Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

C. Goulaouic

Sur l'opérateur $\Delta r^2 + \mu \frac{\partial}{\partial r} r + \lambda$

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1972-1973), exp. n° 16, p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1972-1973____A17_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 2 - 1 9 7 3

SUR L'OPERATEUR $\Delta r^2 + \mu \frac{\partial}{\partial r} r + \lambda$

par C. GOULAOUIC

Exposé N° XVI

31 Janvier 1973

On présente quelques résultats d'un travail en collaboration avec M. S. Baouendi et L. Lipkin ; l'exemple étudié est très particulier mais peut éclairer des situations plus générales ; soit l'équation dans $\mathbb{R}^n$

(1) $$Lu \equiv \Delta r^2 u + \mu \frac{\partial}{\partial r} ru + \lambda u = f \quad .$$

On montre que, sauf pour des valeurs exceptionnelles de (λ,μ), l'opérateur L est surjectif dans les fonctions analytiques au voisinage de 0 et injectif dans les fonctions C^∞ ; pour les (λ,μ) exceptionnels , on peut décrire les conditions de compatibilité dans (1) et le noyau C^∞ de L (qui est toujours constitué de fonctions analytiques) ; il en résulte que si f est analytique sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, toute solution de (1) C^∞ sur Ω est analytique sur Ω.

Les méthodes utilisées ici sont : développements sur les harmoniques sphériques , techniques d'équations de Fuchs, caractérisation en coordonnées sphériques des fonctions analytiques au voisinage de 0...

§ 1. DEVELOPPEMENT EN HARMONIQUES SPHERIQUES

Pour $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, on note aussi $x = r\theta$ avec $r \geq 0$ et $\theta \in S_{n-1}$ (la sphère unité dans $\mathbb{R}^n$).

Soit une base orthonormée dans $L^2(S_{n-1})$ d'harmoniques sphériques $(P_{l,\alpha})$ avec $l \in \mathbb{N}$ et $1 \leq \alpha \leq \alpha(l)$; on a (cf. [2]) :

$$\alpha(l) = \frac{(2l+n-2)(n+l-3)!}{(n-2)!l!} \quad \text{pour } n \geq 2.$$

$r^l P_{l,\alpha}$ est un polynôme harmonique homogène de degré l. Le laplacien en coordonnées sphériques s'écrivant :

(2) $$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_\theta \,,$$

on a aussi

(3) $$\Delta_\theta(P_{l,\alpha}) = -l(l+n-2)P_{l,\alpha}.$$

Soit f une fonction C^∞ pour $|x| < r_o$; on peut écrire

$$(4)\qquad \begin{cases} f(x) = \sum\limits_{l,\alpha} \tilde{f}_{l,\alpha}(r) P_{l,\alpha}(\theta) & \text{avec} \\ \tilde{f}_{l,\alpha}(r) = \int_{S_{n-1}} f(r\theta)\, \overline{P_{l,\alpha}}(\theta)\, d\theta & . \end{cases}$$

Les fonctions $\tilde{f}_{l,\alpha}$ sont C^∞ dans $[0,r_o[$; $f_{l,\alpha} = r^{-l}\tilde{f}_{l,\alpha}$ est borné au voisinage de 0. On a le résultat suivant :

<u>Proposition 1</u> : Soit f une fonction C^∞ au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$: on note, pour tout (l,α), $g_{l,\alpha}(r^2) = f_{l,\alpha}(r)$.

1) Pour tout (l,α), la fonction $g_{l,\alpha}$ est C^∞ au voisinage de 0.

2) La fonction f est analytique au voisinage de 0 si et seulement si il existe $M > 0$ et $t_o > 0$ tels que l'on ait pour tout (l,α), tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0,t_o]$,

$$(5)\qquad |D^k g_{l,\alpha}(t)| \leq M^{k+l+1} k!$$

<u>Démonstration</u> : Pour prouver 1) il suffit de voir que les dérivées impaires de $f_{l,\alpha}$ à l'origine sont nulles. Si on suppose f analytique, on montre aisément (5). Inversement supposons (5) et montrons que f est analytique; on a

$$f(x) = \sum_{l,\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} a^j_{l,\alpha}\, r^{2j}\, \tilde{P}_{l,\alpha}(x)$$

avec $\tilde{P}_{l,\alpha} = r^l P_{l,\alpha}$ harmonique et $|a^j_{l,\alpha}| \leq M^{l+j+1}$; on a

$$\Delta(r^{2j}\tilde{P}_{l,\alpha}) = 2j(2j+3n-2)\tilde{P}_{l,\alpha}.$$

Notons $\| \quad \|_\rho$ la norme dans $L^2(B(0,\rho))$ où $B(0,\rho)$ est la boule de rayon ρ centrée en 0; on montre que pour ρ assez petit ($\rho > 0$), il existe une constante $C > 0$ telle que l'on ait pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|\Delta^k f\|_\rho \leq C^{k+1}(k!)^2,$$

donc, en utilisant un résultat de [1], f est analytique au voisinage de O.

§ 2. UNICITE DANS LES FONCTIONS C^∞

Soient u et f des fonctions C^∞ et vérifiant $Lu = f$ dans $B(0,r_o)$; on note

$$(6)\qquad \begin{cases} u(x) = \sum_{l,\alpha} v_{l,\alpha}(r^2)\, r^l P_{l,\alpha}(\theta) \\ f(x) = \sum_{l,\alpha} g_{l,\alpha}(r^2)\, r^l P_{l,\alpha}(\theta), \quad \text{pour } r \in [0,r_o[. \end{cases}$$

On vérifie que l'équation (1) implique, pour tout (l,α),

$$(7)\qquad \begin{cases} \mathcal{C}_l(\Lambda) v_{l,\alpha} = g_{l,\alpha} \qquad \text{avec } \Lambda = t\frac{d}{dt} \qquad \text{et} \\ \mathcal{C}_l(\Lambda) = 4\Lambda^2 + 2(n+\mu+2l+2)\Lambda + l(\mu+4) + \lambda + 2n + \mu . \end{cases}$$

Les racines caractéristiques de l'équation de Fuchs (7) sont :

$$\begin{cases} \rho_1 = \dfrac{-(n+\mu+2l+2) + \sqrt{\delta}}{4} \\ \rho_2 = \dfrac{-(n+\mu+2l+2) - \sqrt{\delta}}{4} \quad , \text{ avec} \\ \delta = (n+\mu+2l+2)^2 - 4(l(\mu+4) + \lambda + 2n + \mu). \end{cases}$$

On note $\sigma(L) = \{(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$; il existe $l \in \mathbb{N}$ pour lequel ρ_1 ou ρ_2 est dans $\mathbb{N}\}$; on a le résultat :

Proposition 2 : 1) Pour $(\lambda,\mu) \notin \sigma(L)$, l'opérateur L est injectif dans l'espace des fonctions C^∞ au voisinage de l'origine.

2) Pour $(\lambda,\mu) \in \sigma(L)$, le noyau C^∞ de L est constitué de fonctions analytiques au voisinage de l'origine.

Démonstration : Le 1) est évident ; pour prouver le 2), on remarque d'abord que si $(\lambda,\mu) \in \sigma(L)$ correspond à un nombre fini de racines ρ_1 ou ρ_2 dans $\mathbb{N}$, le noyau correspondant est constitué de polynômes; le comportement de ρ_1 et ρ_2 quand $l \to +\infty$ est :

$$\mathrm{Re}(\rho_2(l)) \to -\infty \quad \text{quand } l \to +\infty$$

$$\rho_1(l) = -\frac{\mu+4}{4} + \frac{\mu^2 + 2n\mu - 4\lambda}{16l} + o\left(\frac{1}{l}\right) .$$

On ne peut donc avoir une infinité de racines ρ_1 ou ρ_2 dans $\mathbb{N}$ que pour :

$$\begin{cases} -\dfrac{\mu+4}{4} \in \mathbb{N} \\ \mu^2 + 2n\mu - 4\lambda = 0 \end{cases}$$

et alors, on trouve effectivement $\rho_1 = -\frac{\mu+4}{4}$ pour $l \in \mathbb{N}$. Le noyau C^∞ de L est constitué alors de fonctions de la forme

$$u(x) = r^{-\frac{\mu+4}{2}} \sum_{l,\alpha} c_{l,\alpha}\, r^l P_{l,\alpha}(\theta) \ ;$$

de telles fonctions C^∞ sont aussi analytiques et même vérifient $\Delta^k u = 0$ avec $k = -\frac{\mu}{4}$.

§ 3. EXISTENCE DANS LES FONCTIONS ANALYTIQUES

On démontre le résultat :

Proposition 3 : Soient $(\lambda,\mu) \notin \sigma(L)$ et f une fonction analytique au voisinage de 0. Il existe une unique fonction u analytique telle que

$$Lu = f \text{ au voisinage de } 0.$$

Démonstration : Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait pour tout $l \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{Re}\ \rho_1(l) < k$$

$$\mathrm{Re}\ \rho_2(l) < k.$$

Supposons d'abord que l'on a pu choisir $k = 0$; alors l'équation (7) avec $g_{1,\alpha}$ continue en 0 admet une unique solution continue $v_{1,\alpha}$ donnée par

$$v_{1,\alpha}(t) = \int_{[0,1]^2} \sigma_1^{-\rho_1 - 1} \sigma_2^{-\rho_2 - 1} g_{1,\alpha}(\sigma_1\sigma_2 t)\, d\sigma_1 d\sigma_2 \quad .$$

Si la famille $(g_{1,\alpha})$ vérifie (5), il en est de même de la famille $(v_{1,\alpha})$, ce qui, d'après la proposition 1, montre l'existence de u analytique telle que $Lu = f$.

Lorsque $(\lambda,\mu) \notin \sigma(L)$ mais que l'on ne peut choisir $k = 0$, on se ramène à la situation précédente en utilisant un développement de Taylor de $v_{1,\alpha}$ et $g_{1,\alpha}$ jusqu'à l'ordre $k-1$; on a pour tout $(1,\alpha)$,

$$g_{1,\alpha}(t) = \sum_{j=0}^{k-1} g_{1,\alpha}^j \; t^j + t^k g_{1,\alpha}^k(t) \ ,$$

avec $g_{1,\alpha}^j \in \mathbb{C}$ pour $0 \leq j \leq k-1$ et $g_{1,\alpha}^k$ analytique au voisinage de 0 et $(g_{1,\alpha}^k)_{1,\alpha}$ vérifie (5) si f est analytique .

On cherche $v_{1,\alpha}$ solution de (7) sous la forme

$$v_{1,\alpha}(t) = \sum_{j=0}^{k-1} v_{1,\alpha}^j \; t^j + t^k v_{1,\alpha}^k(t),$$

avec $v_{1,\alpha}^j \in \mathbb{C}$ pour $0 \leq j \leq k-1$ et $(v_{1,\alpha}^k)_{1,\alpha}$ vérifiant (5).

L'équation (7) équivaut au système :

(8) $$\mathcal{C}_1(\Lambda) v_{1,\alpha}^j \; t^j = g_{1,\alpha}^j t^j \qquad \text{pour } 0 \leq j \leq k-1$$

(9) $$\mathcal{C}_1(\Lambda)(t^k v_{1,\alpha}^k(t)) = t^k g_{1,\alpha}^k(t),$$

c'est-à-dire encore :

(10) $$\mathcal{C}_1(j) v_{1,\alpha}^j = g_{1,\alpha}^j \qquad \text{pour } 0 \leq j \leq k-1$$

(11) $$4(\Lambda-(\rho_1 - k))(\Lambda-(\rho_2 - k)) v_{1,\alpha}^k(t) = g_{1,\alpha}^k(t).$$

Le système (10) détermine $(v^j_{1,\alpha})$ pour $0 \leq j \leq k-1$ puisque $\mathcal{C}_1(j)$ n'est jamais nul. L'équation (11) est du type précédemment vu avec des racines caractéristiques à partie réelle négative. Les solutions $(v_{1,\alpha})_{1,\alpha}$ ainsi déterminés vérifient (5) donc définissent une solution analytique de (7).

Remarquons que si $(\lambda,\mu) \notin \sigma(L)$, la résolubilité de (10) implique des conditions sur $(g^j_{1,\alpha})$, donc L n'est alors pas surjectif dans les fonctions analytiques au voisinage de 0.

§ 4. REGULARITE ANALYTIQUE DE L

Des propositions 2 et 3 résulte immédiatement :

Proposition 4 : Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $u \in C^\infty(\Omega)$ telle que $Lu \in \mathcal{A}(\Omega)$ (espace des fonctions analytiques sur Ω); alors $u \in \mathcal{A}(\Omega)$.

En effet, le seul problème est au voisinage de 0 (lorsque $0 \in \Omega$) et lorsque $(\lambda,\mu) \in \sigma(L)$; mais alors nécessairement Lu vérifie les conditions se compatibilité imposées par (10), il existe donc une fonction analytique v telle que $Lv = Lu$ et comme le noyau de L est constitué de fonctions analytiques, u est aussi analytique.

Dans la proposition 4, on pourrait supposer sur u une régularité à priori plus faible, mais il ne suffit pas de supposer que u est une distribution sur Ω (lorsque $0 \in \Omega$).

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. Aronszajn : C. R. Acad. Sc. Paris, 205 (1937) p. 16-18.

[2] N. J. Vilenkin : Fonctions spéciales et théorie de la représentation des groupes ; Dunod (Paris).