendrent donc un faisceau (d'algèbres non commutatives) sur la sphère cotangente SX, et il est souvent commode, pour étudier un opérateur A, de commencer par en faire une étude locale sur SX. Pour cela il suffit que A, et, au besoin, les opérateurs intégraux de Fourier qui serviront à le transmuer, soient définis dans de petits ouverts coniques de T^*X. (Ainsi un opérateur de symbole réel, et à caractéristiques simples, est localement (moyennant une transformation intégrale de Fourier elliptique) isomorphe au produit de $\frac{\partial}{\partial x_n}$ par un opérateur elliptique - de la même façon qu'un champ de vecteur non nul est localement (moyennant un changement de coordonnées) isomorphes à $\frac{\partial}{\partial x_n}$. Cf. [5]).

On appellera support d'un opérateur pseudo-différentiel A le plus grand cône fermé de $T^*X-\{0\}$ hors duquel le symbole complet de A est nul (mod. $S^{-\infty}$). On fait une localisation analogue pour les distributions : on dit qu'une distribution f est C^∞ dans un voisinage conique de $(x,\xi) \in T^*X-\{0\}$ (ou simplement C^∞ près de (x,ξ) si pour tout opérateur pseudo-différentiel A de support assez voisin de (x,ξ), on a $Af \in C^\infty$ (de façon équivalente : s'il existe un opérateur pseudo-différentiel A elliptique en (x,ξ) tel que $AF \in C^\infty$). On appelle spectre singulier de f et on note WF(f) (wave front set) le cône (fermé) des points $(x,\xi) \in T^*X-\{0\}$ près desquels f n'est pas C^∞.

Les distributions mod. C^∞ engendrent un faisceau noté $\mathcal{M}f$ sur la sphère cotangente SX : la fibre en (x,ξ) est l'espace de toutes les distributions sur X mod. celles qui sont C^∞ près de (x,ξ). Un opérateur pseudo-différentiel (en fait sa classe mod. $OPS^{-\infty}$) définit un opérateur local (morphisme de faisceaux) sur $\mathcal{M}f$.

§ 1. DESCRIPTION DES RESULTATS

Soit X un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (ou plus généralement une variété différentielle C^∞). Soit Σ une sous-variété conique C^∞ de $T^*X-\{0\}$ (fibré cotangent privé de sa section nulle). Localement, Σ peut être définie par ν équations C^∞, homogènes de degré 0, indépendantes : $u_1 = \dots u_\nu = 0$. En chaque point de Σ, le rang $2\nu'$ de la matrice de crochets de Poisson ((0.4)) $\{u_i,u_j\}$ est bien défini. Nous nous intéresserons ici surtout aux deux cas extrêmes : d'abord le cas $\nu' = 0$, autrement dit $\{u_i,u_j\} = 0$ sur Σ pour $i, j \leq \nu$; on dit alors que Σ est involutive (nous exigerons en outre que le vecteur radial $r\frac{\partial}{\partial r} = \Sigma\, \xi_j \frac{\partial}{\partial \xi_j}$ ne soit pas orthogonal à Σ pour la forme canonique $\Sigma\, d\xi_j \wedge dx_j$, ou, ce qui revient au même, que $r\frac{\partial}{\partial r}$ soit linéairement indépendant des champs hamiltoniens $H_{u_j} = \sum_k \frac{\partial u_j}{\partial \xi_k}\frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{\partial u_j}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial \xi_k}$)
D'autre part le cas $2\nu' = \nu$, autrement dit la matrice $\{u_i,u_j\}$ est non dégénérée sur Σ ; <u>Σ est alors symplectique</u> (i.e. la forme $\Sigma\, d\xi_j \wedge dx_j|\Sigma$ est non dégénérée). Les cas intermédiaires ne sont pas traités dans [4], mais

sont sans soute susceptibles d'être analysés par les mêmes méthodes.

Nous nous intéressons aux opérateurs différentiels ou pseudo-différentiels (homogènes) P qui ont les propriétés suivantes :

(1.1) Le symbole $\sigma(P) = p_m(x,\xi)$ est elliptique (i.e. non nul) hors de Σ et s'annule à l'ordre 2 sur Σ. En outre on a au voisinage de tout point de Σ, avec les notations ci-dessus

$$\sigma(P) = p_m(x,\xi) = \Sigma\, a_{ij}\, u_i u_j$$

où les a_{ij} sont des fonctions homogènes (de degré $m = \deg P$), C^∞, et où la forme quadratique de matrice (a_{ij}) est non dégénérée, sans zéro réel non trivial. Si $\nu = \operatorname{codim} \Sigma = 2$, on exigera en outre que le nombre d'enroulements autour de 0 de l'application $\mathbb{R}^2 - \{0\} \to \mathbb{C} - \{0\}$ définie par cette forme quadratique soit nul.

Il convient alors d'introduire, pour chaque point $(x,\xi) \in \Sigma$, un certain nombre d'invariants attachés à P.

(1.2) L'ensemble $\Gamma_{x,\xi}$ des valeurs de la forme quadratique $\Sigma\, a_{ij} U_i U_j$ ci-dessus (1.1) ; c'est un angle convexe de $\mathbb{C}$.

Le champ hamiltonien $H_P = \Sigma \dfrac{\partial p_m}{\partial \xi_j}\dfrac{\partial}{\partial x_j} - \dfrac{\partial p_m}{\partial x_j}\dfrac{\partial}{\partial \xi_j}$ du symbole $\sigma(P) = p_m$ de P s'annule (à l'ordre 1) sur Σ. On peut donc parler de sa dérivée au point $(x,\xi) \in \Sigma$: c'est un endomorphisme linéaire $A \in L(T_{x,\xi}(T^*X))$. On constate que A a compte tenu des multiplicités, $2\nu'$ valeurs propres non nulles, de la forme $\pm 2i\lambda_j$, avec

(1.3) $$\lambda_j \in \Gamma_{x,\xi} \quad (j = 1, \dots, \nu')$$

($2\nu'$ est le rang de la matrice $\{u_j, u_k\}$ au point (x,ξ), comme ci-dessus).

Nous introduisons enfin la quantité suivante (c'est une fonction homogène de degré $m-1$ sur Σ).

(1.4) $$I_2'(P) = p_{m-1} - \frac{1}{2i}\, \Sigma \frac{\partial^2 p_m}{\partial \xi_k \partial X_k} + \sum_1^{\nu'} \lambda_j$$

(Si $\nu' \neq 0$, cette quantité n'est pas le "second invariant" de P ; elle est plutôt à rapprocher de la constante de Melin [11]).

On a alors les résultats suivants : d'abord dans le cas où Σ est involutive (analogue de l'opérateur de la chaleur).

Théorème 1 : Equivalence de
(i) $Pf \in H^s \Rightarrow f \in H^{s+m-1}$
(ii) Pour tout $(x,\xi) \in \Sigma$, on a $I_2'(P) \notin -\Gamma_{x,\xi}$
(iii) P a une parametrix, du type décrit plus loin.

Dans le cas où Σ est symplectique, on a le résultat suivant

Théorème 2 : Equivalence de
(i) $Pf \in H^s \Rightarrow f \in H^{s+m-1}$
(ii) Pour tout $(x,\xi) \in \Sigma$ et tout multi-indice α, on a $I_2'(P) + \alpha.\lambda \neq 0$
(où $\lambda = (\lambda_1 \ldots \lambda_{\nu'})$ est la suite de nombres de (1.3) et
$\alpha.\lambda = \alpha_1\lambda_1 + \ldots \alpha_{\nu'}\lambda_{\nu'}$).
(iii) P a une parametrix, du type décrit plus loin.

Dans les deux cas P est hypoelliptique, et vérifie une inégalité a priori qui comporte la perte d'une dérivée quand on la compare aux inégalités elliptiques. Dans le deuxième cas P se comporte de façon analogue au carré de l'opérateur $\frac{\partial}{\partial x_1} + ix_1\frac{\partial}{\partial x_2}$ dans la région $\xi_2>0$(où cet opérateur est hypoelliptique avec "perte de 1/2 dérivées"). Cette régularité avec "perte d'une dérivée" est le mieux qu'on puisse espérer pour un opérateur à caractéristiques doubles. Ici elle est aussi vraie localement, et est donc tout à fait distincte de la propriété de régularité des opérateurs réels à caractéristiques simples, pour laquelle il faut faire une hypothèse de régularité sur les données de Cauchy de f (si P est un opérateur réel de degré m, à caractéristiques simples, si $Pf \in H^s$ et si WF(f) est assez petit, alors $f \in H^{s+m-1}$.

§ 2. EXEMPLES

Nous ne donnerons pas ici d'indications sur la preuve des théorèmes ci-dessus, et nous contenterons de décrire deux exemples. Dans le cas général, on peut se ramener à ces exemples, mod. des perturbations qu'on peut absorber, par une transformation canonique convenable (on peut aussi construire directement une parametrix)

a. Cas où Σ est involutive (analogue de l'opérateur de la chaleur).

Soient a_j $(j = 1\dots\nu)$ des nombres complexes non nuls, appartenant tous à un même cône convexe $\Gamma \subset \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$ et posons

(2.1) $$P_1 = \sum_1^{\nu} - a_j\left(\frac{\partial}{\partial X_j}\right)^2 + \frac{b}{i}\frac{\partial}{\partial X_n}$$

Il est élémentaire de prouver que P est hypoelliptique dans la région $\xi_n > 0$ si et seulement si $b \notin -\Gamma$. P admet alors pour parametrix (dans la région $\xi_n > 0$) l'opérateur $q(x,D)$, avec

(2.2) $$q(x,\xi) = \left(\sum_1^{\nu} a_j\xi_j^2 + b\xi_n\right)^{-1}$$

Ici Σ est le cône $\xi_1 = \dots\xi_\nu = 0$; on a $\Gamma_{x,\xi} = \Gamma$ pour tout (x,ξ), et $I_2'(P) = b$.

b. Cas où Σ est symplectique

Notons $(t,x) = (t_1\dots t_\nu x_1\dots x_{n-\nu}) \in \mathbb{R}^\nu\times\mathbb{R}^{n-\nu}$ la variable de $\mathbb{R}^n$, par (τ,ξ) la variable duale et soit

(2.3) $$Z_j = (2|D_x|)^{-1/2}\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t_j} + it_j|D_x|\right)$$

$$P_2 = \sum_1^{\nu} \lambda_j Z_j Z_j^* + b$$

où $|D_x| = \left(-\Sigma\left(\frac{\partial}{\partial X_j}\right)^2\right)^{1/2}$ (c'est un opérateur pseudo-différentiel dans la région $\xi \neq 0$), et où b et les λ_j sont des nombres complexes, et les λ_j appartiennent tous à un même cône convexe $\Gamma \subset \mathbb{C}$.

P_2 est du type décrit au § 1, Σ étant le cône (symplectique) $t = \tau = 0$. On a $\Gamma_{x,\xi} = \Gamma$, $I_2'(P) = b$, pour tout (x,ξ), et les λ_j sont bien eux-mêmes les nombres introduits en (1.4). Pour étudier P_2, il est indiqué de faire une transformation de Fourier par rapport à x, et un développement en fonctions de Hermite par rapport à t. Posons

$$(2.4)\qquad \begin{cases} h_k(u) &= \pi^{-1/4}(2^k k!)^{-1/2}(\frac{\partial}{\partial u} - u)^k \exp - \frac{u^2}{2} \\ h_\alpha(t,\xi) &= |\xi|^{\nu/4} h_{\alpha_1}(t_1|\xi|^{1/2}) \ldots h_{\alpha_\nu}(t_\nu|\xi|^{1/2}) \end{cases}$$

On associe à h_α l'opérateur ("de Hermite") $H_\alpha : C_o^\infty(\mathbb{R}^{n-\nu}) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$ défini par

$$\widehat{\widehat{H_\alpha u}} = h_\alpha(t,\xi)\hat{u}(\xi)$$

(où $\widehat{\widehat{H_\alpha u}}$ désigne la transformée de Fourier partielle par rapport à x).

Il résulte aisément de la définition des Z_j et des H_α qu'on a

$$Z_j H_\alpha = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha_j + 1}\; H_{\alpha+(j)}$$

$$Z_j^* H_\alpha = i\sqrt{\alpha_j}\; H_{\alpha-(j)}$$

(où (j) désigne le multi-indice (0...010...0), avec 1 à la j-ième position), et par suite

$$P.H_\alpha = (b + \alpha.\lambda)H_\alpha$$

(avec $\alpha.\lambda = \alpha_1\lambda_1 + \ldots \alpha_\nu\lambda_\nu$) .

On a ainsi "diagonalisé" P. La condition (iii) du théorème 2 signifie ici que les coefficients diagonaux $(\alpha.\lambda + b)$ ne s'annulent jamais. (Il n'est pas difficile, pour cet exemple, de prouver l'équivalence des assertions (i) et (ii) du th.2, compte tenu du fait que les H_α sont isométriques pour les normes L^2. On peut aussi écrire assez explicitement une formule pour la parametrix de P_2).

§ 3. DESCRIPTION DES PARAMETRIX

Nous avons déjà remarqué, dans un cas particulier, la parametrix de l'analogue P_1 de l'opérateur de la chaleur. Dans tous les cas, la parametrix a un aspect analogue : plus précisément, on peut toujours définir localement Σ par ν équations C^∞, homogènes de degré 0, $u_1 = \dots u_\nu = 0$. Complétons par des fonctions $v_1,\dots,v_{n-\nu-1},r$ (où les v_j sont homogènes de degré 0, et r homogène de degré 1) de façon à avoir un système de coordonnées locales dans $T^*X - \{0\}$. Alors la parametrix sera de la forme $q(x,D)$, où $q(x,\xi)$ a (pour $\xi \to \infty$) le même comportement "semi-homogène" que $r^{-m}(\sum_1^\nu u_j^2 + \frac{1}{r})^{-1}$.

Il est commode de préciser et de généraliser comme suit : posons (avec les notations introduites ci-dessus)

(3.1) $$d_\Sigma = (\sum_1^\nu u_j^2 + \frac{1}{r})^{1/2}$$

Soit U un cône ouvert dans $T^*X - \{0\}$ (dans lequel les u_j, v_j et r sont définis). On note $S^{m,k}(U;\Sigma)$ l'ensemble des fonctions $a \in C^\infty(U)$ telles que pour tous champs de vecteurs $X_1\dots X_p Y_1\dots Y_q$, à coefficients C^∞, homogènes de degré 0 (i.e. combinaisons à coefficients C^∞ homogènes de degré 0 des $\frac{\partial}{\partial x_j}$ et $|\xi|^{-1}\frac{\partial}{\partial \xi_j}$) où les X_j sont tangents à Σ, on ait

(3.2) $$|X_1\dots X_p Y_1\dots Y_q a| \lesssim r^m d_\Sigma^{k-q}$$

(le signe $f \lesssim g$ signifie que pour tout compact $K \subset T^*X - \{0\}$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $C > 0$ tel que $f \leq Cg$ pour $(x,\xi) \in \mathbb{R}_+K$, $|\xi| > \varepsilon$).

Par exemple la fonction $\exp(-\frac{1}{2} r \sum u_j^2)$ appartient à $S^{0,0}$, et plus généralement toute fonction "semi-homogène" (homogène lorsqu'on attribue aux u_j, v_j, r les poids respectifs $-\frac{1}{2}, 0, 1$), satisfaisant à des conditions de croissance convenables près de $r = 0$, appartient à un tel espace (cf.[4] pour plus de détails).

Nous noterons $OPS^{m,k}(X,\Sigma)$ les opérateurs pseudo-différentiels qui sont (mod $OPS^{-\infty}$) de la forme $a(x,D)$, avec $a \in S^{m,k}(T^*X,\Sigma)$. Ils sont de type (1/2,1/2), avec la notation de Hörmander [10], donc ne peuvent pas donner lieu à un calcul symbolique comparable à celui des opérateurs pseudo-différentiels habituels. Ils jouissent cependant des propriétés suivantes :

-composés : si $A \in OPS^{m,k}$ et $B \in OPS^{m',k'}$, on a $AB \in OPS^{m+m',k+k'}$, $[A,B] \in OPS^{m+m'-1,k+k'-2}$,

-adjoint : on a $A^* \in OPS^{m,k}$

(en revanche le transposé ${}^tA$ est dans $OPS^{m,k}(X,-\Sigma)$ où $-\Sigma$ désigne le cône opposé à Σ).

- Enfin ces classes d'opérateurs sont stables par changement de coordonnées (pourvu qu'on interprète Σ comme un cône dans le cotangent). Plus généralement, si $A \in OPS^{m,k}(X,\Sigma)$ et si F est un opérateur intégral de Fourier elliptique associé à une transformation canonique ϕ, on a $F A F^{-1} \in OPS^{m,k}(X,\phi\Sigma)$

Je renvoie à [4] pour la démonstration de ces assertions.

Notons qu'on a $OPS^{o,o}(X,\Sigma) \subset OPS^{o}_{1/2,1/2}$ (parce qu'on a $d_\Sigma^{-1} \lesssim r^{1/2}$). Il en résulte que si $A \in OPS^{o,o}(X,\Sigma)$ est propre ♦, il opère continument sur L^2_{loc} (théorème de Calderon et Vaillancourt). Il est commode d'introduire des espaces $H^{m,k}(X,\Sigma)$ qui jouent par rapport à nos opérateurs le même rôle que les espaces de Sobolev H^s_{loc} par rapport aux opérateurs pseudo-différentiels :

(3.3) <u>Soit</u> f <u>une distribution. On dit que</u> f <u>est de classe</u> $H^{m,k}(X,\Sigma)$ (<u>resp. de classe</u> $H^{m,k}(X,\Sigma)$ <u>au voisinage de</u> $(x,\xi) \in T^*X - \{0\}$) <u>si pour tout</u> $A \in OPS^{m,k}(X,\Sigma)$, <u>propre</u> (<u>resp. et de support assez voisin de</u> (x,ξ)) <u>on a</u> $Af \in L^2_{loc}$.

On note encore $H^{m,k}(X,\Sigma)$ l'ensemble des distributions de classe $H^{m,k}(X,\Sigma)$. Il est naturellement muni d'une topologie localement convexe, et si $A \in OPS^{m',k'}$ est propre, il est continu $H^{m,k} \to H^{m-m',k-k'}$.

On a l'inclusion $S^{m,k} \subset S^{m',k'}$ si et seulement si $m \leqslant m'$ et $m-k/2 \leqslant m'-k'/2$ (ceci résulte des inégalités $r^{-1/2} \lesssim d_\Sigma \lesssim 1$, qui sont les meilleurs possibles). Il en résulte qu'on a $H^{m,k} \subset H^{m',k'}$ si et seulement si $m \geqslant m'$ et $m-k/2 \geqslant m'-k'/2$. En outre si $m > m'$ et

---

♦ i.e. si $a(x,y) \in \mathcal{D}'(X\times X)$ est le noyau de A, les deux projections supp $a \to X$ sont propres.

$m - k/2 > m' - k'/2$, les parties bornées de $H^{m,k}$ constituées de distributions dont le support est contenu dans un compact fixé de X sont relativement compactes dans $H^{m',k'}$.

Il est commode d'introduire pour nos opérateurs plusieurs notions de développements asymptotiques (approximations successives). On a les résultats suivants :

(3.4) Soit $A_j \in OPS^{m-j/2,k}$. Il existe $A \in OPS^{m,k}$ tel que $A - \sum_{j<N} A_j \in OPS^{m-N/2,k}$; on écrit $A \sim \sum A_j$. Deux tels opérateurs diffèrent par un opérateur de degré $-\infty$.

(3.5) Soit $A_j \in OPS^{m,k+j}$. Il existe $A \in OPS^{m,k}$ tel que $A - \sum_{j<N} A_j \in OPS^{m,k+N}$. Deux tels opérateurs diffèrent par un opérateur $B \in OPS^{m,\infty} = \bigcap_k OPS^{m,k}$ (on dit aussi que B s'annule à l'ordre infini sur Σ).

(3.6) Soit $A_j \in OPS^{m-j/2,-j}$. Il existe $A \in OPS^{m,k}$ tel que $A - \sum_{j<N} A_j \in OPS^{m-N/2,k-N}$. Deux tels opérateurs diffèrent par un opérateur $B \in OP\mathscr{H}^{m-k/2} = \bigcap_j OPS^{m-j/2,k-j}$, (un tel opérateur est de degré $-\infty$ hors de Σ, mais près de Σ il est de degré $m-k/2$ et pas mieux en général). On a noté $\mathscr{H}^m = \bigcap_j S^{m-j/2,-j}$. Les opérateurs $A \in OP\mathscr{H}^m$ donnent lieu à un calcul symbolique important dans cette théorie (on en construit par exemple en résolvant des équations différentielles ou aux dérivées partielles modelées sur l'équation de Hermite). Je renvoie à la section de [4] sur les "opérateurs de Hermite" pour plus de détails (cf. aussi [2] [3] [6] [8] [9]).

Pour la construction de parametrix, on a le résultat suivant :

(3.7) Proposition : Soit $A \in OPS^{m,k}$. Pour que A admette une parametrix à gauche $B \in OPS^{-m,-k}$ il faut et il suffit qu'il vérifie les deux conditions suivantes :

(i) <u>il existe</u> $B_1 \in OPS^{-m,-k}$ <u>tel que</u> $Id - B_1 A \in OPS^{-1/2,-1}$

(ii) <u>Pour tout</u> $C \in OP\mathcal{H}^{o}$, <u>il existe</u> $D \in OP\mathcal{H}^{k/2-m}$ <u>tel que</u> $DA - C \in OP\mathcal{H}^{-1/2}$.

(la démonstration est facile, par approximations successives, utilisant (3.6) et (3.4).

La propriété (i) fait intervenir essentiellement les propriétés multiplicatives du symbole de A (mod. $S^{m-1/2,k-1}$) ; elle est en général facile à vérifier. Si $A = a(x,D)$ est un opérateur pseudo-différentiel homogène, avec $A \in OPS^{m,k}$ (i.e. $a(x,\xi) \sim \Sigma\, a_{m-j}(x,\xi)$, où a_{m-j} est homogène de degré $m-j$ en ξ et s'annule à l'ordre $k-2j$ au moins sur Σ) et si $P = p(x,D) \in OPS^{m',k'}$, on a $P \circ A = q(x,D)$ avec

$$(3.8) \qquad q(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\leq k} \frac{i^{-|\alpha|}}{\alpha!} \left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^{\alpha} p \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} a \ \text{mod.} S^{m+m'-1/2,k+k'}$$

Négligeant dans (3.8) tout ce qui peut l'être, on est ainsi conduit pour (ii) à l'étude d'une équation aux dérivées partielles du type décrit par Grusin [8] (en au plus $\nu = \text{codim}\,\Sigma$ variables). (Si A n'est pas pseudo-différentiel, on ramène l'étude de (ii) à celle d'équations intégrales).

§ 4. <u>EQUATIONS DE CAUCHY-RIEMANN INDUITES</u>

Soit Y une variété complexe (holomorphe) de dimension $n+1$ (sur $\mathbb{C}$). Soit $X \subset Y$ une sous-variété C^∞ réelle, de codimension réelle 1. On note T'' l'ensemble des vecteurs antiholomorphes de Y qui sont tangents à X (c'est un fibré vectoriel complexe de dimension n sur X), et on note $\Omega^{o,p}(X)$ l'ensemble des formes p-linéaires alternées, à coefficients C^∞, sur T''.

Si $\omega \in \Omega^{o,p}(X)$, on pose

$$(4.1) \qquad \bar{\partial}_b \omega = d''\tilde{\omega}|T''$$

où $\tilde{\omega} \in \Omega^{o,p}(Y)$ est n'importe quel prolongement de ω, et d'' est la différentielle extérieure antiholomorphe. (Localement, on peut supposer

$Y = \mathbb{C}^{n+1}$ (coordonnées $z_o = x_o + iy_o, \ldots z_n = x_n + iy_n$), et X définie par une équation réelle $\phi(z_o,\ldots,z_n) = 0$ avec $\frac{\partial\phi}{\partial x_o} \neq 0$. T'' est alors engendré par les champs de vecteurs

$$Z_j = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} - \left(\frac{\partial\phi}{\partial \bar{z}_o}\right)^{-1}\left(\frac{\partial\phi}{\partial \bar{z}_j}\right)\frac{\partial}{\partial \bar{z}_o} \quad . \qquad j = 1\ldots n$$

(relèvement à X de $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$ par la projection sur l'hyperplan réel $x_o = 0$).

Les Z_j commutent entre eux (comme les $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$) et on identifie $\bar{\partial}_b$ à $\sum Z_j E_j$, où E_j désigne la multiplication extérieure par le j-ième vecteur de base sur $\Lambda\mathbb{C}^n$)

Si on choisit une métrique hermitienne sur Y, celle-ci induit une métrique sur T'' et un élément de volume sur X, et on peut définir l'adjoint $\bar{\partial}_b^*$ et le "carré"

$$\Box_b = \bar{\partial}_b \bar{\partial}_b^* + \bar{\partial}_b^* \bar{\partial}_b \quad .$$

Si ξ est un vecteur cotangent de X, on note ξ'' sa composante antiholomorphe (restriction à T'' de la forme linéaire définie par ξ). De la formule $e^{-i\lambda\varphi}\, \bar{\partial}_b(e^{i\lambda\varphi}\omega) = i\lambda\, \bar{\partial}_b\varphi \wedge \omega + \bar{\partial}_b\omega$ on déduit immédiatement pour les symboles

$$(4.2) \qquad \begin{cases} \sigma(\bar{\partial}_b).u = i\,\xi'' \wedge u \\ \sigma(\Box_b).u = |\xi''|^2 u \end{cases}$$

Le cône caractéristique Σ de $\Box_b$ est donc le cône $\xi'' = 0$. Localement il est défini par les n équations complexes (2n equations réelles)

$$u_j = \langle z_j, \xi \rangle = 0$$

où les Z_j ($j = 1,\ldots,n$) forment une base de vecteurs anti-holomorphes (à coefficients C^∞)

Notons que les crochets $[Z_j, Z_k]$ sont combinaisons linéaires (à coefficients C^∞) des Z_j, et qu'on a donc $\frac{1}{i}\{u_j, u_k\} = \sigma([Z_j, Z_k]) = 0$ sur Σ. Ainsi le fait que Σ soit ou non symplectique dépend uniquement de la non-dégénérescence de la matrice $\sigma([\overline{Z}_j, Z_k])|_\Sigma$ (forme de Lévy).

On peut, pour $\overline{\partial}_b$, dans le cas où Σ est symplectique (forme de Lévy non dégénérée) se ramener au modèle local particulièrement simple suivant en transmuant par un système elliptique convenable d'opérateurs intégraux de Fourier (cf.[12] dans le cas analytique réel). Posons, avec les notations du n°2b :

(4.3) $$Z_j = (2|D_x|)^{-1/2} \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t_j} + \varepsilon_j \, t_j |D_x|\right)$$

avec $$\varepsilon_j = \begin{cases} +1 & \text{si } 0 < j \leq q \\ -1 & \text{si } q < j \leq n \end{cases}$$

($(q, n-q)$ correspond à la signature de la forme de Lévy en ξ). Alors $\overline{\partial}_b$ est localement isomorphe au complexe

(4.4) $$D = \Sigma \, Z_j \, E_j$$

sur $\Lambda \mathbb{C}^n$, où E_j désigne la multiplication extérieure par le j-ième vecteur de base.

Compte tenu des relations

$$[Z_j^*, Z_k] = \varepsilon_j \, \delta_{jk}$$

$$E_j^* E_k + E_k E_j^* = \delta_{jk} \, \mathrm{Id}$$

on trouve alors pour le carré $\square = DD^* + D^*D$ (pour les métriques usuelles)

(4.5) $$\square = P_o \, \mathrm{Id} + F$$

avec $$P_o = \sum_1^q Z_j Z_j^* + \sum_{q+1}^n Z_j^* Z_j$$

$$F = \sum_1^q E_j^* E_j + \sum_{q+1}^n E_j E_j^*$$

Si on pose $\Lambda^{s,t} = \Lambda^s \mathbb{C}^q \otimes \Lambda^t \mathbb{C}^{n-q}$ (sous-espace engendré par les $dx_{i_1} \ldots dx_{i_s} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots dx_{j_t}$ où $i_1 \ldots i_s \leq q$, $j_1 \ldots j_t > q$) on voit qu'on a $F|_{\Lambda^{s,t}} = (q-s+t)\mathrm{Id}$, donc $C^\infty(X, \Lambda^{s,t})$ est stable par $\square$.

Le théorème 2 (n^o1) montre alors que $\square|_{\Lambda^{s,t}}$ est hypoelliptique (et possède une parametrix) sauf si $s = q$, $t = 0$ (dans ce dernier cas les noyau et conoyau de $\square$ peuvent être décrits au moyen d'opérateurs de Hermite - cf.[4]). Une extension facile de la théorie de De Rham montre que le noyau (mod.C^∞) de $\square$ correspond à la cohomologie (mod.C^∞) de D. Revenant à $\bar{\partial}_b$, et remarquant qu'on inverse la signature de la forme de Levy quand on passe du point ξ au point opposé $-\xi$, on retrouve le fait que (localement sur X) $\bar{\partial}_b$ a de la cohomologie (mod.C^∞) en dimensions q et $n-q$ seulement.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Beals, C. Fefferman : Spatially inhomogeneous pseudo-differential operators, I et II, à paraître.

[2] L. Boutet de Monvel, F. Trèves : On a class of pseudo-differential operators with double characteristics, à paraître dans Inventiones Math.

[3] L. Boutet de Monvel, F. Trèves : On a class of systems of pseudo-differential operators with double characteristics. A paraître, Comm. Pure Appl. Math.

[4] L. Boutet de Monvel : Hypoelliptic operators with double characteristics and related pseudo-differential operators. A paraître .

[5] J. J. Duistermaat, L. Hörmander : Fourier Integral operators II, Acta Math. 128 (1972) 183-269

[6] J. J. Duistermaat, J Sjöstrand : A global construction for pseudo-differential operators with non-involutive characteristics. Inventiones Math.20 (1973) 209-225

[7] V. V. Grušin, M. I. Višik : On a class of degenerate elliptic equations, Mat. Sbornik 79 (121 (1969) 3-36 (Math. USSR Sbornik 8 (1969) 1-32).

[8] V. V. Grušin : On a class of hypoelliptic operators. Mat. Sbornik 83 (125) (1970) 456-473 (Math. USSR Sbornik 12 (1970) 458-476).

[9] V. V. Grušin : On a class of hypoelliptic operators degenerate on a submanifold, Mat. Sbornik 84 (126) (1971) 111-134 (Math. USSR Sbornik 13 (1971) 155-185).

[10] L. Hörmander : Fourier Integral operators I, Acta Math. 127 (1971) 79-183.

[11] A. Melin : Lower bounds for pseudo-differential operators, Arkiv för Mat. 9 (1971) 117-140.

[12] M. Sato, M. Kashiwara, T. Kawai : Microfunctions and pseudo-differential equations. Lecture notes, Springer Verlag, n°287, chap.II.

[13] J. Sjöstrand : Operators of principal type with interior boundary conditions, Acta Math. 130 (1973) 1-51.

[14] J. Sjöstrand : Parametrices for pseudo-differential operators with multiple characteristics. A paraître.

[15] F. Trèves : Concatenetions of second order evolution equations applied to local solvability and hypoellipticity. A paraître dans Appl. Pure Math.