Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

J. C. DE PARIS

Problème de Cauchy asymptotique. Lien avec l'hyperbolicité

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1972-1973), exp. n° 20, p. 1-17

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1972-1973____A21_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHEMATIQUES

17, rue Descartes

75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 2 - 1 9 7 3

PROBLEME DE CAUCHY ASYMPTOTIQUE

LIEN AVEC L'HYPERBOLICITE

par J. C. DE PARIS

Exposé N° XX

7 Mars 1973

Si H est un polynôme à coefficients constants, homogène de degré t, et hyperbolique, la caractérisation des polynômes P de degré $\leq t-1$ tels que $H+P$ soit encore hyperbolique a été faite par Svenssonn [22] et par Chaillou [3] qui, dans le cas de la multiplicité localement constante, donne des critères très explicites sur la géométrie des cônes hyperboliques.

Si h est un opérateur différentiel sur une variété E, le problème se pose différemment car une condition analogue à la définition d'un polynôme hyperbolique à coefficients constants n'est pas invariante dans un changement de coordonnées locales. La recherche d'une définition de l'hyperbolicité par des conditions de nature algébrique sur la forme de l'opérateur, équivalentes à la nature bien posée du problème de Cauchy dans des espaces convenables reste donc un problème ouvert.

L'utilisation des ondes asymptotiques dans l'étude de la nature bien posée en C^{∞} d'un problème de Cauchy non caractéristique a été faite par Lax [14], et la construction d'une "fonction de Riemann" utilisant les mêmes techniques a été faite par Ludwig [17]. Plus récemment, et toujours dans le cas des systèmes, Vaillant [24] a montré que l'hyperbolicité forte est équivalente au fait qu'un "problème de Cauchy asymptotique" est bien posé.

L'idée que l'hyperbolicité d'un opérateur peut-être caractérisée en étudiant des problèmes de Cauchy formels est donc naturelle. C'est cette caractérisation qu'on va exposer ici.

§ 1. DECOMPOSITION D'UN OPERATEUR

Soit E une variété différentiable de dimension $(n+1)$ qu'on supposera, pour fixer les idées, réelle et de classe C^{∞}. Soit h un opérateur différentiel C^{∞} sur E, d'ordre t au voisinage de $a \in E$, de symbole principal H.

1) Facteur du symbole principal au voisinage de a

Soit Ω_o une sous-variété ouverte de E contenant a, et $K : T^*(\Omega_o) \longrightarrow \mathbb{R}$, un champ de tenseurs contravariants, symétriques, C^∞ et d'ordre s. On note v_o le plus grand entier tel que sur une sous-variété ouverte Ω de E, contenant a, on ait

$$\forall\, x \in \Omega \quad [K(x;q)]^\alpha \text{ divise } H(x;q)$$

(pour x fixé, $q \longmapsto K(x;q)$ et $q \longmapsto H(x;q)$ sont des applications polynomiales de T^* dans $\mathbb{R}$).

<u>Définition 1.1</u> : Si $v_o \geq 1$, on dit que K est un facteur de H au voisinage de a, de multiplicité v_o.

On suppose que $x \longmapsto K(x;q)$ n'est l'application polynomiale nulle pour aucun x de Ω; et que Ω est un ouvert simple.

2) Décomposition de h par rapport à un facteur de H.

<u>Définition 2.1</u> : On dit que deux opérateurs différentiels h_1 et h_2 sont congrus modulo p au voisinage de a (notation $h_1 \underset{p}{\sim} h_2$) si leur différence est d'ordre $\leq p-1$ au voisinage de a.

Cette relation est une relation d'équivalence telle que

$$h_1 \underset{p}{\sim} h_2 \Rightarrow h_1 + k \underset{p}{\sim} h_2 + k$$

(on note $\theta(k)$ l'ordre de k)

$$h_1 \underset{p}{\sim} h_2 \Rightarrow k\,h_1 \underset{p+\theta(k)}{\sim} k\,h_2$$

Si K est un facteur de H, de multiplicité v_o, il existe L_o, champ de tenseurs C^∞, contravariants et symétriques, d'ordre $t - sv_o$, tel que sur $T^*(\Omega)$ on ait

$$H = L_o(K)^{v_o}$$

Si k et l_o sont deux opérateurs différentiels sur Ω, de symbole principal respectif K et L_o, on a

$$h \underset{t}{\sim} l_o(k)^{v_o}$$

Soit $\lambda_1 = h - l_o(k)^{v_o}$. Si λ_1 est d'ordre $(t - 1)$ sur un voisinage de a, on refait pour λ_1 l'opération effectuée pour h, et on trouve l_1 et v_1 tels que $\lambda_1 \underset{t-1}{\sim} l_1(k)^{v_1}$, d'où on tire $h \underset{t-1}{\sim} l_o(k)^{v_o} + l_1(k)^{v_1}$.

Sinon, on prend $l_1 = 0$ et v_1 aussi grand qu'on veut (on convient que $v_1 = +\infty$), et la même formule est valable en convenant que $l_1(k)^{v_1} = 0$. Après un nombre fini de telles opérations, on trouve

$$h = \sum_{r=0}^{t} l_r(k)^{v_r}$$

avec $\forall\, r \leq t, \quad h \underset{t-r}{\sim} \sum_{\rho=0}^{r} l_\rho(k)^{v_\rho}$

<u>Définition 3.1</u> : Une telle somme est appelée une décomposition de h par rapport à un facteur K de H, au voisinage de a.

<u>Remarque</u> : Bien que la notion de décomposition soit intrinsèque, il n'y a pas, dans le cas le plus général, de manière "canonique" de l'effectuer, et les nombres $v_1, v_2 \ldots$ peuvent varier suivant la décomposition comme le montre l'exemple très simple suivant :

$$h(D) = D_o D_1 + D_o \qquad K(\xi_o, \xi_1) = \xi_o$$

Suivant qu'on prend $l_o(D) = D_o$ ou $l_o(D) = D_o + 1$, on trouve $v_1 = 1$, ou $v_1 = \infty$. On peut associer à une décomposition de h, trois nombres, m, r_o et μ définis de la manière suivante

$$m = \min \{0 \leq r \leq t \mid v_r + r\}$$

$$\mathfrak{R} = \{r \mid v_r + r = m\} \quad \text{et } r_o = \min \mathfrak{R}.$$

$$\mu = m - r_o$$

Ces nombres ne sont pas, en général, indépendants de la décomposition choisie. Il y a cependant un type de décomposition qui est canonique, et qu'on va étudier dans le paragraphe suivant.

3) <u>Opérateur bien décomposable par rapport à un facteur K de H</u>.

L'intérêt de cette notion apparaîtra surtout dans le paragraphe 3.

<u>Définition 4.1</u> : Une décomposition de h par rapport à K est appelée une bonne décomposition si $m = v_o$.

On a alors pour tout $r \leq t$, $v_r \geq v_o - r$, et on peut écrire, en modifiant éventuellement les l_r

$$h = l_o(k)^{v_o} + l_1(k)^{v_o - 1} + \ldots + l_r(k)^{v_o - r} + \ldots + l_{v_o}$$

<u>Théorème 1</u> : Si h possède une bonne décomposition par rapport à un facteur K de H, toute décomposition de h par rapport à K est une bonne décomposition. On dit alors que h est bien décomposable par rapport à K.

On sait que h peut s'écrire sous la forme ci-dessus. Considérons une seconde décomposition de h par rapport à K

$$h = \sum_{r=0}^{t} (\tilde{l}_r).(\tilde{k})^{\tilde{v}_r}$$

On a évidemment $\tilde{v}_o = v_o$ (c'est la multiplicité de K dans H). On veut prouver que pour tout r : $\tilde{v}_r \geq v_o - r$.

Pour r = 0 le résultat est évident ; supposons-le prouvé pour $0, \ldots, r-1$, et démontrons-le pour r. Si $r \geq v_o$, c'est banal, sinon en modifiant éventuellement les $\widetilde{l}_\rho$ pour $\rho \leq r-1$, on peut écrire

$$\widetilde{l}_r(\widetilde{k})^{\widetilde{v}_r} \underset{t-r}{\sim} \sum_{\rho=0}^{r} l_\rho\, k^{v_o-\rho} - \sum_{\rho=0}^{r-1} \widetilde{l}_\rho(\widehat{k})^{v_o-\rho}$$

On va prouver l'existence d'un opérateur différentiel μ_r tel que

$$\widetilde{l}_r(\widetilde{k})^{\widetilde{v}_r} \underset{t-r}{\sim} \mu_r(\widetilde{k})^{v_o-r}$$

et le résultat en découlera puisque K n'est plus en facteur dans $\widetilde{L}_r$. On montre d'abord un lemme.

<u>Lemme</u> : Si a est un opérateur différentiel contenant p facteurs k

$$\forall\, \beta,\quad \exists\, a^* : a \underset{\theta(a)-(p-\beta)}{\sim} a^* k^\beta$$

($\theta(a)$ est le degré de a).

On montre le résultat par récurrence sur p (pour β fixe). Si $p < \beta$, on prend $a^* = 0$. Si on suppose le résultat établi pour $0,\dots,p-1$, on le démontre pour p. On écrit $a = a_1(k)^{\beta'}$, avec β' le plus grand possible ; on va faire une récurrence descendante sur β' (à partir de $\beta' = p$).
Si $\beta \leq \beta' \leq p$, on prend $a^* = a_1$. Si on suppose le résultat vrai pour $p, p-1,\dots,p-l+1$, on le montre pour $\beta' = p-l$. Il reste dans a_1 l facteurs k, et on écrit $a_1 = a_2\, k\, b$, avec b ne contenant pas de facteur k.
On a alors $a = a_2[k,b]\, k^{p-l} + a_2\, bk^{p-l+1}$ ($[k,b] = kb - bk$). Le premier opérateur de la somme est d'ordre $\theta(a) - 1$ et contient $(p-1)$ facteurs k (et $(\theta(a)-1) - (p-1-\beta) = \theta(a) - (p-\beta)$).

Il existe donc, d'après l'hypothèse de récurrence sur p un opérateur a_1^* tel que

$$a_2[k,b]k^{p-l} \underset{\theta(a)-(p-\beta)}{\sim} a_1^*\, k^\beta$$

Le second opérateur de la somme est de degré $\theta(a)$, contient p facteurs k, dont $\beta - l + 1$ à droite. D'après l'hypothèse de récurrence sur β', il existe a_2^* tel que

$$a_2 k\, k^{p-l+1} \underset{\theta(a)-(p-\beta)}{\sim} a_2^* \, k^{\beta}$$

Le choix $a^* = a_1^* + a_2^*$ assure la conclusion.

Une conséquence immédiate de ce lemme est que, pour $\rho \leq r$, il existe μ_ρ^* tel que

$$1_\rho \, k^{v_o - \rho} \underset{t-r}{\sim} \mu_\rho^*(\tilde{k})^{v_o - r}$$

On écrit $1_\rho k^{v_o-\rho} = 1_\rho (k-\tilde{k}+\tilde{k})^{v_o-\rho} = \sum_{p=0}^{v_o-\rho} \sum_{i\in I_p} 1_\rho \pi_i(\tilde{k},k-\tilde{k})$ où $\pi_i(\tilde{k},k-\tilde{k})$ est un produit de p-opérateurs $\tilde{k}$ et de $(v_o-\rho-p)$ opérateurs $(k-\tilde{k})$ dans un ordre dépendant de i. Il suffit alors d'appliquer le lemme.

On a $1_\rho \, \pi_i \, (\tilde{k},k-\tilde{k}) \underset{t-r}{\sim} \mu_{\rho,i}^*(\tilde{k})^{v_o-r}$. En effet $(t-\rho - (v_o - \rho - p)) - (p - (v_o - r) = t-r)$. On obtient le théorème en prenant

$$\mu_r = \sum_{\rho=0}^{r} \sum_{p=0}^{v_o-\rho} \sum_{i\in I_p} \mu_{\rho,i}^* - \sum_{\rho=0}^{r-1} \tilde{1}_\rho (\tilde{k})^{r-\rho}$$

§ 3 RECHERCHE D'UNE ONDE ASYMPTOTIQUE NON NULLE

1) Opérateurs associés à h sur une hypersurface donnée.

Si φ est une fonction C^∞ au voisinage de a, il est bien connu ([1],[12]) que, si y est C^∞ au voisinage de a

$$e^{-i\omega\varphi} h(y\, e^{i\omega\varphi}) = \sum_{r=0}^{t} P_r(\varphi,y)\,(i\omega)^{t-r}$$

(Cette propriété, et surtout sa réciproque, ont été à l'origine d'une théorie des opérateurs pseudo-différentiels [12]). Pour φ donnée, $y \mapsto P_r(\varphi,y)$ est un opérateur différentiel d'ordre $\leq r$ sur une sous-variété ouverte de E contenant a (on le notera $\mathcal{K}^r(\varphi)$ [16]). En particulier

$\mathcal{H}^{o}(\varphi)$ est la multiplication par la fonction $x \mapsto H(x;\ \mathrm{grad}\ \varphi(x))$ et l'expression de $\mathcal{H}^{1}(\varphi)$ dans une carte locale est

$$\mathcal{H}^{1}(\varphi) = p^{\alpha}D_{\alpha} + p^{*}$$

avec $p^{\alpha}(x) = \dfrac{\partial H}{\partial q_{\alpha}}$ $(x\ ;\ \mathrm{grad}\ \varphi(x))$ et p^{*} est le coefficient de $(i\omega)^{t-1}$ dans $e^{-i\omega\varphi}h(e^{i\omega\varphi})$. Enfin $\mathcal{H}^{t}(\varphi) = h$. On verra dans la suite que les $\mathcal{H}^{r}(\varphi)$ peuvent être considérés, pour les problèmes qu'on veut résoudre, comme des "approximations" de h sur les hypersurfaces d'équation $\varphi(x) = $ Cte., et c'est l'ordre de multiplicité de la caractéristique φ qui déterminera l'opérateur $\mathcal{H}^{\alpha}(\varphi)$ prépondérant.

Enfin, si f est une distribution sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$, et φ de classe C^{∞} au voisinage de a, telle que $\varphi(a) = 0$ et grad $\varphi(a) \neq 0$, on peut définir une distribution qu'on notera abusivement $(f \circ \varphi)$ sur une sous-variété Ω de E contenant a .

Alors si $y \in C^{\infty}(\Omega)$, un calcul en coordonnées locales montre que

$$h(y \times f \circ \varphi) = \sum_{r=0}^{t} \mathcal{H}^{r}(\varphi)[y] \times (f^{(t-r)} \circ \varphi) \tag{1}$$

2) Onde asymptotique

Définition 1.2 : Soit $(f_j)_{j\in Z}$ une suite de distributions sur un même voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$, telle que pour tout $j \in Z$, on ait $f'_j = f_{j-1}$. Soit φ une fonction C^{∞} au voisinage de a telle que $\varphi(a) = 0$ et grad $\varphi(a) \neq 0$. Soit $(Y^{j})_{j\in Z}$ une suite de fonctions C^{∞} sur un même voisinage de a, telle que $Y^{j} = 0$ pour presque tous les $j < 0$. On appelle développement asymptotique une somme formelle

$$\sum_{j\in Z} Y^{j} \times (f_{j} \circ \varphi)$$

On définit de manière évidente le développement asymptotique nul, l'égalité, la somme, le produit par une fonction C^{∞} au voisinage de a. Si h est un opérateur différentiel sur E, on convient de le prolonger aux développements asymptotiques en posant

$$(2) \qquad h\Big(\sum_{j\in Z} Y^j \times (f_j\circ\varphi)\Big) = \sum_{j\in Z}\Big(\sum_{r=0}^{t} \mathcal{H}^r(\varphi)[Y^{t+j-r}]\Big) \times (f_j\circ\varphi)$$

Cette définition, qui peut paraître arbitraire, prolonge très naturellement les résultats valables quand la série converge dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ si on tient compte de (1).

<u>Définition 2.2</u> : Une onde asymptotique est un développement asymptotique y tel que $h(y) = 0$.

3) <u>Recherche d'une onde asymptotique non nulle</u>

On cherche une onde asymptotique $y = \sum_{j=0}^{\infty} Y^j \times (f_j\circ\varphi)$. Les équations qui définissent les Y^j sont.

$$(3) \qquad \sum_{r=0}^{\min(t,t+j)} \mathcal{H}^r(\varphi)[Y^{t+j-r}] = 0 \qquad \text{(pour } j \geq -t)$$

En particulier la première équation s'écrit $\mathcal{H}^o(\varphi)[Y^o] = 0$. Si on veut que $Y^o(a) \neq 0$, il est nécessaire que φ soit solution, au voisinage de a, de

$$H(x;\mathrm{grad}\,\varphi(x)) = 0$$

Afin d'être assuré de l'existence d'une telle fonction, on supposera qu'il existe un facteur K de H, au voisinage de a, tel que l'équation $K(a;q) = 0$ possède un zéro réel simple non nul, q^o.

Il existe alors φ, C^∞ au voisinage de a, telle que $K(x;\,\mathrm{grad}\,\varphi(x)) = 0$, avec $\mathrm{grad}\,\varphi(a) = q^o \neq 0$, et $\varphi(a) = 0$. On a alors $\mathcal{H}^o(\varphi) = 0$. Si $m(\varphi)$ est le plus petit entier α tel que $\mathcal{H}^\alpha(\varphi) \neq 0$, Y^o est déterminé par

$$\mathcal{H}^{m(\varphi)}_{(\varphi)}[\,Y^o] = 0$$

Pour résoudre cette équation on va considérer une décomposition de h par rapport à K, et imposer à φ une condition supplémentaire $(\mathcal{C})$ relative à cette décomposition, qui ramènera le calcul de Y^o à l'intégration d'une équation différentielle ordinaire le long des bicaractéristiques (relatives à K) des hypersurfaces d'équation $\varphi(x) = \mathrm{Cte}$.

Si $\sum_{r=0}^{t} l_r(k)^{v_r}$ est une décomposition de h, on a, avec des notations évidentes.

$$(4) \qquad \mathcal{H}^{\alpha}(\varphi) = \sum_{r=0}^{\alpha} \sum_{\substack{0 \le \beta_o \le \theta(l_r) \\ 0 \le \beta_i \le \theta(k) \\ \beta_o + \sum_{i=1}^{v_r} \beta_i = \alpha - r}} \mathcal{L}_r^{\beta_o}(\varphi) K^{\beta_1}(\varphi) \dots K^{\beta_{v_1}}(\varphi)$$

Si $\alpha < m$, dans chaque terme de cette somme l'un des β_i est nul, donc $\mathcal{H}^{\alpha}(\varphi) = 0$. Si $\alpha = m$, on trouve

$$(5) \qquad \mathcal{H}^{m}(\varphi) = \sum_{r \in \mathfrak{R}} \mathcal{L}_r^{o}(\varphi) [K^{1}(\varphi)]^{m-r}$$

On a donc $m \le m(\varphi)$. (En général $L_{r_o}(a; q^o) \ne 0$ et on a $m(\varphi) = m$, et $\mathcal{H}^{m}(\varphi)$ est d'ordre $m - r_o$).

On fait l'hypothèse qu'il existe $r_o(\varphi) \in \mathfrak{R}$ tel que $L_{r_o(\varphi)}(a; q^o) \ne 0$ et que $L_r(x; \mathrm{grad}\, \varphi(x)) = 0$ au voisinage de a, si $r \in \mathfrak{R}$, et $r < r_o(\varphi)$. $\mathcal{H}^{m}(\varphi)$ est alors un opérateur différentiel d'ordre $m - r_o(\varphi) = \mu(\varphi)$. On suppose encore $\mu(\varphi) \ge 1$, sans quoi $\mathcal{H}^{m}(\varphi)[Y^o] = 0$ aurait pour seule solution $Y^o = 0$ (C'est le cas de l'équation de la chaleur par exemple). $K^1(\varphi)$ est la dérivation le long de bicaractéristiques (relatives à K) des hypersurfaces d'équation $\varphi(x) = \mathrm{Cte}$. Y^o étant calculé, on obtient facilement les coefficients suivants Y^j.

<u>Théorème 2</u> : Si un facteur K de H est tel que l'équation $K(a;q) = 0$ possède un zéro réel simple non nul $q^o \ne 0$, il existe (si φ vérifie la condition ($\mathcal{C}$)) une onde asymptotique non nulle pour h. La phase de l'onde est solution de $K(x;\ \mathrm{grad}\, \varphi(x)) = 0$ et vérifie $\mathrm{grad}\, \varphi\ (a) = q^o$. Les coefficients Y^j s'obtiennent par l'intégration de la même équation différentielle (au second membre près) le long des bicaractéristiques des hypersurfaces d'équation $\varphi(x) = \mathrm{Cte}$.

Remarque : Si on prend au voisinage de a des coordonnées locales telles que $\varphi(x) = x^o$, et qu'on calcule $h(y \times e^{i\omega x_o})$, on voit que $t - m(\varphi)$ est le nombre de dérivations par rapport à x_o dans l'expression de h dans cette carte locale. Ceci permettait encore de prouver facilement que $m \leq m(\varphi)$. En effet dans k il y au plus $\theta(k) - 1$ dérivations par rapport à x_o, donc dans $l_r(k)^{v_r}$ il y a au plus $t-r-v_r \leq t-m$ dérivations par rapport à x_o, donc $t - m(\varphi) \leq t - m$.

4) Applications à des problèmes de Cauchy caractéristiques dans le cas analytique.

On peut appliquer le théorème 2, dans ce cas analytique, et avec une condition de bonne décomposition, à la démonstration de l'existence de solutions nulles, c'est-à-dire si S est une hypersurface caractéristique "suffisamment régulière" et multiple, on montre l'existence d'une solution analytique de chaque côté de S, nulle d'un côté de S, et d'une classe donnée d'avance à la traversée de S ([7]). On peut aussi, avec des calculs analogues à ceux qui précèdent, démontrer des théorèmes de type Goursat-Beudon ([6]).

§ 3. PROBLEME DE CAUCHY ASYMPTOTIQUE

1) On appelle problème de Cauchy asymptotique le problème suivant. Q étant une hypersurface donnée, passant par a, d'équation locale $x^o = 0$, on se donne t développements asymptotiques sur Q $(g_o, \ldots, g_{t-1})$ de phase ψ. On cherche y, somme d'ondes asymptotiques pour h, dont les phases φ ont pour restriction à Q la phase ψ des g_α, et telle que, pour $\alpha \leq t$

$$\frac{\partial^\alpha}{(\partial x^o)^\alpha} y(0,x') = g_\alpha(x') = \sum_{j=0}^{\infty} b_\alpha^j(x') \times (f_{j-\alpha} \circ \psi)(x') \qquad (x'=(x^1,\ldots,x^n))$$

On suppose qu'il existe une décomposition $H = \prod_{s=1}^{\sigma} (H_s)^{\alpha_s}$ au voisinage de a, avec $\deg H_s = \tau_s$. (On note $\tau = \sum_{s=1}^{\sigma} \tau_s$) telle que l'équation en λ.

$$\text{(A)} \qquad \prod_{s=1}^{\sigma} H_s(0;\lambda, \operatorname{grad} \psi(0)) = 0$$

possède τ racines réelles distinctes λ^1.

2) Idée de la démonstration

Si φ^1 est la phase d'une onde asymptotique pour h, on doit avoir

$$\operatorname{grad} \varphi^1(0) = (\lambda^1, \operatorname{grad} \psi(0))$$

On associe à chaque λ^1 une phase φ^1 telle que $\frac{\partial \varphi^1}{\partial x^o}(0) = \lambda^1$ et $\varphi(0,x') = \psi(x')$. On a ainsi toutes les phases possibles. On suppose que chaque φ^1 vérifie une condition du type $(\mathcal{C})$.

On cherche y sous la forme $y = \sum_{l=1}^{\tau} \sum_{j\in Z} Y_l^j \times (f_j \circ \varphi^l)$ avec $\forall^* j < 0 : Y_l^j = 0$. Le calcul d'identification des données de Cauchy donne

$$(6) \qquad \sum_{l=1}^{\tau} \Big\{ \sum_{k=0}^{\alpha} C_\alpha^k (\overline{\partial_o \varphi^l})^{\alpha-k} \overline{\partial_{(0)k} Y_l^{j-k}} + \sum_{0\le u<k\le\alpha} \Gamma_{\alpha,l}^{k,u} \overline{\partial_{(0)u} Y_l^{j-k}} \Big\} = b_\alpha^j$$

(on note $\overline{f}$ la restriction à Q d'une fonction définie sur E, et les $\Gamma_{\alpha,l}^{k,u}$ sont des fonctions connues, indépendantes de j).

On sait que les Y_l^j sont déterminées par des équations d'ordre $\mu(\varphi^l) = \mu_l$. Cette remarque et la forme de l'équation (6) conduisent à prendre comme inconnues les fonctions $\overline{\partial_{(0)k} Y_l^{j-k}}$ pour $l = 1,\dots,\tau$, $k = 0,\dots,\mu_l - 1$. On écrit alors l'équation

$$A_\alpha^j : \sum_{l=1}^{\tau} \sum_{k=0}^{\min(\mu_l,\alpha)} C_\alpha^k (\overline{\partial_o \varphi^l})^{\alpha-k} \overline{\partial_{(0)k} Y_l^{j-k}} = d_\alpha^j$$

et $\mathcal{A}^j$ le système des t équations linéaires $(A_o^j,\dots,A_{t-1}^j)$. Soit t' le nombre des inconnues. On a

$$t' = \sum_{l=1}^{\tau} \mu_l \le \sum_{s=1}^{\sigma} \tau_s \alpha_s = t$$

On montre ([7]) que le déterminant des t' premières équations est égal à

$$\prod_{1\le i<j\le\tau} [\partial_o \varphi^i(0,x') - \partial_o \varphi^j(0,x')]^{\mu_i \mu_j}$$

donc est $\neq 0$ au voisinage de a. Ce déterminant généralise de façon naturelle le déterminant de Vandermonde correspondant au cas classique où toutes les caractéristiques sont simples.

On résoud par récurrence, en commençant par exemple à $j = -t$, les différents systèmes $\mathcal{a}^j$, et on obtient finalement le théorème suivant :

<u>Théorème 3</u> : Sous les hypothèses du 1) le problème de Cauchy asymptotique possède une solution et une seule quelles que soient les t' premières données, à condition que les (t - t') dernières aient une valeur imposée.

<u>Remarque 1</u> : l étant donné, on note s(l) le s tel que λ^l soit racine de $H_s(0; \lambda^l, \text{grad } \psi(o)) = 0$. On voit qu'on a t' = t si et seulement si pour tout l $\mu_l = \alpha_{s(l)}$, c'est à dire si h est bien décomposable par rapport à chaque H_s et si pour tout l, $r_o(\varphi^l) = 0$. En fait cette condition est superflue grâce à l'hypothèse (A), et finalement t' = t équivaut à h est bien décomposable par rapport à chaque H_s. (On dira en abrégé h bien décomposable). On a donc le corollaire suivant :

<u>Corollaire</u> : Sous les hypothèses du 1), le problème de Cauchy asymptotique possède une solution et une seule quelles que soient les données de phase ψ si et seulement si h est bien décomposable

<u>Remarque 2</u> : Pour résoudre le problème avec des données de phase quelconque, il est nécessaire et suffisant de supposer que

$$\prod_{s=1}^{\sigma} H_s(a;q)$$

est strictement hyperbolique par rapport à la forme tangente en a à Q.

<u>Remarque 3</u> : Le théorème 3 (ou plutôt son corollaire) montre l'importanc des opérateurs bien décomposables. On donne dans le paragraphe suivant une caractérisation algébrique très simple de ces opérateurs.

§ 4. OPERATEURS BIEN DECOMPOSABLES

Théorème 4 : S'il existe une sous-variété ouverte Ω de E contenant a, telle que sur $T^*(\Omega)$

$$H = \prod_{s=1}^{\sigma} (H_s)^{\alpha_s}$$

avec pour tout $x \in \Omega$, les applications polynomiales q $H_s(x;q)$ sont premières entre elles deux à deux, on a

h bien décomposable par rapport à chaque H_s $\Leftrightarrow$
Il existe des opérateurs différentiels $l_o,..,l_t,h_1,...,h_\sigma$ sur Ω tels que

$$h = \sum_{r=0}^{t} l_r \, h_1^{[\alpha_1 - r]_+} \cdots h_\sigma^{[\alpha_\sigma - r]_+}$$

avec pour $r \leq t$

$$h \underset{t-r}{\sim} \sum_{\rho=0}^{r} l_\rho \, h_1^{[\alpha_1-\rho]_+} \cdots h_\sigma^{[\alpha_\sigma-\rho]_+}$$

(on note $[p]_+ = p$ si $p \geq 0$, et 0 sinon).

On montre que si h est bien décomposable par rapport à chaque H_s, il s'écrit sous la forme annoncée.

Soient $h_1,...,h_\sigma$ des opérateurs différentiels de symbole principal respectif $H_1,...,H_\sigma$. On va construire les l_r par récurrence sur r. On prend $l_o = 1$. Supposons le résultat établi pour 0,..., r-1, et montrons le pour r. On pose

$$\lambda_r = h - \sum_{\rho=0}^{r-1} l_\rho \, h_1^{[\alpha_1-\rho]_+} \cdots h_\sigma^{[\alpha_\sigma-\rho]_+}$$

On va prouver que pour tout s, il existe $\gamma_{r,s}$ tel que $\lambda_r \underset{t-r}{\sim} \gamma_{r,s} \, h_s^{[\alpha_s - r]_+}$,

ce qui suffira grâce à l'hypothèse que les $H_s(x,q)$ sont premiers entre eux deux à deux. Si s est tel $\alpha_s \leq r$, on prend $\gamma_{r,s} = \lambda_r$, sinon on procède de la manière suivante. h est bien décomposable par rapport à H_s, donc il existe $\mu_{r,s}$ tel que

$$h \underset{t-r}{\sim} \mu_{r,s} (h_s)^{\alpha_r - r}$$

$1_\rho \, h_1^{[\alpha_1-\rho]_+} \ldots h_s^{(\alpha_s-\rho)} \ldots h_\sigma^{[\alpha_\sigma-\rho]_+}$ est un opérateur différentiel d'ordre $(t-\rho)$ contenant $(\alpha_s-\rho)$ facteurs h_s, donc il existe $\mu_{\rho,s}$ tel que

$$1_\rho \, h_1^{[\alpha_1-\rho]_+} \ldots h_\sigma^{[\alpha_\sigma-\rho]_+} \underset{t-r}{\sim} \mu_{\rho,s} \, h_s^{(\alpha_s-r)} \qquad (t-\rho-((\alpha_s-\rho)-(\alpha_s-r))=t-r)$$

On obtient le résultat demandé en prenant $\gamma_{r,s} = \mu_{r,s} - \sum_{\rho=0}^{r-1} \mu_{\rho,s}$.

Remarque : L'adjoint d'un opérateur bien décomposable est évidemment bien décomposable.

§ 5. A PROPOS DE L'HYPERBOLICITE

Si h est un opérateur différentiel à coefficients constants sur $E = \mathbb{R}^{n+1}$, on montre [7], en utilisant une caractérisation donnée dans [3] des polynômes hyperboliques à multiplicité localement constante que :

Théorème 5 : h hyperbolique et H à multiplicité localement constante équivaut (si $H = \prod_{s=1}^{\sigma} (H_s)^{\alpha_s}$ est la décomposition de H en un produit de puissances de facteurs irréductibles) à $\prod_{s=1}^{\sigma} H_s$ strictement hyperbolique et h bien décomposable par rapport à chaque H_s.

Dans le cas de 2 variables, M^me^ Lax [14] a montré que le problème de Cauchy est bien posé en C^∞, si H est hyperbolique à multiplicité constante, et si h est bien décomposable.

Pour un nombre quelconque de variables, mais avec des caractéristiques au plus doubles, Mizohata et Ohya [18] ont montré que le problème de Cauchy est bien posé dans des espaces de Sobolev convenables, en imposant une condition de Lévi qui n'est autre que la condition "bien décomposable" exprimée dans une carte locale. Dans un article plus récent, Ohya [19] examine le cas des caractéristiques triples et annonce la publication des démonstrations dans un article à venir. Strang [20] et Strang-Flaschka [21] étudient le même problème avec des conditions équivalentes.

Tout ceci rend naturelle l'idée de définir les opérateurs hyperboliques (au voisinage de a) à multiplicité constante, comme les opérateurs dont le symbole principal est hyperbolique à multiplicité constante, et qui sont bien décomposables. Plus précisément, on suppose qu'il existe un champ C^∞ de covecteurs π, définis sur un voisinage ouvert de a (noté Ω), tel que $\pi(x) \neq 0$ pour tout $x \in \Omega$, et que

$$\forall\, x \in \Omega, \quad \forall\, q \in T_x^* - \mathbb{R}\pi(x) \qquad H(x, q + \lambda\,\pi(x)) = \prod_{l=1}^{\tau} [\lambda - \lambda_l(x,q)]^{\mu_l}$$

avec $\lambda_l(x,q) \neq \lambda_{l'}(x,q)$ si $l \neq l'$.

Il résulte alors d'un travail de Matsuura [13] dont on peut simplifier passablement la démonstration, et améliorer un peu les conclusions, que H se factorise sous la forme

$$H = \prod_{s=1}^{\sigma} (H_s)^{\alpha_s} \qquad \text{sur } T^*(\Omega)$$

avec $\prod_{s=1}^{\sigma} H_s(a,q)$ strictement hyperbolique par rapport à $\pi(a)$. L'hypothèse h bien décomposable est relative à cette factorisation de H.

Chazarain [4] généralisant les résultats de [9] a montré depuis que le problème de Cauchy est bien posé en C^∞ et dans des espaces de Sobolev convenables pour ces opérateurs. La construction des noyaux des opérateurs qui résolvent le problème de Cauchy se fait avec les mêmes calculs que ceux du problème de Cauchy asymptotique.

Remarquons pour terminer que cette notion d'opérateur bien décomposable n'a pas sa seule utilité dans des problèmes hyperboliques, et peut aussi, dans la cas analytique, servir à la résolution de problèmes de Cauchy avec des données analytiques sauf sur une sous-variété où elles présentent des singularités Cette idée, issue de [17], a été reprise dans [10] pour un opérateur à caractéristiques simples, généralisée dans [25] au cas d'un système à caractéristiques simples, puis simultanément dans [11] au cas des caractéristiques doubles, et [8] au cas des caractéristiques de multiplicité quelconque mais constante, toujours pour un opérateur bien décomposable.

Plus récemment, un problème analogue a été résolu dans [5] pour un système fortement hyperbolique avec les ordres de Leray-Volevic utilisant une caractérisation donnée dans [24] de tels systèmes. Enfin, dans le cas où il existe des facteurs invariants doubles dans un anneau localisé convenable, la généralisation du résultat précédent a été faite dans [2] en utilisant une condition qui généralise la condition de Lévi aux systèmes, portant sur le symbole sous-caractéristique. (Cas II.b de [23]

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERGER : Formes harmoniques (Séminaire Lichnérowicz- Avez- Berger, Collège de France).

[2] BERZIN : Ondes asymptotiques et problème de Cauchy à données singulières pour un système d'équations linéaires avec une caractéristique double. C. R. Acad. Sc. t.275, Série A, 1972, p.1901-1904.

[3] CHAILLOU : Sur les ensembles bornés $\mathscr{A}_{-1}$ de distributions polynômes inversibles dans $\mathscr{D}'(\Gamma)$ et d'inverse $\mathscr{A}^{-1}$ borné, et sur les hypersurfaces Γ-hyperboliques. Thèse, à paraître.

[4] CHAZARAIN : Le problème de Cauchy pour les opérateurs hyperboliques non stricts qui satisfont à la condition de Lévi. C. R. Acad. Sc. Série A, 1971 p. 1218.

[5] DELCAMBRE : Conditions d'hyperbolicité forte utilisant la localisation pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles avec des ordres de Leray-Volevic. C. R. Acad. Sc. Paris, t.274, Série A, 1972 p. 1112-1115.

[6] DE PARIS : Ondes asymptotiques et problème de Cauchy caractéristique local pour un opérateur différentiel à caractéristiques multiples. C. R. Acad. Sc., t.270, Série A, p.1509-1511.

[7] DE PARIS : Problème de Cauchy oscillatoire pour un opérateur différentiel à caractéristiques multiples; lien avec l'hyperbolicité. J. Math. Pures et Appliquées, t.51, 1972, p.231-256.

[8] DE PARIS : Problème de Cauchy analytique à données singulières pour un opérateur différentiel bien décomposable. J. Math. Pures et Appliquées, t. 51, 1972, p.465-488.

[9] DUISTERMAAT-HÖRMANDER : Fourier integral operators II. Acta Math. 128, 1972.

[10] HAMADA : The singularities of the solution of the Cauchy problem, R. I. M. S. Kyoto Univ., vol. 3, 1969, p.21-40.

[11] HAMADA : On the propagation of singularities of the solution of the Cauchy problem. R. I. M. S., Kyoto Univ., vol. 6, 1970, p.357-384.

[12] HORMANDER : Pseudo differential operators, Comm. pure appl. Math., vol. 18, 1965, p. 501-517.

[13] MATSUURA : On non strict hyperbolicity, Proc. Conf. Funct. Analysis and related topics, Tokyo, 1969.

[14] A. LAX : On Cauchy's problem for partial differential equation with multiple characteristics. Comm. pure appl. Math., vol. 9, 1956, p. 135-169.

[15] P. D. LAX : Asymptotic solutions of oscillatory value problems, Duke Math. J., vol. 24, 1957, p.627-646.

[16] LERAY-GARDING-KOTAKE : Uniformisation et developpement asymptotique de la solution du problème de Cauchy linéaire à données holomorphes ; Analogie avec la théorie des ondes asymptotiques et approchées (Bull. Soc. Math. Fr., t.92, 1964, p.263-361).

[17] LUDWIG : Exact and asymptotic solutions of the Cauchy problem . Comm. pure appl. Math., vol. 13, 1960, p. 473-508.

[18] MIZOHATA-OHYA : Sur la condition de E. E. Lévi concernant les équations hyperboliques, R. I. M. S. Kyoto Univ., Série A, vol. 4, n°2, 1968.

[19] OHYA : On E. E. Lévi's functions for hyperbolic equations with triple characteristics

[20] STRANG : On multiple characteristics and the Levi-Lax conditions for hyperbolicity. Arch. Rat. Mech. Anal., vol. 33, 1969, p.358-373.

[21] STRANG-FLASHA : The correctness of the Cauchy problem, Adv. in Math. 6. 1971.

[22] SVENSONN : Necessary and sufficient conditions for the hyperbolicity of polynomials with hyperbolic principal part. Ark. Math.,8,1970.

[23] VAILLANT : Données de Cauchy portées par une caractéristique double, dans le cas d'un système linéaire d'équations aux dérivées partielles. Rôle des bicaractéristiques. J. Math. Pures et Appl., t.47, 1968, p.140.

[24] VAILLANT : Remarques sur les systèmes fortement hyperboliques. J. Math. pures et appl. t.50, 1971, p.25-51.

[25] WAGSCHALL : Problème de Cauchy analytique à données méromorphes. J. Math. Pures et appl. t.51, 1972, p. 375-397.