L. Frank

Fonctions de mailles et théorie elliptique des opérateurs aux différences finies (suite)

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1972-1973), exp. nº 6, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1972-1973____A7_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - 75230 PARIS CEDEX 05

Téléphone : 633-25-79

SEMINAIRE GOULAOUIC-SCHWARTZ 1972-1973

FONCTIONS DE MAILLES ET THEORIE ELLIPTIQUE DES OPERATEURS AUX DIFFERENCES FINIES

(suite)

par L. FRANK

Exposé N° VI

8 Novembre 1972

Utilisant le prolongement ℓ_h et la restriction π_h on peut définir

$$A^h : \mathcal{D} \to C^\infty$$

par la formule (modulo T^h_∞) :

$$A^h u = \ell_h \, F_{\xi\to x,h} \, a(h,x,\xi) F_{x\to\xi,h} \, \pi_h u \tag{3.2}$$

et l'on a le

<u>Théorème 3.1</u> : Soit $a \in \mathcal{L}_\nu$ et A^h l'o.d.f. de symbole a. Alors la famille

$$A^h : \mathcal{D} \to C^\infty$$

est uniformément bornée par rapport à $h \in]0,h_o]$.

Le théorème suivant établit le rapport entre un o.d.f. A^h et son symbole gradué

<u>Théorème 3.2</u> : Soit A^h une famille de o.d.f. de symbole $a \in \mathcal{L}_\nu$ et de symbole gradué $\sigma_\Gamma(a) = \sum_{j\geq 0} {}^j a(x,\xi)$. Alors on a la formule asymptotique :

$$e^{-ih^{-1}x\eta} A^h(e^{ih^{-1}x\eta} f) = \sum_{k\geq 0,\alpha} \frac{h^{|\alpha|-s_k}}{\alpha!} \, {}^k a^{\alpha}(x,\eta) D^\alpha_x f \, (h \to 0), \ \forall \eta \in T^n_{\eta,1}\{0\}, \ \forall f \in \mathcal{D}. \tag{3.4}$$

Comme conséquence du théorème 3.2, on a le

<u>Théorème 3.3</u> : Le symbole gradué d'une famille des o.d.f. A^h est bien défini.

§ 4. ORDRE D'UN O.D.F. THEOREME DE CONTINUITE

Définition 4.1 : Soit A^h o.d.f. de symbole $a \in \mathcal{L}_\nu$. Si $a \notin \mathcal{L}_\mu$, $\forall \mu < \nu$, alors ν est dit ordre de A^h et l'on note : ord $A^h = \nu$.

Théorème 4.1 : Soit une famille A^h, ord $A^h = \nu$. Alors l'opérateur

$$A^h : H_{s+\nu}(0,h_o) \to H_s(0,h_o), \quad \forall\ s \text{ réel}$$

est linéaire continu.

En outre, modulo l'opérateur T^h_∞, les estimations suivantes sont vraies :

$$\|A^h\|_{H_{s+\nu} \to H_s} \le 2^{|s|} \left| \tilde{a}_{<x>}{}^{|s|} \right|_{-\nu} \tag{4.1}$$

Démonstration : Le théorème étant évident pour les o.d.f. des symboles indépendants de x, on suppose que $a(h,\infty,\xi) \equiv 0$ et l'on utilise la représentation :

$$(A^h u)^h(\xi) = (2\pi)^{-n} \int_{T^n_{\eta,h}} \tilde{a}^h(h,\xi-\eta,\eta)\tilde{u}^h(\eta)\,d\eta$$

où l'indice h en haut signifie que l'on prend la transformée de Fourier discrète en x.

Le lemme de Schur sur la continuité d'un opérateur intégral dans L^2, et une variante de l'inégalité de Peetre :

$$<\zeta_\xi>^s <\zeta_\eta>^{-s} \le 2^{|s|} <\zeta_{\xi-\eta}>^{|s|}$$

donne le résultat voulu, si l'on remarque encore que pour toute fonction $\varphi \in S$ on a, vue la formule de Poisson, l'inégalité :

$$\int_{T^n_{\xi,h}} |\tilde{\varphi}^h|\,d\xi \le \int_{R^n_\xi} |\tilde{\varphi}|\,d\xi$$

où $\tilde{\varphi}^h$ et $\tilde{\varphi}$ sont respectivement la transformée de Fourier discrète et intégrale de φ.

§ 5. FAMILLES DES O.D.F. A SYMBOLE GRADUE NUL

Théorème 5.1 : Soit une famille A^h de symbole $a(h,x,\xi)$ et de $\sigma_\Gamma(A^h) \equiv 0$. Alors (modulo T^h_∞) la famille A^h peut être mise sous la forme

$$(A^h u)(x) = \sum_{y \in R^n_{y,h}} K(h,x,x-y)u(y)h^n, \ \forall\, u \in \mathcal{S}(0,h_o)$$

la famille $K(h,x,z)$ étant définie sur $]0,h_o] \times R^n_x \times R^n_z$ et appartenant à un ensemble borné dans $C^\infty(R^n_x \times R^n_z)$; en outre, les restrictions de $K(h,x,z)$ sur $R^n_{x,h}$ et $R^n_{z,h}$ appartiennent à $\mathcal{S}(0,h_o)$.

Démonstration : On pose

$$K(h,x,z) = (2\pi)^{-n} \int_{T^n_{\xi,h}} e^{iz.\xi}\, a(h,x,\xi)d\xi, \ (x,z) \in R^n_x \times R^n_z \qquad (5.1)$$

et l'on trouve facilement

$$|D^\alpha_z\, K(h,x,z)| \leq C|\tilde{a}|_{-(n+j+1)}, \quad |\alpha| = j$$

On démontre, utilisant les inégalités :

$$|\tilde{a}_{<x>^j}|_{-s_r} < \infty$$

que

$$\sup_{h,x,y} |D^\alpha_z\, D^\beta_x\, K| < \infty, \ \forall\, \alpha,\beta.$$

La formule

$$z^\gamma K(h,x,z) = (2\pi)^{-n} \int_{T^n_{\xi,h}} (i\xi)^\gamma e^{iz.\xi} a(h,x,\xi)d\xi, \quad z \in R^n_{z,h}$$

permet de conclure que la restriction de $K(h,x,z)$ sur $R^n_{z,h}$ appartient à $\mathcal{S}(0,h_o)$. Il en est de même pour la restriction de K sur $R^n_{x,h}$. Comme conséquence du théorème 5.1 et de l'unicité du symbole gradué on a le

<u>Théorème 5.2</u> : Une famille A^h des o.d.f. est bien définie (modulo T^h_∞) par son symbole gradué.

§ 6. <u>FORMULES DE COMPOSITION ET FORMULE POUR LE SYMBOLE DE L'OPERATEUR CONJUGUE</u>

Les o.d.f. étant définis sur les espaces $H_s(0,h_o)$, on peut parler de leur composition. On obtient les formules usuelles pour le symbole et le symbole gradué de la composition des o.d.f. qui d'ailleurs s'avèrent quelquefois peu utiles dans les applications car dans le cas le plus simple de deux opérateurs qui sont une combinaison linéaire finie de translations, on obtient pour le symbole de la composition une série asymptotique. Pour cette raison on va d'abord énoncer ici un résultat qui est valable pour une classe plus restreinte de symboles, mais a l'avantage d'être utile en application où le plus souvent on a à faire à des approximations des opérateurs différentiels qui vérifient les conditions requises.

<u>Théorème 6.1</u> : Soient deux familles A^h et B^h d'ordre respectivement ν et μ et de symboles $a(h,x,\xi)$ et $b(h,x,\xi)$; on suppose, en plus que a est un polynôme en $(\zeta_\xi,\bar\zeta_\xi)$ tel que $\partial^\alpha_\zeta \partial^\beta_{\bar\zeta}\, a \in \mathcal{L}_{\nu-|\alpha|-|\beta|}$. Alors la formule suivante est vérifiée :

$$A^h \circ B^h = \sum_{\text{finie}} C^h_j \qquad (6.1)$$

où C^h_j sont des familles des o.d.f. d'ordre $\nu+\mu-j$ et de symboles $C_j(h,x,\xi)$,

$$C_j(h,x,\xi) = \sum_{|\alpha|+|\beta|=j} \frac{1}{(\alpha+\beta)!}(1+ih\zeta_\xi)^\alpha(1-ih\,\bar\zeta_\xi)^\beta(\partial^\alpha_\zeta\,\partial^\beta_{\bar\zeta} a)(D^\alpha_{x,h}\bar D^\beta_{x,h} b)\,.$$

Ici ∂_{ζ_j} et $\partial_{\bar\zeta_j}$ sont des dérivées par rapport à ζ_j et $\bar\zeta_j$.
Dans la démonstration on utilise la représentation de $(A^h \circ B^h u)$ en images de Fourier discrètes, la formule de Taylor et la formule :

$$\zeta_{\eta_j} = \zeta_{\tau_j} + (1+ih\zeta_{\tau_j})\zeta_{\eta_j-\tau_j}$$

On étudie de la même manière l'opérateur conjugué, le produit scalaire correspondant étant défini par

$$(u,v)_h = \sum_{x\in R^n_x} u\,\bar v\, h^n$$

et l'on trouve pour son symbole, sous les mêmes hypothèses que le théorème 6.1, la formule :

$$\sigma({}^tA^h) = \sum_{\text{finie}} \frac{1}{(\alpha+\beta)!} (1 + ih\zeta_\xi)^\alpha (1 - ih\bar{\zeta}_\xi)^\beta \partial_\zeta^\alpha \partial_{\bar\zeta}^\beta D_{x,h}^\alpha \bar{D}_{x,h}^\beta \, {}^t\sigma(A^h) \tag{6.3}$$

Dans le cas général on démontre le résultat suivant :

<u>Théorème 6.2</u> : Soient deux o.d.f. A^h et B^h de symboles $a(h,x,\xi) \in \mathcal{L}_\nu$ et $b(h,x,\xi) \in \mathcal{L}_\mu$. Alors la composition $A^h \circ B^h$ est un o.d.f. d'ordre $\nu + \mu$ au plus et pour tout $N \geq 1$, N entier, $A^h \circ B^h$ admet une décomposition :

$$A^h \circ B^h = \sum_{0 \leq j \leq N-1} C_j^h + R_N^h \tag{6.4}$$

où les o.d.f. C_j^h sont d'ordre $\nu + \mu - j$ et de symboles :

$$C_j(h,x,\xi) = \sum_{|\alpha| = j} \frac{1}{\alpha!} a^\alpha(h,x,\xi) b_\alpha(h,x,\xi), \tag{6.5}$$

et l'opérateur

$$R_N^h : H_s(0,h_o) \to H_{s-\nu-\mu+N}(0,h_o) \tag{6.6}$$

est linéaire continu, $\forall$ s réel dont la norme vérifie l'inégalité :

$$\|R_N^h\|_{H_s \to H_{s-\nu-\mu+N}} \leq C \left| \tilde{b}_{<x>^{q+N}} \right|_{-\mu} \sum_{|\alpha| \leq N} \left| \tilde{a}_{<x>^q \xi^\alpha} \right|_{|\alpha| - \nu} \tag{6.7}$$

avec $q = |s-\mu| + |N-\nu|$.

Pour le symbole gradué $\sigma_\Gamma(A^h \circ B^h)$ la formule suivante est vérifiée :

$$\sigma_\Gamma(A^h \circ B^h) = \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha \sigma_\Gamma(A^h) D_x^\alpha \sigma_\Gamma(B^h)$$

où $\sigma_\Gamma(A^h)$ et $\sigma_\Gamma(B^h)$ sont des symboles gradués respectivement de A^h et de B^h.

La décomposition (6.4), (6.5) n'est pas unique, tandis que les termes de $\sigma_\Gamma(A^h \circ B^h)$ sont bien définis par $\sigma_\Gamma(A^h)$, $\sigma_\Gamma(B^h)$.

§ 7. INEGALITE DE GÅRDING-LAX-NIRENBERG

On munit $H_s(0,h_o)$ d'une famille de produits scalaires :

$$(u.v)_s^h = (2\pi)^{-n} \int_{T^n_{\xi,h}} <\zeta_\xi>^{2s} \tilde{u}^h \overline{\tilde{v}^h}\, d\,\xi \qquad (7.1)$$

Pour simplifier les énoncés, on va supposer ici que $s_o - s_1 \geq 1$, s_o et s_1 étant respectivement les ordres des deux premiers termes des symboles gradués des o.d.f.

<u>Théorème 7.1</u> : Soit une famille P^h des o.d.f. de symbole $P(h,x,\xi) \in \mathcal{L}_{s_o}$ et de symbole gradué

$$\sigma_\Gamma(P^h) = \sum_{j\geq 0} P_j(x,\xi), \quad P_j \in K_{s_j}, \quad s_o - s_1 \geq 1. \qquad (7.2)$$

Supposons que $P_o(x,\xi)$ soit une matrice hermitienne non-négative en tout point $(x,\xi) \in R^n_x \times (T^n_\xi - \{0\})$.

Alors l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\mathrm{Re}\ (P^h u,u)_s^h \geq - C\|u\|^2_{\frac{s_o-1}{2}+s,h} \quad , \quad \forall u \in H_{\frac{s_o}{2}+s}(0,h_o) \qquad (7.3)$$

avec C indépendant de h et u.

On va esquisser la démonstration.

1°) On peut supposer, sans restreindre la généralité que $s = s_o = 0$. Sinon par un procédé standard de changement de fonction on se ramène à ce cas.

2°) On peut supposer que le symbole $P(h,x,\xi)$ est hermitien et non négatif, sinon on remplace P^h par la famille P^h_o ayant pour symbole :

$$\varphi_\xi\ P_o(x,h\xi)$$

3°) On construit une famille d'opérateurs B^h telle que $B^h = {}^tB^h$, $B^h \geq 0$, et

$$|\mathrm{Re}((P^h - B^h)u,u)_o^h| \leq C\|u\|^2_{-1/2,h} \qquad (7.2)$$

Supposons que l'on ait trouvé un tel B^h. Alors on a :

$$-\mathrm{Re}(P^h u,u)_o^h \leq \mathrm{Re}([B^h - P^h]u,u)_o^h \leq C\ \|u\|^2_{-1/2,h}$$

4°) Construction de B^h. Soit $\varphi(\theta) \in \mathcal{D}(R^n_\theta)$, $\mathrm{supp}\,\varphi \subset \{|\theta|<1\}$, $\varphi \geq 0$ $\varphi(-\theta) = \varphi(\theta)$ et $\int \varphi^2(\theta)d\theta = 1$.

On pose :

$$\varphi_h(\xi,\lambda) = \langle\zeta_\xi\rangle^{-n/4}\varphi(\langle\zeta_\xi\rangle^{-1/2}(\xi-\lambda))$$

$$\Phi(h;\xi,\lambda) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}^n} \varphi_h(\xi + 2\pi\,\gamma h^{-1},\lambda)$$

On définit un symbole "double" :

$$b(h,\xi,x,\eta) = \int_{T^n_{x,h}} \Phi(h,\xi,\lambda)P(h,x,\lambda)\Phi(h,\eta,\lambda)d\lambda \qquad (7.2)'$$

auquel on associe la famille B^h au moyen de la formule :

$$\widetilde{(B^h u)}^h(\xi) = (2\pi)^{-n}\int_{T^n_{\eta,h}} \tilde{b}^h(h,\xi,\xi-\eta,\eta)\tilde{u}^h(\eta)d\eta \qquad (7.2)''$$

où, comme d'habitude, l'indice h en haut signifie la transformée de Fourier discrète en x.

La démonstration de (7.2) est assez longue. Par contre, la non-négativité de B^h est immédiate. En effet, on a

$${}^t b(h,\eta,x,\xi) = b(h,\xi,x,\eta),\ \ b(h,\xi,x,\eta) \geq 0.$$

Il en résulte que

$$(2\pi)^{-n}\int_{T^n_{\xi,h}}\int_{T^n_{\eta,h}} \overline{e^{ix.\xi}\hat{u}^h(\xi)}\,b(h,\xi,x,\eta)e^{ix.\eta}\hat{u}^h(\eta)d\xi d\eta \geq 0 \qquad (7.3)$$

Multipliant les deux membres de (7.3) par h^n et sommant par rapport à $x \in R^n_{x,h}$, on obtient, vue la formule de Parseval :

$$(B^h u,u)_o^h = (2\pi)^{-n}\int_{T^n_{\xi,h}}\int_{T^n_{\eta,h}} \overline{\tilde{u}^h(\xi)}\,\tilde{b}^h(h,\xi,\xi-\eta,\eta)\hat{u}^h(\eta)d\xi d\eta \geq 0 \quad (7.4)$$

Notons que pour une classe d'opérateurs aux différences finies, approximant l'unité, la variante correspondante de l'inégalité (7.3) dans $L_2(R_x^n)$ était démontrée dans [7] sous la forme :

$$\mathrm{Re}(P^h u,u) \geq - Ch\|u\|^2.$$

§ 8. THEORIE ELLIPTIQUE

Définition 8.1 : Une famille des o.d.f. A^h de symbole $a \in \mathcal{L}_\nu$ et de symbole gradué $\sigma_\Gamma(A^h) = \sum_{j\geq 0} {}^j a(x,\xi)$, ${}^j a \in K_{s_j}$, $s_o = \nu$, est dite elliptique, si ${}^o a(x,\xi)$ vérifie l'inégalité :

$$|{}^o a^{-1}(x,\xi)| \leq m^{-1} |\omega_\xi|^{-\nu}, \tag{8.1}$$

m est dite constante d'ellipticité de A^h.

On démontre pour une famille elliptique A^h d'ordre ν l'existence d'un régularisateur à gauche et à droite. On prouve que (8.1) est nécessaire et suffisante pour que l'on ait les estimations :

$$\|u\|_{s,h} \leq C(\|A^h u\|_{s-\nu,h} + \|u\|_{s-1,h}) \tag{8.4}$$

avec une contante C indépendante de h et u.

La suffisance de (8.1) découle immédiatement de l'existence du régularisateur. La nécessité suit de (8.4) si l'on y substitue

$$u(x) = e^{ih^{-1}\eta x} f(x), \quad f \in \mathcal{D}(R_x^n), \quad \eta \in T^n_{\eta,h} \setminus \{0\}.$$

On démontre, utilisant l'inégalité de Gårding une estimation plus précise que (8.2) qui fait apparaître la constante d'ellipticité m :

$$\|u\|_{s,h} \leq m^{-1} \|A^h u\|_{s-\nu,h} + C\|u\|_{s-1/2,h} \tag{8.6}$$

en supposant que $\nu - s_1 \geq 1$, où s_1 est l'ordre de ${}^1 a(x,\xi)$ de $\sigma_\Gamma(A^h)$.

Exemples : On va considérer ici quelques approximations d'opérateurs différentiels elliptiques.

a) Opérateur $D_x = -i\frac{d}{dx}$. Les familles de symbole ζ_ξ et $\bar{\zeta}_\xi$ approximent D_x avec l'ordre d'approximation $O(h)$ et sont elliptiques tandis que la famille de symbole $\frac{1}{2}(\zeta_\xi + \bar{\zeta}_\xi)$ approximant D_x avec la précision $O(h^2)$ ne l'est pas, la partie principale de son symbole gradué $\frac{1}{2}(\omega_\xi + \bar{\omega}_\xi)$ s'annulant pour $\xi = \pi$.

b) Opérateur de Cauchy-Riemann . La famille $D_{x_1,h} + i\,D_{x_2,h}$ approche l'opérateur de Cauchy-Riemann, mais la partie principale de son symbole gradué : $\omega_1 + i\omega_2$ s'annulle en un point $\xi \in T^n_{\xi,1} \smallsetminus \{0\}$, car les circonférences $|1+i\lambda| = 1$ et $|1-\lambda| = 1$ ont un point d'intersection dans le plan complexe λ, différent de $\lambda = 0$. Par contre, pour le système de Cauchy-Riemann

$$A = i \begin{Vmatrix} D_1 & -D_2 \\ D_2 , & D_1 \end{Vmatrix}$$

on peut indiquer une famille d'approximations elliptiques

$$A_t^h = it \begin{Vmatrix} D_{x_1,h_z} & -D_{x_2,h_z} \\ \bar{D}_{x_2,h} & \bar{D}_{x_1,h} \end{Vmatrix} + i(1-t) \begin{Vmatrix} \bar{D}_{x_1,h} & -\bar{D}_{x_2,h} \\ D_{x_2,h} & D_{x_1,h} \end{Vmatrix} \quad t \neq 0,5$$

On trouve facilement pour la partie principale ${}^o a(x,\xi)$ du symbole gradué $\sigma_\Gamma(A^h)$:

$$|\det {}^o a(x,\xi)| = |t\omega_1 + (1-t)\,\bar{\omega}_1|^2 + |t\omega_2 + (1-t)\bar{\omega}_2|^2 \geq (2t-1)^2\,|\omega|^2$$

c) Opérateurs de Laplace . La famille Δ^h de symbole

$$\sigma(\Delta^h) = -|\zeta_\xi|^2 \in \mathcal{L}_2$$

approche de façon elliptique le laplacien.

Par contre, l'approximation de symbole

$$-\zeta_{\xi_n} - |\zeta_{\xi'}|^2 \in \mathcal{L}_2 \qquad \xi = (\xi', \xi_n)$$

n'est pas elliptique, car

$$\omega^2_{\xi_n} + |\omega_{\xi'}|^2 = 0$$

lorsque $\xi_n = \pi$ et ξ' vérifie l'équation :

$$|\omega_{\xi'}|^2 = 4.$$

La famille des o.d.f.

$$\Delta_2^h = -\sum_{j=1}^{n} |D_{x_j,h}|^2 + \frac{h^2}{12} \sum_{k\neq j} |D_{x_j,h}|^2 \, |D_{x_k,h}|^2$$

approche le laplacien de façon elliptique seulement lorsque $n \leq 3$. Ici l'ordre d'approximation est $O(h^4)$. En effet, le symbole gradué $\sigma_\Gamma(\Delta_2^h) = -|\omega_\xi|^2 + \frac{1}{12} \sum_{k\neq j} |\omega_{\xi_j}|^2 |\omega_{\xi_k}|^2$ est une fonction à valeurs réelles, qui est négative pour $|\omega_\xi|$ petit et positive pour $|\omega_{\xi_j}| = 2$, $n > 3$.

L'approximation de symbole

$$-|\zeta_\xi|^2 + \frac{h^2}{12} \sum_{k\neq j} |\zeta_{\xi_j}|^2 |\zeta_{\xi_k}|^2 - \frac{h^4}{30} \sum_{1\leq k<l<p\leq n} |\zeta_{\xi_k}|^2 |\zeta_{\xi_l}|^2 |\zeta_{\xi_p}|^2$$

est elliptique, $\forall$ n, et son ordre d'approximation est h^6.

d) Système d'équations de la théorie de l'élasticité. Ce système peut être mis sous la forme :

$$A(D_x) = \mu\Delta I + (\mu + \lambda)\nabla(\nabla.)$$

ici $x \in R_x^n$, $u(x)$ est une fonction-colonne d'ordre n, I-matrice unité d'ordre n, ∇ et $\nabla.$ désignant respectivement les opérateurs de gradient et de divergence.

Notons par ${}^+\nabla^h$ et $({}^+\nabla.^h)$ respectivement les opérateurs de gradient et de divergence au sens des différences finies en avant. De même, ${}^-\nabla^h$ et $({}^-\nabla^h)$ désignent les opérateurs correspondants où les différences sont prises en arrière.

Les approximations

$$B^h(D_{x,h}) = \mu\Delta^h + (\mu + \lambda)\,{}^+\nabla^h({}^-\nabla.^h)$$

$$C^h(D_{x,h}) = \mu\Delta^h + (\mu + \lambda)\,{}^-\nabla^h({}^+\nabla^h)$$

sont elliptiques et conserve la propriété de négativité du système différentiel. Les approximations :

$$A_t^h(D_{x,h}) = tB^h + (1-t)C^h, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

sont également elliptiques et négatives. Pour $t = 0,5$ on obtient une meilleure approximation $\sim O(h^2)$.

e) <u>Systèmes fortement elliptiques</u> . On peut les mettre sous la forme

$$A(x,D_x) = \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} D_x^\alpha(A_{\alpha,\beta}(x)D_x^\beta) + B(x,D_x), \quad \text{ord } B \leq 2m-1$$

$A_{\alpha,\beta}(x)$ étant symmétriques et vérifiant la condition :

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} A_{\alpha,\beta}\, \xi^{\alpha+\beta} \geq C|\xi|^{2m} I.$$

Les familles

$$A_o^h(x,D_{x,h}) = \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} D_{x,h}^\alpha(A_{\alpha,\beta}(x)\bar{D}_{x,h}^\beta)$$

donnent une approximation elliptique de la partie principale de $A(x,D_x)$, qui conserve la positivité sur les réseaux. Il est naturel d'appeler ces approximations fortement elliptiques. Il est bien de noter que les approximations fortement elliptiques des systèmes différentiels fortement elliptiques forment un ensemble convexe.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. J. Kohn and L. Nirenberg : Algebra of pseudodifferential operators, Comm. Pure Appl. Math. 18 (1965).

[2] L. Hörmander : Algebra of pseudodifferential operators, Comm. Pure Appl. Math. 18 (1965).

[3] R. Courant, K. O. Fiedrichs, H. Levy : Sur les équations aux différences finies de la physique mathématique, Uspechi Mathém. Nank, v.8,1940. (en russe).

[4] L. Frank : Difference operators in convolutions, Dokl. Akad. Nank SSSR, Tom (8) (1968), N° 2, traduction anglaise Soviet Math., Dokl., Vol. 9 (1968), N° 4.

[5] V Thomée and B Westergren : Elliptic difference equations and interior regularity, Numerische Math., 1968, vol. II, N°3.

[6] L. Frank : Spaces of network functions, Mat. Sbornik Tom 86 (128) (1971), N°2, traduction anglaise Math USSR Sbornik, vol. 15 (1971), N° 2, pp. 183-226.

[7] P. D. Lax and L. Nirenberg : On the stability for difference schemes : a sharp form of Gårding's inequality, Comm. Pure Appl. Math. 1966, vol. 19, N°4, pp. 437-492.

[8] L. Schwartz : Théorie des distributions, Herman, Paris 1967.