

# SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

M. S. BAOUENDI

**Approximation polynomiale sur un compact de  $\mathbb{R}^N$**

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1972-1973), exp. n° 2, p. 1-6*

[http://www.numdam.org/item?id=SEDP\\_1972-1973\\_\\_\\_A2\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1972-1973___A2_0)

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)  
(École Polytechnique), 1972-1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDICIS 11-77  
(633)

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 2 - 1 9 7 3

-----  
APPROXIMATION POLYNOMIALE SUR  
UN COMPACT DE  $\mathbb{R}^N$ .  
-----

par M. S. BAOUENDI

Exposé N°II

4 Octobre 1972



Le contenu de cet exposé se trouve essentiellement dans deux articles écrits en collaboration avec C. Goulaouic, le premier est paru [1], le second est à paraître [2]. Nous renvoyons à ce travail pour les démonstrations et la bibliographie complètes. Nous nous limitons ici aux principaux résultats.

§ 1. Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{R}^N$ . Nous désignons par  $\mathcal{C}^\infty(K)$  (resp.  $\mathcal{Q}(K)$ ) l'espace des fonctions continues sur  $K$  se prolongeant en fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  (resp. analytiques) au voisinage de  $K$ . Ces espaces sont munis de leurs topologies naturelles.

Pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}_n$  désigne l'espace des polynômes de  $n$  variables à coefficients complexes et de degré  $\leq n$ .

Pour  $1 \leq p \leq +\infty$ , et  $f \in L^p(K)$ , nous notons

$$d_{p,K}(f, \mathcal{P}_n) = \inf_{P \in \mathcal{P}_n} \|f - P\|_{L^p(K)}$$

(Pour  $p = \infty$ , la norme est le vrai sup.).

Le théorème bien connu de Weierstrass affirme qu'une fonction définie sur  $K$  est continue si et seulement si

$$d_{\infty,K}(f, \mathcal{P}_n) \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

Nous nous intéressons ici au problème suivant : comment est liée la régularité de  $f$  à la rapidité de la convergence de la suite

$$n \mapsto d_{p,K}(f, \mathcal{P}_n) ?$$

Introduisons d'abord les espaces de suites suivants, munis de leur topologie habituelle.

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \text{espace des suites à décroissance rapide} \\ &= \{(c_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} ; \forall \alpha > 0, \sup_n |n^\alpha c_n| < +\infty\}. \end{aligned}$$

Pour  $r > 0$ ,

$$\text{Exp}_r = \{(c_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} ; \exists a \in ]0, 1[, \sup_n |c_n| a^{-nr} < +\infty\}.$$

Les premiers résultats sur la question posée plus haut ont été obtenus par l'école russe au début de ce siècle. Le résultat suivant est essentiellement dû à Bernstein (cf. [3], [4]) à une variable, sa généralisation à plusieurs variables est facile.

Théorème 1 : Soient  $K$  un pavé compact de  $\mathbb{R}^N$ , d'intérieur non vide et  $f \in L^p(K)$ . On a :

1°)  $f \in \mathcal{C}^\infty(K)$  si et seulement si

$$(n \mapsto d_{p,K}(f, \rho_n)) \in \mathcal{J}.$$

2°)  $f \in \mathcal{Q}(K)$  si et seulement si

$$(n \mapsto d_{p,K}(f, \rho_n)) \in \text{Exp}_1.$$

§ 2. Le théorème précédent est en général faux pour un compact quelconque de  $\mathbb{R}^N$ , comme le montrent les exemples suivants dans  $\mathbb{R}^2$ .

Exemple 1 :  $K = \{(x_1, x_2); 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq e^{-1/x_1}\}$

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_2}{x_1}$$

Nous avons bien :

$$d_{\infty,K}(f, \rho_n) \in \mathcal{J} \text{ (et même mieux!)}$$

et

$$f \notin \mathcal{C}^\infty(K).$$

Cet exemple est dû à Zerner [6].

Exemple 2 :  $K = \{(x_1, x_2); 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\} \cup \{1 \leq x_1 \leq 2, x_2 = 0\}$ .

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_2}{x_1 - 2}$$

Nous avons :

$$d_{\infty,K}(f, \rho_n) \in \text{Exp}_1 \quad \text{et} \quad f \notin \mathcal{Q}(K).$$

Mais, pour un compact quelconque de  $\mathbf{R}^N$  le résultat suivant est toujours vrai :

Théorème 2 : Soit  $K$  un compact de  $\mathbf{R}^N$ .

1°) Si  $f \in \mathcal{C}^\infty(K)$  on a

$$d_{p,K}(f, \rho_n) \in \mathcal{J}.$$

2°) si  $f \in \mathcal{Q}(K)$  on a

$$d_{p,K}(f, \rho_n) \in \text{Exp}_1.$$

Nous avons aussi le résultat positif suivant :

Théorème 3 : Soient  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbf{R}^N$  à bord lipschitzien, et  $f \in L^p(\Omega)$ , on a :

1°)  $f \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$  si et seulement si

$$d_{p,\Omega}(f, \rho_n) \in \mathcal{J}$$

2°)  $f \in \mathcal{Q}(\bar{\Omega})$  si et seulement si

$$d_{p,\Omega}(f, \rho_n) \in \text{Exp}_1.$$

La partie 1°) de ce théorème est dans [6].

Ce théorème a été d'abord démontré par les auteurs du présent travail dans le cas de la boule unité de  $\mathbf{R}^N$  ( $p=2$ ) en considérant les fonctions propres de l'opérateur différentiel

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left( 1 - \sum_{j=1}^N x_j^2 \right) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i,j} (x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_i})^2.$$

Considérons, en particulier, le cas  $p = 2$  dans le théorème 3. Soient  $(P_j)$  une base orthonormale de polynômes dans  $L^2(\Omega)$  et  $\Phi$  l'application de  $L^2(\Omega)$  dans  $l^2$  qui à  $f \in L^2(\Omega)$  fait correspondre ses coefficients de Fourier

$$f_j = (f, P_j)$$

Nous obtenons à partir du théorème 3 le corollaire suivant

Corollaire 1 : Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$  à bord lipschitzien.

L'application  $\Phi$  est un isomorphisme de

$$C^\infty(\bar{\Omega}) \text{ sur } \mathcal{J}$$

et de

$$Q(\bar{\Omega}) \text{ sur } \text{Exp}_{\frac{1}{N}}$$

Ceci implique en particulier le résultat suivant :

Soient  $\Omega_i$  un ouvert borné à bord lipschitzien dans  $\mathbb{R}^{N_i}$ ,  $i = 1, 2$ . On a :

1°)  $C^\infty(\bar{\Omega}_1)$  est isomorphe à  $C^\infty(\bar{\Omega}_2)$

2°)  $Q(\bar{\Omega}_1)$  est isomorphe à  $Q(\bar{\Omega}_2)$

si et seulement si  $N_1 = N_2$ .

Le point 2°) est à comparer à un théorème connu de Kolmogoroff (voir [4] par exemple); il résulte du :

Lemme :  $\text{Exp}_{r_1}$  et  $\text{Exp}_{r_2}$  sont isomorphes si et seulement si  $r_1 = r_2$ .

§ 3. Nous allons nous intéresser ici seulement au cas analytique dans l'espace  $C(K)$  des fonctions continues sur  $K$  ( $p = \infty$ ).

Nous avons :

Théorème 4 : Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{R}^N$ . Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

(A) Pour  $f \in C(K)$ , on a l'équivalence

$$f \in Q(K) \Leftrightarrow (d_K(f, \mathcal{P}_n) \in \text{Exp}_1).$$

(B) Pour tout  $b > 1$  il existe  $\Omega$ , voisinage ouvert borné de  $K$  dans  $\mathbb{R}^N$  tel que pour tout  $P \in \mathcal{P}_n$  il existe  $Q$  analytique et bornée dans  $\Omega$ , identiquement nulle sur  $K$  vérifiant

$$\sup_{x \in \Omega} |P(x) + Q(x)| \leq b^n \sup_{x \in K} |P(x)|.$$

Remarque : Si aucune composante connexe de  $K$  n'est contenue dans un ensemble analytique on peut prendre  $Q \equiv 0$ , on peut aussi supposer que  $\Omega$  est un voisinage de  $K$  dans  $\mathbb{R}^N$  (au lieu de  $\mathbb{C}^N$ ).

La propriété (B) est une généralisation de la classique inégalité de Bernstein sur l'intervalle  $[-1,+1]$  (cf.[3] et [5]).

Nous obtenons facilement, à partir du théorème 4

Corollaire 2 : Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{R}^N$  tel que aucune de ses composantes connexes ne soit contenue dans un ensemble analytique. Pour que  $K$  vérifie (A) il faut et il suffit que, pour tout  $x \in K$ , il existe un compact  $L_x$  de  $\mathbb{R}^N$  vérifiant (B) et :

$$x \in L_x, \quad L_x \subset K$$

et aucune composante connexe de  $L_x$  n'est contenue dans un ensemble analytique.

Nous allons donner un critère suffisant pour qu'un compact  $K$  de  $\mathbb{R}^N$  vérifie (A) ou (B).

Etant donné un segment  $I$  de  $\mathbb{R}^N$ , d'extrémités  $A$  et  $B$ , on désigne, pour tout  $h > 1$ , par  $I(h)$  le segment homothétique de  $I$  de centre  $\frac{A+B}{2}$  et de rapport  $h$ . On note

$$K(h) = \bigcup_{I \subset K} I(h)$$

Nous obtenons à partir de l'inégalité de Bernstein sur un intervalle :

$$\sup_{x \in K(h)} |P(x)| \leq (h + \sqrt{h^2 - 1})^n \sup_{x \in K} |P(x)|$$

pour tout  $P \in \mathcal{P}_n$ . Nous en déduisons :

Théorème 5 : Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{R}^N$ ; si pour tout  $h > 1$ ,  $K(h)$  est un voisinage de  $K$ , il vérifie (A).

Exemple 3 : Le compact de l'exemple 1 vérifie l'hypothèse du théorème 5. Il vérifie donc (A) et (B). Notons que la fonction  $e^{-1/x_1}$  pourrait être remplacée par une fonction strictement croissante et continue sur  $[0,1]$ .

---

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. S. Baouendi et C. Goulaouic : Approximation polynomiale, Ann. Inst. Fourier, t.21 (1971) p. 149-173.
  - [2] M. S. Baouendi et C. Goulaouic : Bernstein inequality and approximation of analytic functions on compact sets. (à paraître).
  - [3] S. Bernstein : Oeuvres complètes
  - [4] G. G. Lorentz : Approximation of functions, Elsevier, 1965.
  - [5] W. L. Walsh : Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain, Amer. Math. Soc. Coll. publications v.20 (1969).
  - [6] M. Zerner : Développement en série de polynômes orthonormaux des fonctions indéfiniment différentiables, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 268 (1969), 218-220.
-