Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

M. Frisch

Propriétés asymptotiques des vibrations des tores

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1973-1974), exp. n° 18, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1973-1974____A17_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHEMATIQUES

17, rue Descartes

75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 3 - 1 9 7 4

PROPRIETES ASYMPTOTIQUES DES VIBRATIONS DES TORES

par M. FRISCH

Exposé n° XVIII

13 Mars 1974

§ 0. INTRODUCTION

On considère une solution $f(x,t) : \mathbb{T}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de l'équation des ondes $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ sur le tore $\mathbb{T}^n$ à n dimensions. On verra que même si ses conditions initiales sont de classe C^2, une telle solution n'est pas nécessairement bornée du moins pour $n \geq 5$. On se pose le problème de savoir si une hypothèse de régularité de la fonction f sur un intervalle de "temps", c'est-à-dire sur un ensemble $\mathbb{T}^n \times [-\ell,\ell]$ permet de contrôler sa croissance asymptotique quand $t \to \infty$.

Ainsi étant donné un entier K, on cherche s'il existe une fontion w(t) indépendante de f avec :

$$\begin{matrix} \forall x \in \mathbb{T}^n \\ \forall t \in \mathbb{R} \end{matrix} \qquad |f(x,t)| \leq |w(t)| \, \|f\|_{C^k(\mathbb{T}^n \times [-\ell,\ell])}$$

On met en évidence un indice critique qui est $\frac{n-1}{2}$, tel que si $k > \frac{n-1}{2}$ une telle majoration est possible et si $k < \frac{n-1}{2}$, elle ne l'est pas.

Les espaces de Lipschitz $\Lambda_\alpha(\mathbb{T}^n \times [-\ell,\ell])$, définis pour tout réel positif α, permettent de cerner l'indice critique et interviendront naturellement dans l'étude d'opérateurs de dérivation fractionnaire.

§ 1. DEFINITIONS ET RAPPELS

a) Laplacien sur $\mathbb{T}^n$.

Soit $\mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique, de la norme euclidienne $x = (x_1,\dots,x_n) \mapsto \|x\| = \sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}$ et du produit scalaire associé noté (x,y). Soit $\mathfrak{J}$, le réseau des points de $\mathbb{R}^n$ à coordonnées multiples entiers relatifs de 2π. Le tore $\mathbb{T}^n$ est alors le groupe compact $\mathbb{R}^n/\mathfrak{J}$, et on peut l'identifier au sous-ensemble $([-\pi,\pi[)^n$ de $\mathbb{R}^n$. Par suite, à une fonction $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}$ correspond une fonction $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ périodique par rapport au réseau $\mathfrak{J}$, et réciproquement.

Le laplacien sur $\mathbb{R}^n$ est l'opérateur $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ et permet de définir le laplacien $\tilde{\Delta}$ sur $\mathbb{T}^n$ en posant $\widetilde{\tilde{\Delta} f} = \Delta \tilde{f}$. Dans la suite, on identifiera f et $\tilde{f}$, Δ et $\tilde{\Delta}$.

b) <u>Espaces de Lipschitz</u>

Nous les définissons d'abord sur $\mathbb{R}^n$:
Pour $0 < \alpha \leq 1$, $\Lambda_\alpha(\mathbb{R}^n)$ est le sous espace de l'espace des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}^n$, formé des fonctions f telles que :

$$\sup_{\substack{x \\ y \neq 0}} \frac{|f(x+y) - f(x)|}{\|y\|^\alpha} < +\infty$$

Normons le en posant :

$$\|f\|_{\Lambda_\alpha(\mathbb{R}^n)} = \sup_x |f(x)| + \sup_{\substack{x \\ y \neq 0}} \frac{|f(x+y) - f(x)|}{\|y\|^\alpha} .$$

Normons l'espace $C^k(\mathbb{R}^n)$ où k est un entier en posant :

$$\|f\|_{C^k(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\beta| \leq k} (\sup_x |D_\beta(f)(x)|)$$

et généralisons les espaces de Lipschitz de la manière suivante :
si k est un entier et $0 < \alpha \leq 1$

$$f \in \Lambda_{k+\alpha}(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow f \in C^k(\mathbb{R}^n) \quad \text{et}$$

pour tout multi-indice β avec $|\beta| = k$, $D_\beta(f) \in \Lambda_\alpha(\mathbb{R}^n)$.

Posons $\|f\|_{\Lambda_{k+\alpha}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{C^k(\mathbb{R}^n)} + \sum_{|\beta| = k} (\|D_\beta(f)\|_{\Lambda_\alpha(\mathbb{R}^n)})$.

Les mêmes définitions peuvent s'écrire sur $\mathbb{R}^n \times [-\ell, \ell]$) et l'identification $f \rightarrow \tilde{f}$ permet alors de définir les espaces $\Lambda_\alpha(\mathbb{T}^n \times [-\ell, \ell])$ qui vérifient les emboîtements suivants

$$C \supset \Lambda_\varepsilon \supset \Lambda_{1-\varepsilon} \supset \Lambda_1 \supset C^1 \supset \Lambda_{1+\varepsilon} \supset \Lambda_2 \supset C^2 \text{ etc...} \quad (0 < \varepsilon < 1)$$

c) Solutions de l'équation des ondes sur $\mathbb{T}^n$

Toute fonction continue solution au sens des distributions de l'équation des ondes sur $\mathbb{T}^n$ admet une série de Fourier du type :

$$f(x,t) \sim r + st + \Sigma\, a_m e^{i(m,x)} e^{i\|m\|t} + \Sigma\, b_m e^{i(m,x)} e^{-i\|m\|t}$$

où r, s , a_m et b_m sont des nombres complexes et avec la convention valable pour la suite que les symboles Σ sans indice de sommation portent sur l'ensemble $m \in \mathbb{Z}^n - \{(0,\ldots,0)\}$. Il est bien connu que si $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R})$, les suites a_m et b_m sont à décroissance rapide sur $\mathbb{Z}^n$ et la série converge absolument vers f.

Définition : Nous appellerons vibration une solution continue de l'équation des ondes qui admet une série de Fourier avec $r = s = 0$.

§ 2. RESULTATS POSITIFS

Théorème 1 : On se donne : $\begin{cases} \text{un entier } n \geq 2 \\ \text{deux réels positifs } \ell \text{ et } \alpha . \end{cases}$

Il existe alors une constante C, telle que pour toute vibration f sur $\mathbb{T}^n$, on ait :

$$\begin{matrix} \forall\, x \in \mathbb{T}^n \\ \forall\, t \in \mathbb{R} \end{matrix} \qquad |f(x,t)| \leq C(1 + |t|^{\frac{n-1}{2}}) \|f\|_{\Lambda_{\frac{n-1}{2}+\alpha}(\mathbb{T}^n \times [-\ell,\ell])} .$$

Remarque 1 : Si f est une solution continue quelconque, le résulat est naturellement le même, sauf pour $n = 2$ où cela oblige à remplacer le "poids" $1 + \sqrt{|t|}$ par $1 + |t|$.

Remarque 2 : Si n est un entier impair, il est facile d'obtenir la proposition suivante qui n'utilise plus dans sa majoration que les conditions initiales :

Proposition 1 : Soit n un entier impair, $n \geq 3$. Il existe alors une constante C, telle que pour toute vibration f sur $\mathbb{T}^n$, on ait :

$$\forall\, x \in \mathbb{T}^n \quad \forall\, t \in \mathbb{R} \qquad |f(x,t)| \leq C(1+|t|^{\frac{n-1}{2}})(\|u_o\|_{C^{\frac{n-1}{2}}(\mathbb{T}^n)} + \|u_1\|_{C^{\frac{n-3}{2}}(\mathbb{T}^n)})$$

où on a posé
$$u_o(x) = f(x,0)$$
$$u_1(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(x,0) .$$

De plus le poids $1+|t|^{\frac{n-1}{2}}$ est le meilleur possible, en ce sens qu'il n'est plus possible de le remplacer par une fonction

$$w(t) = o(1+|t|^{\frac{n-1}{2}}) \quad \text{quand } t \to +\infty .$$

La démonstration de cette proposition utilise l'expression explicite de f sous forme de somme d'intégrales portant sur les conditions initiales.
La démonstration du théorème ne procède pas ainsi. Elle s'appuie tout d'abord sur l'étude locale par rapport au temps de la transformation de Hilbert et des opérateurs de dérivation fractionnaire appliqués à des vibrations sur $\mathbb{T}^n$. C'est l'objet de la proposition suivante :

<u>Proposition 2</u> : Soit $f(x,t) = \Sigma\, a_m e^{i(m,x)} e^{i\|m\|t} + \Sigma\, b_m e^{i(m.x)} e^{-i\|m\|t}$ une vibration $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R})$.
Alors si ε, ℓ, α et β sont des réels positifs, α et $\alpha+\beta$ n'étant pas des entiers, il existe une constante C indépendante de f et de ℓ telle que :

i) $$\left\|\Sigma \frac{a_m}{\|m\|^\beta} e^{i(m,x)} e^{i\|m\|t} + \Sigma \frac{b_m}{\|m\|^\beta} e^{i(m,x)} e^{-i\|m\|t}\right\|_{\Lambda_{\alpha+\beta}(\mathbb{T}^n \times [-\ell,\ell])} \leq$$
$$\leq C\, \|f\|_{\Lambda_\alpha(\mathbb{T}^n \times [-\ell-\varepsilon,\, \ell+\varepsilon])} .$$

ii) $$\|\Sigma\, a_m e^{i(m,x)} e^{i\|m\|t}\|_{\Lambda_\alpha(\mathbb{T}^n \times [-\ell,\ell])} \leq C\|f\|_{\Lambda_\alpha(\mathbb{T}^n \times [-\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon])}$$

iii) $$\|\Sigma\, a_m e^{i(m,x)} e^{i\|m\|t}\|_{\Lambda_\alpha(\mathbb{T}^n \times [-\ell,\ell])} \leq C \sup_{\substack{x\in\mathbb{T}^n \\ t\in[-\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon]}} |\Sigma\, a_m \|m\|^\alpha e^{i(m,x)} e^{i\|m\|t}|$$

Donnons l'étape essentielle de la démonstration de cette proposition : si β est un réel positif, définissons le potentiel de Bessel J_β de $\mathbb{R}^{n+1}$ comme la distribution de transformée de Fourier

$$\hat{J}_\beta(x) = \frac{1}{\left(\sqrt{1+\|x\|^2}\right)^\beta}$$

J_β a pour support singulier l'origine et est à décroissance exponentielle à l'infini. Soit $\mathcal{F}_\beta$ l'opérateur de convolution :

$$\mathcal{F}_\beta\,(f) = J_\beta * f$$

notre point de départ est alors le théorème suivant :

<u>Théorème</u> ([4] page 149) : $\mathcal{F}_\beta$ est un isomorphisme de $\Lambda_\alpha(\mathbb{R}^{n+1})$ sur $\Lambda_{\alpha+\beta}(\mathbb{R}^{n+1})$ pourvu que α et β soient des réels positifs $\alpha+\beta$ n'étant pas un entier.

Donnons un exemple de traduction de ce théorème dans le cas qui nous occupe

$$\Big\|\Sigma \frac{a_m}{\left(\sqrt{1+2\|m\|^2}\right)^\beta} e^{i(m,x)}\, e^{i\|m\|t}\Big\|_{\Lambda_{\alpha+\beta}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})} \leq C\,\Big\|\Sigma\, a_m e^{i(m,x)} e^{i\|m\|t}\Big\|_{\Lambda_\alpha(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})}$$

Le problème est alors de pouvoir "localiser en t".

Cette possibilité résulte des propriétés de l'ensemble des fréquences : soit l'ensemble Λ des couples $(m,\pm\|m\|)$ avec $m\in\mathbb{Z}^n$.

Nous utilisons des définitions et des résultats de [1] : il est immédiat que Λ a une densité supérieure de répartition nulle dans la direction de la dernière coordonnée. Par suite il existe un ensemble "associé" à Λ dans toute bande délimitée par des hyperplans perpendiculaires à cette direction et d'épaisseur non nulle. Donc pour tout $\varepsilon>0$, l'ensemble $\mathbb{T}^n\times[-\varepsilon,\varepsilon]$ est associé à Λ.

Cela veut dire en particulier

$$\forall\,(b_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\in\ell^2(\Lambda)\quad \exists\,\varphi\in L^2(\mathbb{T}^n\times[-\varepsilon,\varepsilon])\quad \hat{\varphi}(\lambda) = b_\lambda\ .$$

L'application itérée de ce résultat entraîne :

Conséquence : Soit $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$. Alors il existe une fonction $g_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R})$ telle que

i) $\operatorname{supp} g_\varepsilon \subset \mathbb{T}^n \times [-\varepsilon,\varepsilon]$

ii) $\forall m \in \mathbb{Z}^n \quad \hat{g}(m, \pm\|m\|) = \hat{g}_\varepsilon(m, \pm\|m\|)$

$\mathcal{S}$ désigne la classe des fonctions C^∞ à décroissance rapide. Choisissons alors une fonction $h \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ de manière à avoir

i) $h = 1$ dans un voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^{n+1}$

ii) $\operatorname{supp} h \subset ([-\pi,\pi[)^n \times [-\varepsilon,\varepsilon]$

Cela entraîne $J_\beta(1 - h) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$ et on peut appliquer à cette fonction la conséquence ci-dessus en lui associant une fonction g_ε.

On a alors pour toute vibration f

$$J_\beta * f = (J_\beta h) * f + (J_\beta(1-h)) * f = (J_\beta h) * f + g_\varepsilon * f$$

et la localisation s'obtient en utilisant le fait que les valeurs des fonctions $J_\beta h * f$ et $g_\varepsilon * f$ sur l'ensemble $\mathbb{R}^n \times [-\ell,\ell]$ ne dépendent de celles de f que sur $\mathbb{R}^n \times [-\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$. On a donc démontré :

$$\left\|\Sigma \frac{a_m}{(\sqrt{1+2\|m\|^2})^\beta} e^{i(m,x)} e^{i\|m\|t}\right\|_{\Lambda_{\alpha+\beta}(\mathbb{T}^n \times [-\ell,\ell])} \leq$$

$$\leq \left\|\Sigma\, a_m e^{i(m,x)} e^{i\|m\|t}\right\|_{\Lambda_\alpha(\mathbb{T}^n \times [-\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon])} .$$

Il reste à remplacer le multipicateur $\dfrac{1}{(\sqrt{1+2\|m\|^2})^\beta}$ par $\dfrac{1}{\|m\|^\beta}$. Pour cela on le remplace d'abord par $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}\|m\|^\beta}$, utilisant le fait que $\dfrac{\sqrt{1+2\|x\|^2}^{\,\beta}}{1+\sqrt{2}\,\|x\|^\beta}$ est une transformée de Fourier de mesure bornée ([4] page 134). Puis on utilise l'identité suivante, valable pour tout entier P

$$\frac{1}{\sqrt{2}\|m\|^{\beta}} = \left(\sum_{i=1}^{P} \left(\frac{1}{(1+\sqrt{2}\|m\|^{\beta})^{i}}\right)\right) + \frac{1}{\sqrt{2}\|m\|^{\beta}(1+\sqrt{2}\|m\|^{\beta})^{P}} .$$

Venons en à la démonstration du théorème 1, que nous nous contenterons d'esquisser.

D'après la proposition 2, il suffit de le vérifier pour une vibration de la forme :

$$f(x,t) = \sum a_m \, e^{i(m,x)} \, e^{i\|m\|t} .$$

Soient α et α' deux réels tels que $0 < \alpha' < \alpha$. Posons

$$U(x) = \sum a_m \, \|m\|^{\frac{n-1}{2} + \alpha - \alpha'} \, e^{i(m,x)} .$$

En vertu toujours de la proposition 2, on a :

$$\sup_{x \in \mathbb{T}^n} |U(x)| \leq C \|f\|_{\Lambda_{\frac{n-1}{2} + \alpha}(\mathbb{T}^n \times [-\ell,\ell])}$$

Posons $h(x,t) = (U * \mu_t)(x)$ $(t > 0)$, où μ_t est la mesure uniforme superficielle de masse 1 sur la sphère de centre 0 et de rayon t de $\mathbb{R}^n$.

<u>Lemme</u> : $\hat{\mu}_t(x) = \frac{2\pi}{C_n} \frac{J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi\|x\|t)}{(t\|x\|)^{\frac{n-2}{2}}}$ où C_n est la surface de la sphère unité de $\mathbb{R}^n$. Or, on a l'estimation asymptotique suivante des fonctions de Bessel :

$$J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi\|x\|t) = \frac{1}{\pi\sqrt{\|x\|t}} \cos\left(2\pi t\|x\| - \frac{n-3}{4}\pi\right) + s(\|x\|t) \quad \text{où}$$

$s(\|x\|t) = O(\|x\|t)^{-3/2}$ quand $\|x\|t \to +\infty$.

Des calculs faciles permettent alors d'obtenir la majoration :

$$\left\|\sum a_m \, e^{i(m,x)} \cos\left(2\pi t\|m\| - \frac{n-3}{4}\pi\right)\right\|_{\Lambda_{\alpha-\alpha'}(\mathbb{T}^n \times [\ell,T])} \leq C\,T^{\frac{n-1}{2}} \|f\|_{\Lambda_{\frac{n-1}{2}+\alpha}(\mathbb{T}^n \times [-\ell,\ell])}$$

la constante C n'étant bien sûr pas nécessairement la même que précédemment.

On en déduit le théorème en réappliquant une transformation de Hilbert (proposition 2) ii)).

§ 3. RESULTATS NEGATIFS

Théorème 2 : On se donne $\begin{cases} \text{un intervalle } [a,b] \text{ de } \mathbb{R} \\ \text{un entier } n \geq 2 \\ \text{un réel } \alpha \text{ avec } 0 < \alpha < \frac{n-1}{2} \end{cases}$

Il n'existe alors aucune fonction $w(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, telle que pour toute solution continue de l'équation des ondes sur $\mathbb{T}^n$ on ait :

$$\forall x \in \mathbb{T}^n \quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad |f(x,t)| \leq w(t) \, \|f\|_{\Lambda_{\frac{n-1}{2}-\alpha}(\mathbb{T}^n \times [a,b])} .$$

En particulier, en vertu du théorème du graphe fermé, il existe des vibrations f non bornées sur $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}$ telles que

$$f \in \Lambda_{\frac{n-1}{2}-\alpha}(\mathbb{T}^n \times [a,b])$$

Le théorème résulte de l'inégalité de Bernstein appliquée à la proposition suivante :

Proposition 3 : $\begin{cases} \text{Soit } n \text{ un entier } n \geq 2 \\ \text{Soient } \varepsilon, \tau, T \text{ et } p \text{ des réels soumis aux conditions} \\ \varepsilon > 0,\ 0 < \tau < T,\ 0 < p < \frac{n-1}{2} \\ \text{Soit } V \text{ un voisinage de l'origine de } \mathbb{T}^n. \end{cases}$

Il existe un réel $R > 0$ et un polynôme trigonométrique solution de l'équation des ondes :

$$P(x,t) = \sum_{\lambda \in J} a_\lambda \, e^{i(m_\lambda, x)} e^{it\|m_\lambda\|} \qquad \text{(J ensemble fini)}$$

possédant les propriétés suivantes :

i) $\forall \lambda \in J \quad \|m_\lambda\| \leq R$

ii) $P(0,0) = 1$

iii) $\left.\begin{array}{l}\forall x \in \mathbb{T}^n \\ \forall t \in \mathbb{R} \quad \tau \leqslant t \leqslant T\end{array}\right\} \quad |P(x,t)| \leq R^{-P}\varepsilon$

iv) $\left.\begin{array}{l}\forall x \in \mathbb{T}^n \quad x \notin V \\ \forall t \in \mathbb{R} \quad |t| \leq T\end{array}\right\} \quad |P(x,t)| \leq R^{-P}\varepsilon$

Les calculs de cette construction sont trop longs pour être rapportés ici. Signalons qu'ils se généralisent au cas d'un groupe de Lie compact quelconque, l'indice critique étant alors $\frac{\ell - 1}{2}$ où ℓ est le rang du groupe.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. P. Kahane : Pseudo périodicité et séries de Fourier lacunaires. Ann. E. N. S. 79 (1962), 93-150.

[2] Y. Meyer : Trois problèmes sur les sommes trigonométriques 1) Etude asymptotique des vibrations des sphères. Astérisque 1, 1973, S. M. F.

[3] Y. Meyer : Théorie L^p des sommes trigonométriques périodiques (exemple : vibrations des sphères). C. R. Acad. Sc. Paris, t.277, (2 Juillet 1973).

[4] E. M. Stein : Singular intégrals and differentiability properties of functions. Princeton mathematical series n° 30, Princeton University Press 1970.
