Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

F. Treves

Existence et régularité des solutions des équations aux dérivées partielles linéaires. Quelques résultats et quelques problèmes ouverts

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1972-1973), exp. n° 22, p. 1-21

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1972-1973____A23_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 2 - 1 9 7 3

EXISTENCE ET REGULARITE DES SOLUTIONS DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES LINEAIRES QUELQUES RESULTATS ET QUELQUES PROBLEMES OUVERTS

par F. TREVES

Exposé N° XXII

21 Mars 1973

Je voudrais décrire ici quelques résultats récents, dans la théorie générale des E.D.P. linéaires, et quelques problèmes qui, à ma connaissance, restent ouverts, et qui sont importants. Dans le paragraphe 1, je reviens un peu sur les équations à caractéristiques réelles simples, i.e., de type principal, pour montrer que leur étude (du point de vue de la résolubilité locale et de l'hypoellipticité) se ramène à celui de certaines équations différentielles ordinaires (E.D.O.) linéaires du 1er ordre (mais dépendant de paramètres), ce qui conduit à poser la question d'une réduction semblable (mais, bien entendu, à des E.D.O. d'ordre supérieur à un) dans le cas des caractéristiques multiples. Dans le paragraphe 2, je signale quatre problèmes importants de la théorie des équations de type principal, qui ne sont pas résolus. Au paragraphe 3, j'énonce quelques résultats (très hétérogènes) dans le cas des caractéristiques multiples, qui montrent que les choses sont fort compliquées.

§ 1. EQUATIONS DE TYPE PRINCIPAL : REDUCTION A DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES ORDINAIRES DU 1er ORDRE.

On considèrera un opérateur pseudodifférentiel dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$, de la forme

$$\mathbb{P} = P(x,D) \sim \sum_{j=0}^{\infty} P_{m-j}(x,D),$$

où les termes $P_{m-j}(x,\xi)$ sont positivement homogènes de degré m-j respectivement (bien entendu, seul le symbole principal $P_m(x,\xi)$ a un sens "intrinsèque"). On fait l'hypothèse de type principal :

(1) $\forall\ (x,\xi) \in \dot{T}^*\Omega$ (complémentaire de la section nulle dans le fibré cotangent sur Ω),

$$P_m(x,\xi) = 0 \quad \Rightarrow \quad d_\xi\, P_m(x,\xi) \neq 0.$$

Soit $(x_o,\xi^o) \in$ Caract $P = \{(x,\xi);\ P_m(x,\xi = 0\}$. La propriété (1) permet d'obtenir une factorisation, dans un voisinage conique Γ de (x_o,ξ^o), du genre

(2) $$P_m(x,\xi) = Q(x,\xi)(\xi_N - \lambda(x,\xi'))$$

(si $\frac{\partial P_m}{\partial \xi_N}(x_o,\xi^o) \neq 0$, ce que nous supposerons), où Q est elliptique (dans Γ) de degré m-1, alors que $\lambda \in C^\infty(\Gamma)$, homogène de degré 1 en $\xi' = (\xi_1,\dots,\xi_{N-}$ La procédure standard est alors de se ramener (par "microlocalisation") à l'étude des opérateurs du 1er ordre

(3) $$L = D_N - \lambda(x,D')$$

et d'effectuer une transformation canonique dans Γ qui mette L sous la forme

(4) $$L^G = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t} - ib(x,t,D_x)$$

avec $b(x,t,\xi)$ réel. On a changé complètement la notation pour les variables : x^N est devenu t, $x = (x^1,\dots,x^n)$ $(n = N-1)$ désigne les autres variables dans la base Ω (après le changement de coordonnées canoniques), τ est la co-variable associée à t, $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n)$ celle à x. On considère alors l'équation différentielle ordinaire (en t, dépendant des paramètres (x,ξ))

(5) $$\frac{du}{dt} + b(x,t,\xi)u = f(x,t,\xi).$$

On suppose désormais que t varie dans un intervalle fermé $|t| \leq T$, et (x,ξ) dans un voisinage conique Γ' de (x_o,ξ^o) dans $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}_n \setminus \{0\})$, lui aussi fermé.

Pour simplifier, nous prendrons Γ' de le forme $U \times \Gamma_o$, où U est un ouvert dans $\mathbb{R}^n$, contenant x_o, et Γ_o un cône ouvert dans $\mathbb{R}_n \setminus \{0\}$, contenant ξ^o, U et Γ_o auront une frontière très régulière. Appelons $\mathcal{E}$ l'espace des fonctions $f(x,t,\xi)$ qui sont C^∞ par rapport à (x,t,ξ) dans $\bar{U} \times [-T,T] \times \bar{\Gamma}_o$ à décroissance rapide par rapport à ξ à l'infini (suivant Γ_o), $\mathcal{D}'$ celui des distributions en (x,t) au voisinage de $\bar{U} \times [-T,T]$ qui dépendent mesurablement et de façon tempérée de $\xi \in \Gamma_o$.

On peut introduire alors les deux propriétés suivantes :

(6) $\forall f \in \mathcal{E}$, $\exists u \in \mathcal{D}'$ satisfaisant (5) ;

(7) $\forall u \in \mathcal{D}'$ satisfaisant (5) avec $f \in \mathcal{E}$, on a $u \in \mathcal{E}$.

Le lecteur remarquera que l'on connaît toutes les solutions de (5) et qu'en principe il est facile de décider si, oui ou non, (6) ou (7) est vérifiée. En effet, posons

$$B(x,t,t',\xi) = \int_{t'}^{t} b(x,s,\xi)\,ds.$$

Alors, pour $-T \leq T(x,\xi) \leq T$,

(8) $$u(x,t,\xi) = \int_{T(x,\xi)}^{t} e^{-B(x,t,t',\xi)} f(x,t',\xi)\,dt'.$$

Or, afin que (6) soit vérifiée, il faut et il suffit que l'on puisse choisir $T(x,\xi)$ (pour chaque $(x,\xi) \in \bar{\Gamma}'$) de manière à avoir :

(9) $\forall t \in [-T,T]$, $\forall t'$ dans l'intervalle qui joint t à $T(x,\xi)$,

$$B(x,t,t',\xi) \geq 0.$$

Le lecteur pourra vérifier que (9) équivaut à la propriété suivante :

(9') Si, pour $|t_0| \leq T$, $b(x,t_0,\xi) < 0$, alors $b(x,t,\xi) \leq 0$ pour tout t, $t_0 < t \leq T$.

De la même façon, le lecteur pourra montrer que la propriété (7) est équivalente à la conjonction des deux propriétés suivantes :

(10) Si, pour $|t_0| \leq T$, $b(x,t_0,\xi) > 0$, alors $b(x,t,\xi) \geq 0$ pour tout t, $t_0 < t \leq T$;

(11) <u>Il n'existe pas d'intervalle ouvert non vide de</u> $[-T,T]$ <u>dans lequel</u> $b(x,t,\xi)$ <u>s'annulle identiquement</u>.

Il est possible (mais non trivial : voir [1], appendix) de remonter de la propriété (9') (resp. (10) et (11)) à une propriété analogue, mais pour l'opérateur initial $\mathbb{P}$. A (9') correspond la propriété (Ψ) pour $\mathbb{P}$ (voir [1]), à (10) la propriété (Ψ) pour l'adjoint $\mathbb{P}^*$ de $\mathbb{P}$, à (11) la propriété (Q) (voir [2]).

Lorsque l'opérateur pseudodifférentiel $\mathbb{P}$ est <u>antipodal</u>, c'est-à-dire $P_m(x,-\xi) = (-1)^m P_m(x,\xi)$ (on suppose m entier), la propriété (Ψ) se réduit à la propriété $(\mathcal{P})$ (voir [1]). Il a été démontré par R. Beal et Ch. Fefferman que $(\mathcal{P})$ entraîne la <u>résolubilité locale</u> de $\mathbb{P}$, et Yu. V. Egorov a annoncé qu'il a prouvé que (Ψ) entraîne celle de $\mathbb{P}$ (supposé être ici un opérateur de type principal arbitraire). Sous une hypothèse additionnelle de zéros d'ordre fini (seulement au point où un changement de signe peut avoir lieu) il a été démontré (voir [1]) que (Ψ) est nécessaire, si $\mathbb{P}$ est localement résoluble. D'autre part, dans [2], [3], j'ai démontré (à peu près : il y a des cas pathologiques, du côté de la nécessité, qui restent "ouverts") que $(\mathcal{P})$ et (Q), c'est-à-dire les analogues de (10) et (11), sont équivalents à l'<u>hypoellipticité</u> de $P(x,D)$ (supposé être un opérateur <u>différentiel</u> de type principal).

Ce que je voudrais souligner ici c'est que, grâce à une microlocalisation, on a pu réduire complètement l'étude des équations de type principal, du point de vue de la résolubilité locale et de la régularité des solutions, à celle de l'équation différentielle ordinaire (5). C'est là une réduction qu'il serait bon, excellent même, de pouvoir effectuer dans les cas de caractéris tiques multiples. Cela permettrait d'échelonner les difficultés : en effet, l'équation différentielle ordinaire à laquelle on se serait ramenée, sera nécessairement (en général de degré > 1, précisément de degré égal à celui de la multiplicité des caractéristiques au point "central" (x_o,t_o,ξ^o,τ_o), et ce pourra être un travail délicat que de décider si la propriété (6) (ou (7)) est vraie.

Cette dernière étude peut présenter des difficultés considérables, comme on s'aperçoit en examinant l'état de la théorie des équations différentielles ordinaires (linéaires!) de degré > 1 - du point de vue des propriétés asymptotiques des solutions par rapport à un paramètre (pour nous (ξ)) tendant vers $+\infty$. Mais nous disposons d'un atout très avantageux, par rapport à qui se limite à l'étude d'une E.D.O. unique : les conditions qui nous intéressent ne concernent pas un rais $(x_o, \rho\,\xi^o)$, $\rho \sim +\infty$, unique, mais un cône entier $(x, \rho\,\xi)$, $(x,\xi) \in$ un ouvert du fibré des cosphères, et ceci, heureusement, impose des contraintes considérables sur le genre de E.D.O. qu'il nous faudra étudier.

Il n'en reste pas moins que, dans le cas des caractéristiques multiples, l'on ne connaît même pas l'équation différentielle ordinaire qui doit remplir le rôle de (5) : après tout, même la connaissance de (5) n'est pas immédiate, puisqu'il faut passer de (3) à (4)par la transformation canonique. Donc un des premiers objectifs de la théorie générale devrait être de déterminer les E.D.O. "basiques" (si elles existent). Cela fait, il faudrait démontrer que l'analogue de (5) entraîne (et si possible, est équivalent à) la résolubilité locale de $\mathbb{P}$: dans le cas des caractéristiques réelles simples, c'est ce qu'ont fait Beals et Ferfferman ([4] et aussi [5]) et , sans doute, Egorov.

<u>Remarque 1</u> : Il conviendrait de rappeler ici que le problème de la <u>nécessité</u> des conditions $(\mathcal{P})$ et (Ψ) (pour la résolubilité locale) reste ouvert : considérons par exemple un opérateur différentiel du 1er ordre à deux variables

$$\mathbb{P} = \frac{\partial}{\partial x} - i\, b(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$

et supposons que $x \longmapsto b(x,0)$ change de signe dans tout intervalle ouvert $|x| < \varepsilon$ $(\varepsilon \to +0)$. Est-il vrai, dans ce cas, que $\mathbb{P}$ n'est pas résoluble à l'origine ?

§ 2. <u>QUATRE PROBLEMES SUR LES EQUATIONS DE TYPE PRINCIPAL</u>

Ces quatre problèmes peuvent s'intituler comme suit :

1) Propagation des singulairtés,
2) Construction de paramétrix
3) Unicité dans le problème de Cauchy
4) Solutions des équations homogènes.

Ils sont bien connus ! Je vais cependant essayer de les délimiter un peu, et de donner quelques indications sur ce qu'on sait. Leur solution exigera presque certainement beaucoup de technique mais, en outre, en ce qui concerne les deux derniers, aussi une compréhension en profondeur des phénomènes. Il se peut que cette dernière nous échappe encore pour plusieurs années.

2.1 Propagation des singularités

Pour bien énoncer le problème on utilise la notion de wave-front set d'une distribution u (notée WF(u)). Etant donné $(x_o,\xi^o) \in T^*\Omega$, il s'agit de trouver le plus grand sous-ensemble $\mathcal{C}_{(x_o,\xi^o)}$ de $\mathring{T}^*\Omega$ tel que ceci soit vrai :

(12) $\forall\ u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que $(x_o,\xi^o) \notin WF(\mathbb{P}u)$,

on a :

$$(x_o,\xi^o) \in WF(u) \Rightarrow \mathcal{C}_{(x_o,\xi^o)} \subset WF(u).$$

Il y a d'excellentes raisons de croire que l'ensemble $\mathcal{C}_{(x_o,\xi^o)}$ est le suivant (je rappelle que $\mathbb{P}(x,D)$ est de type principal - en fait, je vais me limiter aux opérateurs différentiels qui satisfont la condition de résolubilité $(\mathcal{P})$: grosso modo, et microlocalement, $\mathcal{I}m\, P_m$ ne change pas de signe le long des bandes bicaractéristiques de Ré P_m sur lesquelles Ré P_m s'annule).

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $d(\mathrm{Re}\, z P_m) \neq 0$ en (x_o,ξ^o). Soient Γ_z la bande bicaractéristique de Ré $z P_m$ qui passe par (x_o,ξ^o) et Γ_z^o le plus grand intervalle fermé de Γ_z contenant (x_o,ξ^o) et sur lequel P_m s'annule identiquement. (Noter que Γ_z^o peut être réduit au point (x_o,ξ^o) ou même vide, si $P_m(x_o,\xi^o) \neq 0$). Alors :

(13) $$\mathcal{C}_{(x_o,\xi^o)} = \bigcup_{\substack{z\in\mathbb{C} \\ d(\text{Ré}\, z P_m)(x_o,\xi^o)\neq 0}} \Gamma_z^o$$

Le fait que $\mathcal{C}_{(x_o,\xi^o)}$ est bien donné par (13) a été démontré dans les cas suivants :

a) $P_m(x,\xi)$ réel, auquel cas $\mathcal{C}_{(x_o,\xi^o)}$ est soit vide (si $P_m(x_o,\xi^o) \neq 0$), soit identique à une courbe lisse, précisément la bande bicaractéristique (nulle) de P_m passant par (x_o,ξ^o) ;

b) $P_m(x,\xi)$ complexe mais d(Ré P_m) et d($\mathcal{I}$mP_m) linéairement indépendants en (x_o,ξ^o) ; dans ce cas $\mathcal{C}_{(x_o,\xi^o)}$ est une surface lisee (à deux dimensions réelles) qui peut être pourvue d'une structure analytique complexe (où le Hamiltonien de P_m joue le rôle de $\frac{\partial}{\partial z}$).

Les cas a) et b) ont été traités à fond dans [6], [7].

c) La condition suivante est satisfaite.

(R) En supposant que $P_m(x_o,\xi^o) = 0$, $d_\xi(\text{Ré}\, z P_m)(x_o,\xi^o) \neq 0$, la fonction $\mathcal{I}m\,(z P_m)$ garde le même signe dans un voisinage de (x_o,ξ^o) sur l'hypersurface (dans $\dot{T}^*\Omega$) Ré $z P_m(x,\xi) = 0$.

Sur ce sujet voir [8] (ou bien [2] : la propagation des singularités se voit bien sur l'expression des paramétrices).

d) P est à coefficients constants (dans ce cas, comme dans chacun des précédents lorsque les données sont analytiques, on peut remplacer le wave-front set par le wave-front set analytique ; voir [9]).

On notera que dans les cas a) et b) le "propagateur" est une sous-variété lisse -alors qu'il n'en est rien dans les cas c) et d), du moins en général.

Une introduction aux techniques qui devraient, en principe, servir pour démontrer la conjecture (à condition de les "raffiner") peut se trouver dans [10].

2.2 Construction d'une paramétrix

Il n'est pas besoin d'expliquer de quoi il s'agit. Il n'y a pas de construction générale, autant que je sache, à l'heure actuelle - sauf, ce qui est une coïncidence bizarre, dans les cas a), b), c), d) de 2.1. Même pas dans des cas extrêmement simples comme le suivant (le plus simple, à mon avis) :

(14) $$\mathbb{P} = \frac{\partial}{\partial x} - i\, y \frac{\partial}{\partial y} .$$

Cet opérateur différentiel est résoluble mais non hypoelliptique à l'origine. On obtient une paramétrix, disons à gauche en prenant

$$E(x,x',y,y') = \text{const.}\ \frac{y}{|y|}\ (y - y' e^{i(x-x')})^{-1}\ .$$

mais il s'agit d'une paramétrix au sens faible : elle envoie L^2 dans L^2 (localement) mais certes pas $C_c^\infty(=\mathcal{D})$ dans $C^\infty(=\mathcal{E})$. Or il est possible de démontrer qu'il existe un ouvert U contenant l'origine, tel que pour tout $f \in C_c^\infty(U)$ il existe $u \in C^\infty(U)$ qui satisfait

(15) $$\mathbb{P}u = f \quad \underline{\text{dans}}\ U.$$

(En passant je devrais rappeler que l'on n'a pas encore démontré ce fait pour un opérateur de type principal $\mathbb{P}$ qui vérifie $(\mathcal{P})$: on sait résoudre (15) avec $u \in H^m(U)$ pour $m < +\infty$; toutefois, non seulement u dépend de m -mais aussi l'ouvert U en dépend : diam $U \to 0$ avec $1/m$!)

Donc, question : est-ce que oui ou non l'opérateur (14) (et au delà, un opérateur différentiel du 1er ordre, ou même d'ordre quelconque de type principal, qui satisfait $(\mathcal{P})$) possede-t-il une paramétrix ?

2.3 <u>Unicité dans le problème de Cauchy</u>

Pour simplifier, supposons que $\mathbb{P}$ est du 1er ordre (de type principal). Soit une hypersurafce lisse S dans Ω, qui partage Ω en deux régions : Ω^+, Ω^-, c'est-à-dire $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^- \cup S$, avec $\Omega^+ \cap \Omega^- = \emptyset$, Ω^+, Ω^- des ouverts connexes. Soit une fonction $u \in C^1(\Omega)$ telle que

(16) $$\mathbb{P}u = 0 \text{ dans } \Omega\ ,$$

(17) $$u = 0 \text{ dans } \Omega^+\ .$$

On voudrait en conclure que $u = 0$ dans un voisinage d'un point donné x_o de S. A ce stade de généralité, on suppose que x_o n'est pas caractéristique, ce qui veut dire que si ξ^o est le covecteur normal à S en x_o, $P_1(x_o,\xi^o) \neq$ ($\mathbb{P}_1$ est le symbole principal de $\mathbb{P}$) . Il y a un énoncé analogue lorsque l'ordre de $\mathbb{P}$ est > 1 ; c'est une des formes habituelles de ce qu'on appell "<u>l'unicité dans le problème de Cauchy</u>", mais il y en a d'autres. Lorsque les coefficients de P(x,D) (et non pas seulement son symbole principal) son analytiques, le classique théorème de Hölmgren permet de conclure par l'affirmative : $n=0$ au voisinage de x_o. Lorsque les coefficients de $P(x,D)$ ne sont pas analytiques, il y a pas mal de cas particuliers connus (pour en rester dans le 1er ordre, il s'agit généralement de cas où **P** est l'opérateur ∂_b sur une hypersurface convenable dans $\mathbb{C}^2$). Dans un autre ord d'idées, M. Strauss et moi-même avons démontré, très récemment, le **résultat** suivant :

Théorème 2.1 : Si $\mathbb{P}$ est un opérateur différentiel du 1er ordre dans Ω, de type principal et satisfaisant la condition $(\mathcal{P})$, alors il y a unicité dans le problème de Cauchy (au sens précédent) à travers toute hypersurface non caractéristique.

Sous les hypothèses du théorème, on peut (au voisinage de x_o, point qu'on prend comme origine) réduire l'étude à celle d'un opérateur de la forme

$$\mathbb{P} = \frac{\partial}{\partial t} - i \sum_{j=1}^{n} b^j(x,t)\frac{\partial}{\partial x^j} \quad , \tag{18}$$

où les b^j sont réels et vérifient la condition suivante, qui est équivalente à $(\mathcal{P})$:

(19) $\exists$ une fonction vectorielle $v(x)$ telle que (dans le voisinage de l'"origine", où l'on se place)

$$\vec{b}(x,t) = |\vec{b}(x,t)|\vec{v}(x), \; \vec{b} = (b^1,\dots,b^n).$$

La démonstration du théorème 2.1 (voir [11]) est basée très essentiellement sur (19) et sur l'invariance des propriétés du genre de (P) lorsqu'on multiplie $\mathbb{P}$ par une fonction complexe non nulle.

En l'absence de (19) le théorème 2.1 n'est pas valable, comme le montre un exemple, en deux variables, dû à Paul Cohen (qui se trouve dans le livre de Hörmander, Linear partial differential operators, Springer, Th. 8.9.2).

Il faudrait aussi revenir à la même question, pour les opérateurs d'ordre > 1. Inutile de rappeler qu'ici on a les contre-exemples de Cohen et de Pliš. Pas question donc de se contenter de l'hypothèse $(\mathcal{P})$. Il y a néanmoins des liens entre la résolubilité locale (pour les pseudo-différentiels) et la validité des inégalités de Carleman qui servent, généralement, à déduire l'unicité dans le pb de Cauchy♦. Cependant la démonstration du Th. 2.1 montre qu'il est parfois nécessaire de localiser les inégalités de Carleman "infiniment" plus qu'on ne voudrait le faire a priori. En ordre > 1 on doit microlocaliser et non plus localiser, ce qui introduit le "modulo C^∞" inacceptable pour l'unicité dans le pb de Cauchy. Ces questions sont fort difficiles.

2.4 Solutions des équations homogènes

Je me limiterai à des indications très brèves -et aux équations de type principal du 1er ordre (encore que la question pourrait se poser en ordre > 1). On considère un opérateur

$$L = \sum_{j=1}^{N} \alpha^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j}, \tag{20}$$

où les $\alpha^j \in C^\infty(\Omega)$, et $\sum_{j=1}^{N} |\alpha^j|$ ne s'annule jamais. Soit $x_0 \in \Omega$; on aimerait savoir s'il existe une fonction u, définie et C^1 au voisinage de x_0, satisfaisant $Lu = 0$ au voisinage de x_0 et telle que $du(x_0) \neq 0$. Il est facile de démontrer que c'est bien le cas lorsque L satisfait à la condition de résolubilité locale $(\mathcal{P})$. Il découle immédiatement du théorème de Cauchy-Kovalevska que c'est le cas lorsque les coefficients $\alpha^j(x)$ sont analytiques. On ne peut plus conjecturer que ce soit le cas pour tout opérateur L du genre (20), depuis que L. Nirenberg a donné ses contre-exemples (l'année dernière) ou, plutôt, ses exemples d'opérateurs (20) tels que $Lh = 0 \Rightarrow h$ localement constante dans Ω. Les contre-exemples de Nirenberg sont "génériques", c'est-à-dire rentrent dans le cas où

$$d_\xi(\mathrm{Re}\, L(x,\xi)) \text{ et } d_\xi(\mathrm{Im}\, L(x,\xi))$$

sont linéairement indépendants (et le crochet de Poisson $\{L(x,\xi),\overline{L(x,\xi)}\}$ ne s'annule pas identiquement sur la variété caractéristique de L, autrement L serait localement résoluble). Le contre-exemple à deux variables

♦ cf. F. Trèves : A link between solvability of pseudo-differential equations and uniqueness in the Cauchy problem, Amer. J. of Math., vol. XCIV (1972), 267-288.

est présenté dans [12] ; un contre-exemple à trois variables sera publié prochainement (ils sont tous fort compliqués -et sont du genre Hans Lewy).

Ces contre-exemples posent le problème de la classification des opérateurs (20) du point de vue de l'existence locale de solutions non triviales de l'équation homogène (on devrait aussi examiner le problème de l'existence globale, dans les cas où l'existence locale est acquise). Il s'agit d'une question "profonde" (contrairement à (2.1)) dont l'étude va sans doute requérir des idées nouvelles et donner lieu à des découvertes intéressantes.

§ 3. RESULTATS ET PROBLEMES DANS LE CAS DES EQUATIONS A CARACTERISTIQUES DOUBLES.

On suppose ici que toutes les dérivées d'ordre ≤ 1 de $P_m(x,\xi)$ par rapport à ξ s'annulent en $(x_o,\xi_o) \in \overset{\circ}{T}{}^*\Omega$ mais que l'une au moins de ses dérivées secondes (par rapport à ξ) ne s'annule pas. En choisissant les variables convenablement, dans un voisinage cônique Γ de (x_o,ξ^o), on obtient une factorisation

(21) $$P_m(x,\xi) = Q(x,\xi)(\xi_N^2 + 2\,a_1(x,\xi')\xi_N + a_2(x,\xi'))$$

où Q est elliptique homogène de degré m-2 dans Γ, $a_1(x,\xi')$, $a_2(x,\xi')$ sont homogènes par rapport à ξ', de degré 1 et 2 respectivement (on peut en outre obtenir que a_1 et a_2 s'annulent en (x_o,ξ'^o)). En faisant opérer une paramétrix de Q sur $\mathbb{P}$ on se ramène au cas où

(22) $$\mathbb{P} = D_N^2 + 2\,a_1(x,D')D_N + a_2(x,D') + \mathbb{R}(x,D) \quad ,$$

où deg $R(x,\xi) \leq 1$.

Une première classification se fera suivant la nature des racines (en général complexes !) du polynôme en ξ_N ,

(23) $$p = \xi_N^2 + 2\,a_1(x,\xi')\xi_N + a_2(x,\xi') \quad ,$$

et donc, suivant les propriétés du discriminant

(24) $$\Delta(x,\xi') = a_1^2(x,\xi') - a_2(x,\xi') \quad .$$

Lorsqu'on parle de multiplicité constante, ou bien de ramification, des caractéristiques, il faut que cela se réfère aux racines du polynôme (23) -même lorsqu'elles sont complexes, mais évidemment au voisinage des points où elles deviennent réelles. Noter en effet que si elles restent éloignées de l'axe réel (dans le plan des ξ_N), P_m, et $\mathbb{P}$, sera elliptique. Noter aussi que la variété caractéristique de P_m n'a pas en général, de prolongement en dehors de l'espace réel $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_N$ ($P_m(x,\xi)$ est C^∞, non pas analytique). Il faut aussi souligner que l'on peut fabriquer des tas de factorisations (21), avec Q et des polynômes (23) différents, et qu'il s'agit de s'assurer que les propriétés des racines de (23) sur lesquelles on s'appuie sont <u>invariantes</u> (c'est-à-dire, invariantes par multiplication de P_m par un symbole elliptique et -ce qui revient à peu près au même- par changement de la variable "de temps", x^N).

Si on revient un instant à la forme réduite (22) il ne faut pas croire que l'équation différentielle ordinaire associée :

(25) $$D_N^2 u + 2\, a_1(x,\xi')D_N u + a_2(x,\xi)u + R(x,\xi',D_N)u = f$$

répond à la question du § 1 (en fait, (25) n'est même pas différentielle -elle est pseudodifférentielle en x^N). En fait, il n'est pas du tout clair que ses différentes parties, en particulier $R(x,\xi)$, ont une signification intrinsèque.

Il est un cas où l'on peut facilement former une EDO associée à l'opérateur $\mathbb{P}$, de la même façon que l'équation (5) était associée à cet opérateur sous l'hypothèse de factorisation (2) (§ 1). C'est le cas de <u>multiplicité constante</u>, c'est-à-dire lorsque

(26) $$\Delta(x,\xi') \equiv 0$$

dans un voisinage de (x_o,ξ'^o). La factorisation (21) se réduit alors à :

(27) $$P_m(x,\xi) = Q(x,\xi)(\xi_N - \lambda(x,\xi'))^2 \quad .$$

On peut effectuer une transformation canonique, comme au § 1, et transformer $\xi_N - \lambda(x,\xi')$ en $\xi_N - ib(x,\xi')$, avec b réel. On introduit alors la partie sous-principale

(28) $$\sigma(x,\xi) = P_{m-1}(x,\xi) - \frac{1}{2i} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 P_m}{\partial x^j \partial \xi_j}(x,\xi) \ ,$$

qui est une fonction bien définie sur la variété caractéristique de P_m -sous l'hypothèse (26). A noter que cette variété est définie (dans Γ) par

(29) $$\xi_N = 0 \ , \quad b(x,\xi') = 0 \ .$$

L'ODE basique est alors ici :

(30) $$(D_N - ib(x,\xi'))(D_N u - ib(x,\xi')u) + \sigma(x,\xi',0)u = f \ .$$

Soulignons que la variable, ici, est x^N (qu'on aurait pu noter t, comme au § 1) et que (x',ξ') joue le rôle paramètre. Il est alors raisonnable de conjecturer que la propriété (6), correspondant à l'équation (30), est équivalente à la résolubilité locale de $\mathbb{P}$ -tandis que (7) est équivalente à l'hypoellipticité de $\mathbb{P}$. Il faut encore répéter que (x',ξ') ne doit pas être considéré comme fixe, mais bien comme variable dans un voisinage cônique de (x'_o,ξ'^o). Bien entendu $\sigma(x,\xi',0)$ n'est vraiment défini que tant qu'on reste sur l'ensemble des zéros de $b(x,\xi')$. Mais ce qui compte, c'est le comportement de $\sigma(x,\xi',0)$ lorsqu'on s'approche de ces zéros suivant les droites parallèles à l'axe des x^N ; ceci est bien défini, comme on peut s'en assurer.

Venons-en aux résultats proprement dits. Lorsque $b \equiv 0$, Chazarain (dans [13]) a obtenu des conditions suffisantes de résolubilité locale (pour un degré de multiplicité arbitraire -mais constante) ; dans des situations très particulières, Rubinstein (dans [14]) a obtenu des condition nécessaires et suffisantes.

Je me suis occupé, avec un collaborateur, F. Cardoso, du cas où $b(x,\xi')$ ne s'annule pas identiquement, mais satisfait à la condition suivante :

(31) $b(x'_o, x^N_o + t, \xi'^o)$ a un zéro d'ordre fini k en $t = 0$.

Nous avons démontré récemment le résultat suivant (voir [15]) :

<u>Théorème 3.1</u> : <u>Supposons que</u> (31) <u>soit vérifiée et que</u> $b(x'_o, x^N_o + t, \xi'^o)$ <u>change de signe, en</u> $t = 0$, <u>de moins à plus. Alors</u> $\mathbb{P}$ <u>n'est pas localement résoluble en</u> x_o .

On remarquera que les termes d'ordre inférieur, représentés par $\sigma(x,\xi)$, ne jouent pas de rôle dans l'énoncé. Ils en jouent par contre dans la démonstration (fort technique), qui fait appel à des méthodes différentes, suivant que la propriété suivante est vérifiée ou non :

$$(32) \quad \int_0^t |\operatorname{Im}\sqrt{c(x', x^N_o + s, \xi', 0)}|\, ds \leqq \text{const.}\ (|x'| + |t|^{\frac{k-1}{2}})|\xi'|^{1/2} .$$

Lorsque $b(x', x^N + t, \xi')$ change de signe, en $t = 0$, de + à -, ou bien ne change pas de signe, nous avons des résultats incomplets. Ils montrent que la validité, ou non, de la propriété (32) détermine si oui ou non l'opérateur $\mathbb{P}$ est localement résoluble en x_o .

Je passe maintenant à une situation très différente, celle où le polynôme (23) se factorise (dans Γ) de la façon suivante :

$$(33) \qquad p = (\xi_N - \lambda(x,\xi'))(\xi_N - \mu(x,\xi')) .$$

Je supposerai ici qu'il y a une ramification en (x_o, ξ'^o). En fait je me placerai dans un cas extrêmement simple, celui où

$$(34) \qquad \begin{aligned} \lambda &= \sqrt{-1}\,(x^N)^k\, a(x,\xi') , \\ \mu &= \sqrt{-1}\,(x^N)^k\, b(x,\xi') , \end{aligned}$$

avec a, b réels, ne s'annulant pas dans Γ. Dans ce cas, des phénomènes de valeurs propres discrètes font leur apparition -comme l'a bien montré Grushin dans divers travaux, ces dernières années (voir par exemple [21], [22], [23]). Je signalerai l'exemple suivant, étudié avec un élève, A. Gilioli. On prend

$$(35) \qquad \mathbb{P} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + ia\, t^k \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + ib\, t^k \frac{\partial}{\partial x}\right) - ic\, t^{k-1}\frac{\partial}{\partial x} ,$$

où k est un entier, a, b $\in \mathbb{R}$, c $\in \mathbb{C}$. Suivant les résultats standard de la théorie des équations de type principal, $X = \frac{\partial}{\partial t} - i a t^k \frac{\partial}{\partial x}$ est localement résoluble à l'origine (ou en n'importe quel point de l'axe des t) si et seulement si k est pair. On comprend mieux ce qui se passe si on passe au cotangent, en la variable x, c'est-à-dire si on effectue une transformation de Fourier en x et étudie l'opérateur différentiel ordinaire

(36) $$\hat{\mathbb{P}} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - a t^k \xi\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - b t^k \xi\right) + c\, t^{k-1} \xi \,.$$

On a avantage à raisonner dans la demi-droite (i.e., le cône) $\xi > 0$, ou bien $\xi < 0$, et à considérer un opérateur de la forme

$$X = \frac{\partial}{\partial t} - a_o t^k |D_x| \,.$$

Lorsque k est pair, X est à la fois résoluble et hypoelliptique (en fait, <u>sous-elliptique</u>) -pourvu que $a_o \neq 0$! Lorsque k est <u>impair</u>, X est hypoelliptique mais non résoluble si $a_o > 0$, résoluble mais non hypoelliptique lorsque $a_o < 0$. Considérons alors l'opérateur

(37) $$\mathbb{P}_o = \left(\frac{\partial}{\partial t} - a_o t^k |D_x|\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - b_o t^k |D_x|\right) + c_o t^{k-1} |D_x| .$$

Le cas le plus intéressant est celui où :

(38) $$k \ \underline{\text{impair}},\ a_o > 0,\ b_o < 0$$

(les autres cas sont faciles à classer). Le résultat est alors le suivant :

<u>Théorème 3.2</u> : <u>Soit</u> $\mathbb{P}_o$ <u>donné par</u> (37) <u>et faisons l'hypothèse</u> (38) . <u>Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes</u> :

a) $\mathbb{P}_o$ <u>n'est pas localement résoluble à l'origine</u> ;

b) $\frac{c_o}{a_o - b_o}$ <u>est un entier positif congruent à</u> 0 <u>ou à</u> 1 <u>modulo</u> (k+1).

Dans [16] le théorème 3.2 est démontré par la méthode des "concatenations"; il vient d'être étendu à des cas moins simples par Gilioli dans sa thèse. Dans le cas k = 1, on peut obtenir des résultats beaucoup plus poussés (voir [17], [18], [19]). Je voudrais terminer par quelques mots sur cette situation.

On va considérer la situation "pseudodifférentielle" correspondante, c'est-à-dire que $\mathbb{P}$ est un opérateur pseudodifférentiel dont le symbole principal $P_m(x,\xi)$ a les propriétés suivantes :

(39) l'ensemble des zéros de $P_m(x,\xi)$ est une sous-variété cônique C^∞ Σ de $\dot{T}^*\Omega$, de codimension <u>deux</u>, sur laquelle la forme symplectique fondamentale

$$d\left(\sum_{j=1}^{N} \xi_j \, dx^j\right)$$

est non dégénérée;

(40) $P_m(x,\xi)$ s'annule exactement à l'ordre deux sur Σ, c'est-à-dire

$$0 < C \leq \frac{|P_m(x,\xi)|}{d(x,\dot{\xi})\,|\xi|^m} \leq \frac{1}{C} \quad ,$$

localement dans $\dot{T}^*\Omega$, où $d(x,\dot{\xi})$ est la distance de $(x,\dot{\xi})$ à Σ ($\dot{\xi} = \frac{\xi}{|\xi|}$) ;

(41) la restriction de $P_m(x,\xi)$ à n'importe quel plan transversal à Σ, π, définit une application de π dans $\mathbb{C}$ dont l'indice d'enroulement (winding number) à l'origine est <u>nul</u>.

Sous les hypothèses (39)-(40)-(41) la factorisation (33) pour se faire de manière bien plus "agréable". En fait, après transformation canonique, on pourra supposer que, dans le voisinage cônique Γ de (x_o,ξ^o), la variété Σ est définie par les deux équations

(42) $$x^N = \xi_N = 0 \quad .$$

Il s'ensuit que λ et μ dans (33) sont des multiples de x^N et donc, dans

(43) $$p = (\xi_N - x^N a(x,\xi'))(\xi_N - x^N b(x,\xi')) \quad .$$

De plus, à cause de la condition (41) (et aussi de (40)), on peut supposer que

$$\text{(44)} \qquad \Im m\, a < 0, \quad \Im m\, b > 0 \quad \text{dans } \Gamma \quad .$$

Bien entendu a et b sont homogènes (en ξ') de degré 1. On voit qu'en vertu de (42) on a identifié Σ au fibré cotangent d'une hypersurface dans la base Ω, en l'espèce $x^N = 0$. En général cela peut se faire <u>micro-localement mais non localement</u>.

A un facteur elliptique près, $\mathbb{P}$ a été écrit (microlocalement) sous la forme

$$\text{(45)} \qquad \mathbb{P} = XY + Z \quad ,$$

où

$$\text{(46)} \qquad X = \frac{\partial}{\partial x^N} - i\, x^N a(x,D') \;, \qquad Y = \frac{\partial}{\partial x^N} - i\, x^N b(x,D') \;,$$

et où Z est du 1er ordre. On voit qu'on est très près du cas (37) (lorsque $k = 1$).

Ce qu'on peut faire, à partir de là, c'est construire une suite d'opérateurs $\mathbb{P}_j$ $(j = 0,1,\ldots)$ avec $\mathbb{P}_o = \mathbb{P}$ et, pour tout j,

$$\mathbb{P}_j = X_j Y_j + Z_j \quad ,$$

où $X_j - X$ est d'ordre zéro, $Y_j - Y$ aussi, et Z_j est d'ordre 1, avec en plus les relations :

$$\text{(47)} \qquad X_j \mathbb{P}_{j-1} = \mathbb{P}_j X_j \qquad (j = 1,2,\ldots) \;.$$

En outre, le symbole principal $\sigma(Z_j)$ est donné par la formule suivante :

$$\text{(48)} \qquad \sigma(Z_j) = \sigma(Z) - j\,\sigma([X,Y]) \quad .$$

En continuant à raisonner microlocalement et en identifiant Ω à $\mathbb{R}^N$, l'hypersurface $x^N = 0$ à $\mathbb{R}^{N-1}$, on peut définir un opérateur K_j : $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^{N-1}) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ (et aussi $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{N-1}) \to \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$) avec les propriétés suivantes :

(49) $$X_j^* K_j \sim 0 \quad (\text{mod } C^\infty)\ ,$$

(50) $$K_j^* K_j \sim \mathrm{Id}_{\mathcal{E}'(\mathbb{R}^{N-1})}\ ,$$

(51) $$K_j K_j^* \text{ est un projecteur sur Ker } X_j^*\ ,$$

$$I - K_j K_j^* \text{ est un projecteur sur Im } X_j\ .$$

Ici les adjoints sont pris au sens des espaces L^2 (sur $\mathbb{R}^N$ et sur $\mathbb{R}^{N-1}$) et tout doit être entendu modulo C^∞. En vertu de (46), le symbole principal de K_j (qui n'est pas tout-à-fait un opérateur de Fourier intégral) est donné par

(52) $$\sigma(K_j) = \left(\frac{ia(x',0,\xi')}{\pi}\right)^{1/4} e^{-i\frac{(x^N)^2}{2}}\ a(x',0,\xi')$$

(comme $\Im m\, a < 0$ ceci a un sens). Noter que $\sigma(K_j)$ est indépendant de j -mais le symbole <u>total</u> de K_j ne l'est pas.

On introduit alors

(53) $$\mathbb{L}_j = K_j^* P_j K_j\ ,$$

qui opère de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^{N-1})$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{N-1})$. En fait, d'après (49),

(54) $$\mathbb{L}_j = K_j^* Z_j K_j\ ,$$

et on peut montrer que $\mathbb{L}_j$ est un opérateur <u>pseudodifférentiel</u> d'ordre ≤ 1 sur $\mathbb{R}^{N-1}$. Pour les symboles principaux, on a :

(55) $$\sigma(\mathbb{L}_j) = \sigma(Z_j)\big|_\Sigma \ (= \sigma(Z_j)\big|_{x^N=\xi_N=0}) = \{\sigma(Z) - j\ \sigma([X,Y])\}\big|_\Sigma\ .$$

Je me bornerai à énoncer le résultat suivant :

<u>Théorème 3.3</u> : <u>L'opérateur</u> $\mathbb{P}$ <u>est non résoluble en</u> (x_o,ξ^o) <u>si et seulement si, pour au moins un</u> $j = 0,1,\ldots,$ <u>l'opérateur</u> $\mathbb{L}_j$ <u>est non résoluble en</u> (x'_o,ξ'^o).

J'ai employé la terminologie "$\mathbb{P}$ <u>non résoluble en un point du fibré cotangent</u>, (x_o,ξ^o)" <u>pour signifier qu'aucun opérateur pseudodiffé-</u>

rentiel Q, dont le symbole total est égal à celui de P dans un voisinage (cônique) de (x_o, ξ^o), n'est localement résoluble en x_o .

Pour les détails sur le théoreme 3.3 je renvoie à [19]. On a un énoncé analogue si on remplace résoluble par hypoelliptique. On a un énoncé plus précis si on s'intéresse aux opérateurs qui sont hypoelliptiques avec perte d'un ordre de dérivation au plus : pour que P ait cette propriété au voisinage de (x_o, ξ_o) il faut et il suffit que, pour tout $j = 0,1,\ldots$, L_j soit elliptique au voisinage de (x'_o, ξ'^o), c'est-à-dire (cf. (55)), que

$$l_P = \left.\frac{\sigma(Z)}{\sigma([X,Y])}\right|_{\Sigma}$$

ne soit pas égal à un entier $\geqq 0$ en (x_o, ξ^o).

J. Sjöstrand a obtenu (dans [17] et par une autre méthode) des résultats semblables mais dans un cas plus général, celui où codim $\Sigma = 2k$ avec $k \geq 1$. Nous montrons dans [20] que la méthode des concatenations donne aussi ce résultat, et en même temps des résultats analogues pour certains systèmes (du genre de celui de $\square_b$, le "Laplacien" correspondant à $\bar{\partial}_b$, agissant sur des formes différentielles).

En conclusion (et dans des termes plutôt vagues) je voudrais dire que les opérateurs L_j , ou plutôt leurs symboles totaux, jouent le rôle de valeurs propres de l'opérateur $XY + Z$ (ou, plus précisément, de développements asymptotiques de ces valeurs propres). Nous sommes là, de nouveau, très près de la théorie des équations différentielles ordinaires (et linéaires) du deuxième ordre.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Nirenberg, L. and Treves, F. : On local solvability of linear partial differential equations, Part I and II, Comm. Pure Appl. Math., 23 (1970), 1-38 and 459-510.

[2] Treves, F. : Hypoelliptic equations of principal type. Necessary conditions and sufficient conditions, Comm. Pure Appl. Math., 24 (1971).

[3] Treves, F. : Hypoelliptic partial differential equations of principal type with analytic coefficients, Comm. Pure Appl. Math., 23 (1970), 637-651.

[4] Beals, R. and Fefferman, C. : On local solvability of linear partial differential equations, à paraître dans Ann. Math.

[5] Beals, R. and Fefferman, C. : Classes of spatially inhomogeneous pseudodifferential operators, à paraître.

[6] Hörmander, L. : Fourier Integral Operators I, Acta Math., 127 (1971) 79-183.

[7] Duistermaat, J. J. and Hörmander, L. : Fourier Integral Operators II Acta Math., 128 (1972), 183-269.

[8] Hörmander, L. : On the existence and the regularity of solutions of linear pseudodifferential operators, l'Enseignement mathématique, t. XVII, fasc. 2 (1971), 99-163.

[9] Andersson, K. G. : Analytic wave front sets for solutions of linear differential equations of principal type, à paraître dans Trans. AM

[10] Duistermaat, J. J. : On Carleman estimates for pseudodifferential operators, Inv. Math. 17 (1972), 31-43.

[11] Strauss, M. and Treves, F. : Uniqueness in the Cauchy problem for solvable first-ordre linear PDES, à paraître.

[12] Nirenberg, L. : Lectures on partial differential equations, Lubbock (Texas), 1972 (Texas Tech. University).

[13] Chazarain, J. : Une classe d'opérateurs à caractéristiques de multi plicité constante, Colloque C.N.R.S. sur les Équations aux Dérivées Partielles, Orsay, Sept. 1972.

[14] Rubinstein, R. : Local solvability of the operator $u_{tt} + ia(t)u_x + b(t)u_t + c(t)u$, à paraître.

[15] Cardoso, F. and Treves, F. : A necessary condition for the local solvability for pseudodifferential equations with double characteristics, à paraître.

[16] Gilioli, A. and Treves, F. : An example in the local solvability theory of linear PDE's, à paraître in Amer. J. of Math.

[17] Sjöstrand, J. : Parametrices for pseudodifferential operators with multiple characteristics, à paraître.

[18] Treves, F. : Concatenations of second-ordre evolution equations applied to local solvability and hypoellipticily, Comm. Pure Applie Math., 26 (1973).

[19] Boutet de Monvel, L. and Treves, F. : On a class of pseudodifferential operators with double characteristics, à paraître.

[20] Boutet de Monvel, L. and Treves, F. : Concatenations applied to certain systems of pseudodifferential equations with double characteristics, à paraître.

[21] Grušin, V. V. : On the proof of the discreteness of the spectrum of a class of differential operators in $\mathbb{R}^n$, Functional Anal. Appl. 5 (1971), 58-59 (traduction anglaise).

[22] Grušin, V. V. : On a class of hypoelliptic operators, Math. USSR Sbornik 12 (1970), n° 3, 458-476 (traduction anglaise).

[23] Grušin, V. V. : On a class of elliptic pseudodifferential operators degenerate on a submanifold, Math. USSR Sbornik 13 (1971), n° 2, 155-188.
