Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

B. MAUREY

Théorèmes de factorisation dans les espaces L^p (suite)

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1972-1973), exp. nº 4, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1972-1973____A4_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES PARIS V

Téléphone : MÉDicis ...
(633)

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 2 - 1 9 7 3

THEOREMES DE FACTORISATION DANS LES ESPACES L^p

(suite)

par B. MAUREY

Exposé n° IV   18 Octobre 1972

Nous commencerons cet exposé en tirant les conséquences du corollaire du théorème 3 de l'exposé précédent.

Faisons une remarque évidente : soit F un espace de Banach tel que tout opérateur u de F dans $L^p(\Omega,\mu)$ se factorise par $L^q(\Omega,\mu)$. La même propriété est alors vraie pour tout quotient de F.

<u>Théorème 1</u> : a) Soient (X,ν) et (Ω,μ) deux espaces mesurés quelconques. Tout opérateur linéaire de $L^s(X,\nu)$ dans $L^p(\Omega,\mu)$ se factorise par $L^q(\Omega,\mu)$ dans chacun des cas suivants :

1) $s = +\infty$; $1 \leq p \leq q \leq 2$
2) $2 \leq s < +\infty$; $0 < p \leq q \leq 2$
3) $1 \leq s \leq 2$; $0 < p \leq q < s$

b) Soient p,q tels que $0 < p \leq q < 1$. Tout opérateur linéaire continu d'un espace de Banach E dans $L^p(\Omega,\mu)$ se factorise par $L^q(\Omega,\mu)$.

<u>Démonstration</u> : Dans a), on traduit les théorèmes suivants sur les applications p-sommantes :

1) $\forall$ F, $\pi_2(L^1,F) = \pi_1(L^1,F)$ [2] ou [6]
2) $\forall$ F, $\pi_2(L^{s'},F) = \pi_p(L^{s'},F)$, $0 < p \leq 2 \leq s < +\infty$
3) $\forall$ F, $\pi_q(L^{s'},F) = \pi_p(L^{s'},F)$, $0 < p < q < s \leq 2$, (voir [4]).

Pour montrer b), on remarque que E est un quotient d'un $l^1(I)$ pour I convenable, et on applique :

$$\forall F, \quad \pi_q(c_o(I),F) = \pi_p(c_o(I),F), \qquad 0 < p < q < 1 \qquad \text{(voir [1])}$$

Notons que le théorème 1b implique immédiatement le résultat suivant : tout espace de Banach plongeable dans un espace $L^p(\Omega,\mu)$ avec $0 < p < 1$ est plongeable dans $L^q(\Omega,\mu)$ pour tout q tel que $0 < p < q < 1$.

Le théorème 1 permet de résoudre un problème posé par Lindenstrauss et Pelczynski [6], résolu par S. Kwapien par une méthode totalement différente : [5].

<u>Corollaire</u> : Soient (X,ν) et (Ω,μ) deux espaces mesurés, p, q, r trois réels tels que $1 \leq p \leq q \leq r \leq +\infty$. Tout opérateur linéaire de $L^r(X,\nu)$ dans $L^p(\Omega,\mu)$ se factorise par un espace L^q. (Mais pas nécessairement par $L^q(\Omega,\mu)$!)

<u>Démonstration</u> : Les cas :

$$1 \leq p \leq q \leq 2 \leq r \leq \infty \quad \text{et} \quad 1 \leq p \leq q \leq r \leq 2$$

sont donnés par le théorème 1 , ou sont évidents (si $q = r$)

On obtient par transposition les cas :

$$1 \leq p \leq 2 \leq q \leq r \leq +\infty \quad \text{et} \quad 2 \leq p \leq q \leq r \leq +\infty,$$

ce qui couvre finalement tous les cas possibles.

Nous examinerons maintenant le problème transposé du problème étudié dans l'exposé précédent : donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur linéaire continu u de $L^q(\Omega,\mu)$ dans un espace quasi-normé E admette la factorisation :

$$L^q(\Omega,\mu) \xrightarrow{T_g} L^p(\Omega,\mu) \longrightarrow E \;, \quad 0 < p \leq q \leq \infty.$$

En fait nous allons résoudre une question un peu plus générale. Soient S_q un sous-espace fermé de $L^q(\Omega,\mu)$, et $u \in L(S_q,E)$. Nous allons donner une condition nécessaire et suffisante pour que u admette la factorisation :

$$(1) \qquad \begin{array}{ccccc} L^q(\Omega,\mu) & \xrightarrow{T_g} & L^p(\Omega,\mu) & & \\ \bigcup & & \bigcup & & \\ S_q & \xrightarrow{j_g} & S_p & \longrightarrow & E \end{array}$$

où S_p est un sous-espace fermé de $L^p(\Omega,\mu)$, $0 < p \leq q \leq \infty$, $g \in L^r(\Omega,\mu)$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$, et j_g l'opérateur induit par la multiplication T_g.

Cela signifie exactement que :

$$\forall\, f \in S_q, \qquad \|u(f)\| \leq \left(\int |gf|^p d\mu\right)^{1/p}$$

Le théorème suivant est l'analogue du théorème 1 de l'exposé précédent :

Théorème 2 : Soient (Ω,μ) un espace mesuré, I un ensemble d'indices, p, q, r tels que $0 < p \leq q \leq +\infty$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$, et $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $L^q(\Omega,\mu)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $\exists\, g \in L^r(\Omega,\mu)$ $\quad \int |g|^r d\mu = 1$, et

$\forall\, i \in I$ $\quad \int |gf_i|^p\, d\mu \geq 1$

b) Pour tout $(\alpha_i) \in \mathbb{R}^{(I)}$, on a :

$$\left(\Sigma|\alpha_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\int (\Sigma|\alpha_i f_i|^p)^{q/p} d\mu\right)^{1/q}$$

Démonstration : Elle est analogue à celle du théorème 1 de l'exposé précédent. Esquissons-la dans le cas $0 < p < q < +\infty$. Posons $s = \frac{q}{p}$. Soit K le convexe compact pour $\sigma(L^{s'},L^s)$ des fonctions $g \geq 0$ telles que $\int |g|^{s'}\, d\mu \leq 1$.

Pour chaque $\alpha \in \mathbb{R}^{(I)}$, on définit F_α sur K par :

$$F_\alpha(g) = \Sigma \int |\alpha_i\, f_i\,|^p\, g\, d\mu - \Sigma\, |\alpha_i|^p$$

chaque F_α est continue et affine sur K, et l'ensemble des F_α est convexe. De plus :

$$F_\alpha(g_\alpha) \geq 0, \text{ avec } g_\alpha = \frac{(\Sigma|\alpha_i\, f_i\,|^p)^{q/r}}{C},$$

$$\text{et } C = \left(\int (\Sigma|\alpha_i\, f_i|^p)^{q/p}\, d\mu\right)^{1/s'}.$$

On conclut par le lemme de l'exposé précédent .

Corollaire : Soient (Ω,μ) un espace mesuré, E un espace quasi-normé, p et q tels que $0 < p \leq q \leq +\infty$, S_q un sous-espace fermé de $L^q(\Omega,\mu)$, et u un opérateur linéaire continu de S_q dans E. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) u admet la factorisation (1)

b) Il existe une constante C telle que pour toute suite (f_n) d'éléments de S_q, on ait :

$$(\Sigma\|u(f_n)\|^p)^{1/p} \leq C\ (\int(\Sigma|f_n|^p)^{q/p}\, d\mu\ )^{1/q}$$

Démonstration : On se ramène immédiatement à l'application du théorème 2, en prenant

$$I = S_q \doteq \{f \in S_q \mid u(f) = 0\},\ \text{et si } x \in I,\ f_x = \frac{x}{\|u(x)\|}.$$

Nous utiliserons le résultat suivant, qui est très facile :

Proposition 1 : Soient (Ω,μ) un espace mesuré, $q \in]0, +\infty[$, S_q un sous-espace fermé de $L^q(\Omega,\nu)$, $g \in L^q(\Omega,\nu)$, T_g l'opérateur de multiplication par g de $L^\infty(\Omega,\mu)$ dans $L^q(\Omega,\nu)$, $S_\infty = T_g^{-1}(S_q)$, et j_g l'opérateur induit par T_g sur S_∞. L'opérateur j_g est q-sommant, avec

$$\pi_q(j_g) \leq (\int|g|^q\, d\mu\ )^{1/q}.$$

Faisons quelques remarques à propos de la définition des applications p-sommantes. Soient E un espace de Banach, F un sous-espace fermé de E, et $(x_1,\ldots,x_n) \in F$. On a d'après Hahn-Banach :

$$\sup_{\substack{\xi\in F'\\ \|\xi\|\leq 1}} (\Sigma|<x_i,\xi>|^p)^{1/p} = \sup_{\substack{\eta\in E'\\ \|\eta\|\leq 1}} (\Sigma|<x_i,\eta>|^p)^{1/p}$$

Si maintenant E est le dual d'un espace de Banach G, la boule unité de G est dense dans celle de E' pour $\sigma(E',E)$, donc :

$$\sup_{\substack{\eta\in E'\\ \|\eta\|\leq 1}} (\Sigma|<x_i,\eta>|^p)^{1/p} = \sup_{\substack{\zeta\in G\\ \|\zeta\|\leq 1}} (\Sigma|<x_i,\zeta>|^p)^{1/p}$$

Ces deux remarques seront utilisées dans la démonstration du théorème suivant, qui est l'analogue du corollaire du théorème 3 de l'exposé précédent :

<u>Théorème 3</u> : Soient E un espace quasi-normé, p,q deux réels tels que $0 < p \leq q \leq +\infty$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) Il existe une constante C telle que pour tout espace de Banach F et tout opérateur $v \in \pi_q(F,E)$, on ait

$$\pi_p(v) \leq C\, \pi_q(v)$$

b) Pour tout espace mesuré (Ω,μ) et tout sous-espace fermé S_q de $L^q(\Omega,\mu)$, tout opérateur linéaire continu de S_q dans E admet la factorisation (1):

$$S_q \xrightarrow{j_g} S_p \longrightarrow E$$

<u>Démonstration</u> : Démontrons b) $\Rightarrow$ a). D'après [8], tout opérateur q-sommant de F dans E admet la factorisation :

$$\begin{tikzcd} & L^\infty(\Omega,\mu) \arrow[rr, "j"] & & L^q(\Omega,\mu) & \\ & \bigcup & & \bigcup & \\ F \arrow[r] & S_\infty \arrow[rr] & & S_q \arrow[r] & E, \end{tikzcd}$$

où μ est une probabilité et j l'injection canonique. On en déduit aisément que b) $\Rightarrow$ a).

Montrons que a) $\Rightarrow$ b). Soient $(f_1,\ldots,f_n) \in S_q$. Considérons $g = (\Sigma|f_i|^p)^{1/p}$, et $S_\infty = T_g^{-1}(S_q)$. Posons $h_i = \frac{f_i}{g}$. On a $|h_i| \leq 1$, donc $h_i \in S_\infty$. D'après la proposition 1, $u \circ j_g$ est q-sommant, avec :

$$\pi_q(u \circ j_g) \leq \|u\|\ \|g\|_{L^q}$$

donc d'après l'hypothèse a) :

$$\pi_p(u \circ j_g) \leq C\|u\|\ \|g\|_{L^q}$$

Posons $K = C\|u\| \, \|g\|_{L^q}$. On a par conséquent, d'après les remarques qui précèdent le théorème 3 :

$$(\Sigma\|u(f_i)\|^p)^{1/p} = (\Sigma\|u \cdot j_g(h_i)\|^p)^{1/p}$$

$$\leq K \sup_{\substack{\varphi \in L^1 \\ \|\varphi\| \leq 1}} (\Sigma|\int h_i \varphi \, d\mu|^p)^{1/p}$$

$$\leq K \sup_{\substack{\varphi \in L^1 \\ \|\varphi\| \leq 1}} \int (\Sigma|h_i|^p)^{1/p} |\varphi| \, d\mu$$

Mais $(\Sigma|h_i|^p)^{1/p} = 1$, donc :

$$(\Sigma\|u(f_i)\|^p)^{1/p} \leq C\|u\| \left(\int (\Sigma|f_i|^p)^{q/p} d\mu\right)^{1/q},$$

d'où le résultat par le corollaire du théorème 2.

Nous admettons le résultat suivant : (voir [7] et [4]).

<u>Proposition 2</u> : Soit E un espace quasi-normé plongeable dans un espace $L^0(\Omega,\mu)$, ou un Banach isomorphe à un sous-espace d'un quotient d'un $L^p(\Omega,\mu)$, avec $1 < p \leq 2$. Pour tout $q < \infty$, il existe une constante C_q telle que pour tout Banach F, et tout $v \in \pi_q(F,E)$, on ait :

$$\pi_2(v) \leq C_q \pi_q(v)$$

<u>Théorème 4</u> : Soient (Ω,μ) un espace mesuré, E un espace vérifiant les hypothèses de la proposition 2, S_q un sous-espace fermé de $L^q(\Omega,\mu)$, avec $2 \leq q < +\infty$. Tout opérateur linéaire continu u de S_q dans E admet la factorisation :

$$S_q \xrightarrow{j_g} S_2 \longrightarrow E \; .$$

En particulier, tout opérateur linéaire continu u de S_q dans E admet un prolongement linéaire et continu de $L^q(\Omega,\mu)$ dans E.

Démonstration : La première assertion résulte immédiatement du théorème 3 et de la proposition 2, la deuxième du fait que S_2 est complémenté dans $L^2(\Omega,\mu)$.

Le théorème 4 admet le corollaire suivant, qui généralise un théorème de Kadec et Pelczynski [3].

Corollaire : Soit E un sous-espace de $L^q(\Omega,\mu)$ vérifiant les hypothèses de la proposition 2, avec $2 \leq q < +\infty$. L'espace E est hilbertisable et il est complémenté dans $L^q(\Omega,\mu)$.

Démonstration : D'après le théorème 4, l'identité de E admet la factorisation :

$$E \xrightarrow{j_g} S_2 \xrightarrow{\bar{u}} E ,$$

d'où résultent immédiatement les résultats voulus.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Chevet : Deux journées p-radonifiantes, exposé n°2, Séminaire Goulaouic-Schwartz, 1971-72.

[2] A. Grothendieck : Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques, Bol. da Soc. Math. de Sao-Paulo 8 (1956) p.1.79.

[3] M.I. Kadec et A. Pelczynski : Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in the spaces L^p, Studia Math. 21 (1962) p. 161-176.

[4] S. Kwapien : On a theorem of L. Schwartz and its applications to absolutely summing operators, Studia Math. 38 (1970) p. 193-201.

[5] S. Kwapien : On operators factorizable through L^p spaces (à paraître).

[6] J. Lindenstrauss et A. Pelczynski : Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$-spaces and their applications, Studia Math. 29 (1968) p.275-326.

[7] B. Maurey : C. R. Acad. Sc. Paris, (Octobre 1972).

[8] Séminaire L. Schwartz, 1969-1970.
