Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

B. Malgrange

Sur les polynômes de I. N. Bernstein

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1973-1974), exp. nº 20, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1973-1974____A19_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 3 - 1 9 7 4

SUR LES POLYNOMES DE I. N. BERNSTEIN

par B. MALGRANGE

Exposé N° XX

10 Avril 1974

SUR LES POLYNOMES DE I.N. BERNSTEIN

B. Malgrange

1. INTRODUCTION

Dans [1], I.N. Bernstein a démontré le résultat suivant :

Soit $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_{n+1}]$, et s une indéterminée ; il existe un polynôme $B \in \mathbb{C}[s]$ et un opérateur différentiel $P(s, x, D_x)$ à coefficients polynômiaux en s et x tel qu'on ait l'identité $P(s, x, D_x)f^s = B(s)f^{s-1}$ (le premier membre de cette identité est défini de la manière qu'on pense, avec $\frac{\partial}{\partial x_i} f^s = s \frac{\partial f}{\partial x_i} f^{s-1}$ etc.). Il est visible que l'ensemble des $B \in \mathbb{C}[s]$ pour lesquels une telle identité existe est un idéal ; nous noterons b un générateur de cet idéal, par exemple celui dont le coefficient dominant est égal à 1 et nous l'appellerons "le polynôme de Bernstein attaché à f". Notons aussi que, si a est un point de $\mathbb{C}^{n+1}$, avec $f(a) = 0$, on pourrait aussi définir le "polynôme de Bernstein local b_a attaché à f", de la même manière, en considérant les opérateurs différentiels $P(s, x, D_x)$ à coefficients analytiques en x au voisinage de a, et polynomiaux en s ; évidemment, pour tout a, b_a divise b ; si f est non singulière en a, on a $b_a(s) = s$ dans le cas général, en faisant $s = 0$, on voit qu'on a $b(0) = 0$; on posera dans la suite $b(s) = s\tilde{b}(s)$.

Des exemples, qui m'ont été montrés par M. Sato (voir à ce propos [7] et [9]) suggèrent que les zéros de b sont rationnels, et sont liés étroitement à la monodromie de l'application $f : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$. Nous nous proposons de démontrer un résultat partiel dans ce sens ; le même résultat devrait aussi être vrai pour les "polynômes de Bernstein locaux" ; il suffirait pour cela d'utiliser la même démonstration, sous réserve d'avoir à sa disposition un "théorème de régularité local" qui est très probablement vrai, encore qu'il ne se trouve pas dans la littérature (ce résultat est bien connu si f a une singularité isolée en a ; dans le cas général, H. Hamm m'a signalé en avoir une démonstration, non encore publiée). Cependant, le résultat que nous obtenons est très incomplet : divers exemples semblent en effet suggérer que dans les zéros de b intervient la monodromie de f en toute dimension, et pas seulement en dimension maximum. Par contre, dans le cas "local, singularité isolée en a" il est probable que tous les zéros de b_a soient obtenus par notre résultat ; dans le cas quasi-homogène, cela a été démontré par M. Kashiwara (non encore publié).

2. RAPPELS SUR LA MONODROMIE

Nous supposons dans la suite $n \geq 1$, le cas $n = 0$ étant sans grand intérêt. Notons D un disque ouvert de centre O dans $\mathbb{C}$, $X = f^{-1}(D) \subset \mathbb{C}^{n+1}$ et posons $X(t) = f^{-1}(t)$, $D^* = D - \{0\}$, $X^* = X - X(0)$; si D est choisi de rayon r assez petit, on peut supposer que D^* ne contient pas de valeur critique de f, et même que $f : X^* \to D^*$ est une fibration C^∞ (le premier résultat, i.e. la version algébrique du théorème de Morse-Sard, est élémentaire ; le second, beaucoup plus fort, se démontre, en gros en plongeant la situation dans une situation où f soit propre, et en appliquant le théorème de Hironaka de résolution des singularités au diviseur à l'infini ; voir p. ex. Deligne [2], th. 6.13), quitte à remplacer f par $(2r)^{-1} f$, on peut supposer qu'on a $r = 2$.

Fixons $t \in D$, par exemple $t = 1$; puisque $X(1)$ est une variété algébrique affine non singulière de dimension n, les $H_i(X(1);\mathbb{C})$ sont finis sur $\mathbb{C}$, et sont nuls pour $i \geq n+1$. Soit h l'automorphisme de monodromie de $H_n(X(1),\mathbb{C})$, i.e. l'action du générateur de $\pi_1(D^*,1)$ sur $H_n(X(1),\mathbb{C})$. D'après le "théorème de monodromie" (voir [4]), on a les résultats suivants :

i) les valeurs propres de h sont des racines de l'unité.

ii) Le polynôme minimal de h a au plus des zéros multiples d'ordre $n+1$.

Définissons maintenant "l'homologie bornée" et "l'homologie évanescente" de $X(1)$; pour cela, nous aurons besoin du résultat suivant (H. Hamm, non publié) :

Soient $R > 0$, $0 < \rho < 2$; posons $X_{R,\rho} = X \cap \{|x|<R\} \cap \{|f(x)|<\rho\}$, $D_\rho = \{|t|<\rho\}$ et définissons comme ci-dessus $X_R(t)$, $X^*_{R,\rho}$ et D^*_ρ ; alors, pour tout R assez grand, il existe ρ tel que la projection $f : X^*_{R,\rho} \to D^*_\rho$ soit une fibration C^∞ , et tel que $X_R(0)$ soit rétracte par déformation de $X_{R,\rho}$.

Prenons alors $\gamma \in H_n(X(1);\mathbb{C})$; le fait que $f : X^* \to D^*$ soit une fibration nous donne, par restriction à $]0,1]$, une fibration triviale ; d'où, pour $t \in]0,1]$, une classe $\gamma(t) \in H_n(X(t);\mathbb{C})$ bien déterminée. Nous dirons alors que γ est <u>borné</u> s'il existe $R > 0$ tel que, pour $t \in]0,1]$, assez petit, $\gamma(t)$ soit dans l'image de l'application $i_* : H_n(X_R(t);\mathbb{C}) \to H_n(X(t);\mathbb{C})$ provenant de l'injection naturelle $i : X_R(t) \to X(t)$.

[A noter que i_* est injective ; en effet $X_R(t)$ est "de Runge" dans $X(t)$, et par suite, les formes holomorphes sur $X(t)$ sont denses dans les formes holomorphes sur $X_R(t)$].

L'ensemble des $\gamma \in H_n(X(1);\mathbb{C})$ bornés sera noté $H^b_n(X(1);\mathbb{C})$; on définit alors l'homologie <u>évanescente</u> $\tilde{H}_n(X(1);\mathbb{C})$ comme l'ensemble des $\gamma \in H^b_n(X(1);\mathbb{C})$ qui possèdent la propriété suivante : soit $R > 0$ tel que, pour tout $t \in]0,1]$, assez petit, $\gamma(t)$ soit de la forme $i^*\gamma_R(t)$, avec $\gamma_R(t) \in H_n(X_R(t);\mathbb{C})$; alors, pour t_o assez petit, $\gamma_R(t_o)$ est "évanescent dans $|X| < R$ " i.e. l'image de $\gamma_R(t_o)$ dans $H_n(X_{R,t_o};\mathbb{C})$ est nulle.

Il est facile de voir que H^b_n et $\tilde{H}_n$ sont stables par l'automorphisme de monodromie h . Ceci étant, le théorème que nous nous proposons de démontrer est le suivant :

<u>Théorème (2.1)</u>

<u>Supposons que</u> λ <u>soit une valeur propre de la restriction</u> $\tilde{h}$ <u>de</u> h <u>à</u> $\tilde{H}_n(X(1);\mathbb{C})$, <u>et que la multiplicité de</u> λ <u>dans le polynôme minimal de</u> $\tilde{h}$ <u>soit égal à</u> p ; <u>il existe alors</u> $\mu_1,\dots,\mu_p \in \mathbb{Q}$, <u>possédant les propriétés suivantes</u> :

i) $\exp(2\pi i\mu_j) = \lambda$, pour $j = 1,\dots,p$

ii) le polynôme $(s+\mu_1)\dots(s+\mu_p)$ divise $\tilde{b}$.

J'ignore si l'on peut toujours, dans cet énoncé, choisir $\mu_1,\dots,\mu_p$ égaux, ou s'il existe des contre-exemples.

Exemple. Prenons $f = x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2$; en choisissant $P = \Sigma \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, on trouve $\tilde{b}(s) = s + \frac{n-1}{2}$; or, dans cet exemple, il est bien connu que $H_n(X(1);\mathbb{C}) = \tilde{H}_n(X(1);\mathbb{C})$ est de dimension 1 sur $\mathbb{C}$, et qu'on a $h = (-1)^{n-1}$.

3. POLYNOMES DE BERNSTEIN ET PERIODES D'INTEGRALES

Avant d'établir le résultat annoncé, il nous faut rappeler la traduction du théorème de monodromie en termes de périodes d'intégrales. Choisissons une classe d'homologie $\gamma(1) \in H_n(X(1);\mathbb{C})$; du fait que $X^* \to D^*$ est une fibration, on en déduit naturellement une classe $\gamma(t) \in H_n(X(t);\mathbb{C})$, pour t voisin de 1 ; par prolongement, on obtient une fonction multiforme (i.e. une fonction sur le revêtement universel de D^*) ; suivant l'abus de notation usuel, nous la noterons encore $\gamma(t)$ en précisant au besoin la détermination choisie de $\log t$. En mettant h (ou $\tilde{h}$) sous forme de Jordan, il nous suffira d'examiner le cas où, λ étant une valeur propre de h , on a, pour un certain $p \geq 1$: $(h-\lambda)^p\gamma(1) = 0$, $(h-\lambda)^{p-1}\gamma(1) \neq 0$.

Soit d'autre par Ω^q l'espace des formes différentielles de degré q en $dx_1,\dots,dx_{n+1}$, à coefficients dans $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_{n+1}]$. Prenons $\pi \in \Omega^n$; pour $t \in D^*$, $\pi|_{X(t)}$ est une forme holomorphe de degré maximum, donc fermée, et l'intégrale $I(t) = \int_{\gamma(t)} \pi$ est donc bien définie. On a les propriétés suivantes :

i) $I(t)$ est une fonction holomorphe (multiforme) sur D^* et l'on a $\frac{d}{dt}\int_{\gamma(t)} \pi = \int_{\gamma(t)} \frac{d\pi}{df}$, $\frac{d\pi}{df}$ étant la forme relative usuelle [élémentairement, on peut considérer que c'est la famille, paramétrée par $t \in D^*$, de formes sur $X(t)$, définie ainsi : sur $\{\frac{\partial f}{\partial x_i} \neq 0\}$, $\frac{d\pi}{df}(t)$ est la restriction à $X(t)$ de $(-1)^{i-1}(\frac{\partial f}{\partial x_i})^{-1} g\,dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_{n+1}$, avec $d\pi = g\,dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$].

ii) Il existe $k > 0$ tel que, dans tout angle $|\arg t| \leq C$ ($C > 0$ quelconque), on ait $\lim_{t \to 0} t^k I(t) = 0$.

Ce résultat, dû à Deligne (voir [2] ou [4]) est la variante "affine" du théorème de régularité de Nilsson-Griffiths.

Dorénavant, nous considèrerons seulement des γ bornés. Dans ce cas, nous avons besoin d'un renforcement du résultat précédent :

Proposition (3.1)

Supposons $\gamma(1)$ borné ; alors, pour $|\arg t| \leq C$, $\lim_{t \to 0} I(t)$ existe ; de plus, si γ est évanescent, cette limite est nulle.

Cette proposition est démontrée en appendice.

Notons que l'action de h se traduit sur I par la substitution $\log t \longmapsto \log t + 2\pi i$; il résulte alors aisément de i), (3.1) et de la propriété : $(h-\lambda)^p \gamma(1) = 0$ que I a la forme suivante, lorsque γ est évanescent :

$$I(t) = \sum_{\substack{\mu \in L(\lambda) \\ 0 \leq q \leq p-1}} c_{\mu,q} t^{\mu} (\log t)^q \quad , \quad c_{\mu,q} = c_{\mu,q}(\pi) \in \mathbb{C} \quad ,$$

$L(\lambda)$ désignant l'ensemble des $\mu > 0$ tels qu'on ait $\exp(2\pi i \mu) = \lambda$; et, puisque λ est une racine de l'unité, de tels μ sont rationnels. Si γ n'est pas évanescent, on a nécessairement $\lambda = 1$, et $I(t)$ a la même expression à un terme constant près.

D'autre part, il existe certainement un $\pi \in \Omega^n$ et un $\mu \in L(\lambda)$ tels qu'on ait $c_{\mu,p-1}(\pi) \neq 0$; sinon, en posant $\gamma'(1) = (h-\lambda)^{p-1} \gamma(1)$ on aurait, pour tout $\pi \in \Omega^n$: $\int_{\gamma'(1)} \pi = 0$; or, d'après un théorème de Grothendieck (voir p. ex. [2]), les $\pi|_{X(1)}$ engendrent $H^n(X(1); \mathbb{C})$; on aurait donc alors $\gamma'(1) = 0$, contrairement à l'hypothèse.

Soit de même $\omega \in \Omega^{n+1}$; en notant qu'il existe $\pi \in \Omega^n$, avec $d\pi = \omega$, et en utilisant la formule de dérivation i), on trouve :

$$(3.2) \quad \int_{\gamma(t)} \frac{\omega}{df} = \sum_{\substack{\mu \in L(\lambda)-1 \\ 0 \leq q \leq p-1}} d_{\mu,q}(\omega) t^{\mu} (\log t)^q$$

et il existe un ω et un μ tels qu'on ait $d_{\mu,p-1}(\omega) \neq 0$.

Maintenant prenons un γ <u>évanescent</u> fixé, avec les propriétés indiquées. Posons, pour $1 \le k \le p$:

$$\mu_k = \inf\{\mu \in L(\lambda)-1 \text{ ; il existe } q \ge k-1 \text{ et } \omega \in \Omega^{n+1} \text{ avec } d_{\mu,q}(\omega) \ne 0\} .$$

Nous allons démontrer le résultat suivant, qui entraîne évidemment le théorème (2.1).

<u>Proposition (3.3)</u>

<u>Le polynôme</u> $(s+\mu_1)\dots(s+\mu_p)$ <u>divise</u> $\widetilde{b}$.

A) <u>Démonstration dans le cas</u> $\lambda \ne 1$.

Il suffit ici de démontrer que $(s+\mu_1)\dots(s+\mu_p)$ divise b . Prenons une trivialisation de $f^{-1}(]0,1])$; représentons $\gamma(1)$ par un cycle singulier C^∞ de $X(1)$, soit $\Gamma(1)$; et pour $t \in]0,1]$, posons $\Gamma(t,1) = \Gamma(1) \times [t,1]$; soit $\omega \in \Omega^{n+1}$; pour tout $s \in \mathbb{C}$, on a (en choisissant par exemple $\arg t = 0$)

$$b(s)\int_{t_o}^{1} t^{s-1}dt \int_{\gamma(t)} \frac{\omega}{df} = b(s)\int_{\Gamma(t_o,1)} f^{s-1}\omega = \int_{\Gamma(t_o,1)} [P(s,x,D_x)f^s]\omega .$$

Désignons par P^* l'opérateur différentiel adjoint de P , opérant sur Ω^{n+1} (en coordonnées, si $P = \sum a_\alpha(s,x)D^\alpha$, $D^\alpha = (\frac{\partial}{\partial x_1})^{\alpha_1}\dots(\frac{\partial}{\partial x_n})^{\alpha_n}$, et si $\omega = g dx_1 \wedge\dots\wedge dx_{n+1}$, on a $P^*\omega = [\sum(-1)^{|\alpha|}D^\alpha(a_\alpha g)]dx$) ; on a $[P(s,x,D_x)f^s]\omega = f^s(P^*\omega) + d(f^s\omega_P)$, avec $P^*\omega \in \Omega^{n+1}[s]$, $\omega_P \in \Omega^n[s]$; d'où, par Stokes

$$\int_{\Gamma(t_o,1)} (Pf^s)\omega = \int_{\Gamma(t_o,1)} f^s P^*\omega + \int_{\gamma(1)-\gamma(t_o)} f^s\omega_P$$

et finalement,

$$(3.4) \quad b(s)\int_{t_o}^{1} t^{s-1}dt \int_{\gamma(t)} \frac{\omega}{df} = \int_{t_o}^{1} t^s dt \int_{\gamma(t)} \frac{P^*\omega}{df} + \int_{\gamma(1)} \omega_P - t_o^s \int_{\gamma(t_o)} \omega_P .$$

Pour $\mathrm{Re}\, s$ assez grand (en utilisant la proposition (3.1), il suffit de prendre $\mathrm{Re}\, s > 1$), on peut passer à la limite dans tous les termes de cette égalité, pour $t_o \to 0$; on a alors :

$$(3.5) \quad b(s)\int_0^1 t^{s-1}dt \int_{\gamma(t)} \frac{\omega}{df} = \int_0^1 t^s dt \int_{\gamma(t)} \frac{P^*\omega}{df} + \int_{\gamma(1)} \omega_P .$$

Supposons qu'on ait $\mu_1 = \ldots \mu_k < \mu_{k+1}$, et choisissons ω tel qu'on ait, dans (3.2) : $d_{\mu_1,k-1}(\omega) \neq 0$. D'après (3.2) et la formule $\int_0^1 t^{\mu+s-1}(\log t)^k dt = \frac{d^k}{ds^k} \cdot \frac{1}{\mu+s}$, l'intégrale $\int_0^1 t^{s-1} dt \int_{\gamma(t)} \frac{\omega}{df}$ (Re s > 1) se prolonge en une fonction méromorphe de $s \in \mathbb{C}$, ayant en $-\mu_1$ un pôle d'ordre k ; de même, $\int_0^1 t^s dt \int_{\gamma(t)} \frac{P^*\omega}{df}$ se prolonge en une fonction méromorphe de $s \in \mathbb{C}$, qui n'a pas de pôle en $-\mu_1$; enfin $\int_{\gamma(1)} \omega_P$ est un polynôme en s ; l'égalité (3.5) implique que $-\mu_1$ soit un zéro d'ordre k de b ; on traite de la même manière $\mu_{k+1}, \ldots, \mu_p$ (nous laissons les détails au lecteur). Ceci démontre le résultat cherché.

B) <u>Le cas</u> $\lambda = 1$.

La méthode est analogue, mais il faut faire un peu plus attention (la démonstration précédente montrerait seulement que $(s+\mu_1)\ldots(s+\mu_p)$ divise $b = s\tilde{b}$, et l'on risque de "perdre" une racine de $\tilde{b}$).

Tout d'abord, en faisant $s = 0$ dans l'égalité $P(s,x,D_x)f^s = b(s)f^{s-1}$ on trouve $b(0) = 0$, d'où $b(s) = s\tilde{b}(s)$, comme on l'a déjà vu ; d'où aussi $P(0,x,D_x)1 = 0$; par suite, on a : $P(s,x,D_x) = sQ(s,x,D_x) + \Sigma R_i(x,D_x)\frac{\partial}{\partial x_i}$ et, en appliquant cette égalité à f^s , on trouve

$$Q(s,x,D_x)f^s + \Sigma R_i(x,D_x)[\frac{\partial f}{\partial x_i} f^{s-1}] = \tilde{b}(s)f^{s-1} \quad .$$

Prenons $\omega \in \Omega^{n+1}$; un calcul analogue à celui qui mène à (3.5) donne alors, pour Re s > 1 :

$$\tilde{b}(s) \int_0^1 t^{s-1} dt \int_{\gamma(t)} \frac{\omega}{df} = \int_0^1 t^s dt \int_{\gamma(t)} \frac{Q^*\omega}{df} + \int_0^1 t^{s-1} dt \int_{\gamma(t)} \Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{R_i^*\omega}{df} + \int_{\gamma(1)} \omega_P$$

avec $P^*\omega \in \Omega^{n+1}[s]$, $R_i^*\omega \in \Omega^{n+1}$, $\omega_P \in \Omega^n[s]$. On transforme le second terme du second membre, en observant que $\pi = \Sigma(\frac{\partial}{\partial x_i}) \lrcorner R_i^*\omega \in \Omega^n$ ($\lrcorner$, le produit intérieur) est égal, en tant que forme relative, à $\Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{R_i^*\omega}{df}$.

Supposons encore qu'on ait $\mu_1 = \ldots = \mu_k < \mu_{k+1}$, et prenons ω tel qu'on ait $d_{\mu_1,k-1}(\omega) \neq 0$; comment en A), on voit que le prolongement analytique de $s \mapsto \int_0^1 t^{s-1} dt \int_{\gamma(t)} \frac{\omega}{df}$ a un pôle d'ordre k en $-\mu_1$, et que le premier et le troisième terme du second membre n'ont pas de pôle en reste à montrer que $\int_0^1 t^{s-1}dt \int_{\gamma(t)} \pi$ n'a pas de pôle en $-\mu_1$; pour établir cela, il suffit de montrer que, dans le développement $\int_{\gamma(t)} \pi = \sum c_{\mu,q} t^{\mu}(\log t)^q$, on a $c_{\mu,q} = 0$ pour $\mu \le \mu_1$; or, si on avait, pour un tel q : $c_{\mu,q} \neq 0$, en utilisant le fait qu'on a $\mu > 0$ d'après (3.1) et en appliquant la formule $\frac{d}{dt}\int_{\gamma(t)} \pi = \int_{\gamma(t)} \frac{\pi}{df}$, on trouverait $d_{\mu-1,q}(d\pi) \neq 0$ contrairement à la définition de μ_1 . Cela montre bien que $-\mu_1$ est zéro d'ordre k de $\widetilde{b}$; comme en A), nous laissons le lecteur adapter le raisonnement à $\lambda_{k+1},\dots,\lambda_p$. Ceci termine la démonstration.

4. APPENDICE : DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION (3.1)

Choisissons μ_o tel qu'on ait $\exp(2\pi i\mu_o) = \lambda$; de $(h-\lambda)^p\gamma(1) = 0$, on déduit facilement que $I(t) = \int_{\gamma(t)} \pi$ a la forme suivante :

$$I(t) = \sum_{0\le q\le p-1} g_k(t)t^{\mu_o}(\log t)^q , \text{ avec } g_k \text{ holomorphe dans } D^* ;$$

le "théorème de régularité" montre alors que les g_k sont <u>méromorphes</u> en 0 . De là, résulte facilement, que, pour démontrer (3.1), il suffit d'établir ceci :

<u>Sur toute demi-droite issue de l'origine</u> (plus précisément, pour $\arg t$ fixé), $I(t)$ <u>a une limite pour</u> $t \to 0$; <u>de plus, si</u> γ <u>est évanescent</u>, <u>cette limite est nulle</u>.

Pour fixer les idées, supposons $\arg t = 0$. Les arguments de rétraction par déformation considérés au paragraphe 2 montrent qu'il existe $\gamma(0) \in H_n(X(0),\mathbb{C})$ tel que $\gamma(1)$ et $\gamma(0)$ soient homologues en tant que cycles de $f^{-1}([0,1])$. Choisissons alors, d'après Łojasiewicz [5], une triangulation semi-analytique K de $f^{-1}([0,1])$, telle que $X(0)$ et $X(1)$ soient des sous-complexes $K(0)$ et $K(1)$ de cette triangulation, et choisissons $\Gamma(1)$ et $\Gamma(0)$, cycles simpliciaux de $K(1)$ et $K(0)$ qui représentent respectivement $\gamma(1)$ et $\gamma(0)$; soit Δ une chaine simpliciale de K telle qu'on ait $\partial\Delta = \Gamma(1) - \Gamma(0)$. D'après Herrera [6] , on sait que les intégrales $\int_{\Gamma(1)}\pi$, $\int_{\Gamma(0)}\pi$, $\int_{\Delta} d\pi$ ont un sens (i.e. sont des intégrales de fonctions intégrables), et qu'on a $\int_{\gamma(1)}\pi = \int_{\Gamma(1)}\pi = \int_{\Gamma(0)}\pi + \int_{\Delta} d\pi$.

Posons $\Delta(t) = \Delta \cap f^{-1}([0,t[)$, pour $0 < t < 1$; pour t fixé, on peut supposer, quitte à raffiner la triangulation considérée, que $X(t)$ est un sous-complexe semi-analytique de K ; alors, $\Delta - \Delta(t)$ est une chaine de $f^{-1}([t,1])$, dont le bord est égal à $\Gamma(1) - \Gamma(t)$, $\Gamma(t)$ un cycle porté par $X(t)$; on en déduit immédiatement que la classe de $\Gamma(t)$ dans $H_n(X(t),\mathbb{C})$ est égale à $\gamma(t)$; en appliquant à nouveau la formule de Stokes-Herrera, on en déduit qu'on a $\int_{\gamma(1)}\omega - \int_{\gamma(t)}\omega = \int_{\Delta-\Delta(t)} d\pi$; d'où $\int_{\gamma(t)}\pi = \int_{\Gamma(0)}\pi + \int_{\Delta(t)} d\pi$.

Posons $\Delta(0) = \Delta \cap X(0)$; d'après les théorèmes classiques de la théorie de l'intégration, on a $\lim\limits_{t\to 0}\int_{\Delta(t)} d\pi = \int_{\Delta(0)} d\pi$; or, cette dernière intégrale est nulle puisque la restriction de $d\pi$ à $X(0)$ est nulle ; on a donc $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ \arg t = 0}} I(t) = \int_{\Gamma(0)}\pi$.

Enfin, si γ est évanescent, $\Gamma(0)$ est homologue à zéro dans $X(0)$; on peut alors supposer qu'on a même $\Gamma(0) = 0$; donc on a $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ \arg t = 0}} I(t) = 0$. Ceci achève la démonstration.

Dans le cas "local, singularité isolée", le résultat précédent peut être utilisé pour redémontrer le théorème de régularité, et un résultat de M. Sebastiani (voir [6] ; le raisonnement précédent est d'ailleurs inspiré de celui de Sebastiani [8]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] - I.N. BERNSTEIN - Prolongement analytiques des fonctions généralisées avec paramètre (en russe). Funktsional'ny Analiz 6.4 (1972), pp. 26-40.

[2] - P. DELIGNE - Equations différentielles à points singuliers réguliers. Lecture Notes in Mathematics, n° 163, Springer-Verlag (1970).

[3] - M. HERRERA - Intégration on a semi-analytic set. Bull. Soc. Math. France, 94 (1966), pp. 141-180.

[4] - N.M. KATZ - Nilpotent connections and the monodromy theorem : applications of a result of Turritin. Public. Math. I.H.E.S. 39 (1972) pp. 355-412.

[5] - S. LOJASIEWICZ - Triangulation of semi-analytic sets. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 3-18 (1964), pp. 449-474.

[6] - B. MALGRANGE - Intégrales asymptotiques et monodromie. Séminaire J. Leray 1972-73 (à paraître).

[7] - M. SATO and T. SHINTANI - On zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces. Proc. Nat. Ac. Sc. USA 69-5 (1972)

[8] - M. SEBASTIANI - Preuve d'une conjecture de Brieskorn. Man. Math. 2 (1970) pp. 301-308.

[9] - T. SHINTANI - On Dirichlet series whose coefficients are class numbers of integral binary cubic forms, J. Math. Soc. Japan 24-1 (1972) pp. 132-188.

-:-:-:-