P. Krée

Application de la théorie des noyaux positifs à l'estimation des processus et aux champs markoviens

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1972-1973), exp. n° 15, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1972-1973____A16_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHEMATIQUES

17, rue Descartes

75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 2 - 1 9 7 3

APPLICATION DE LA THEORIE DES NOYAUX POSITIFS A L'ESTIMATION DES PROCESSUS ET AUX CHAMPS MARKOVIENS

par P. KRÉE

Exposé N° XV

24 Janvier 1973

La théorie de la prédiction de Wiener-Kolmogoroff est fondée au départ sur un argument aujourd'hui bien connu utilisant un opérateur de projection orthogonale dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$ des variables aléatoires (v.a.) du second ordre. Cependant la résolution effective d'un problème de prédiction, c'est-à-dire la détermination d'un certain opérateur linéaire E_0 d'estimation, nécessite des développements théoriques supplémentaires (voir par exemple Hajek [1] et Parzen [1]).

Jusqu'à présent, la généralisation de cette théorie dans le langage des processus linéaires (voir I.M.Gelfand et N. Y. Vilenkin [1]) nécessitait des hypothèses très fortes sur les opérateurs de corrélation : (voir M. Krée [1] et A. Bensoussan [1]), ce qui ne permet pas de considérer des processus linéaires basés sur des espaces associés à des vraies probabilités sur les espaces duals.

Dans ce travail, nous reprenons l'étude de ce problème, en utilisant la théorie des sous-espaces hilbertiens et des noyaux positifs de L. Schwartz [1], qui est une formulation plus générale de la théorie des noyaux reproduisants (voir par exemple N. Aronszajn [1]). Dans le paragraphe 1, nous posons le problème de l'approximation linéaire optimale d'un processus linéaire S basé sur un e.v.t. V, à l'aide d'un processus linéaire R basé sur un e.v.t. U (on ne considère que des processus de type 2). On voit alors que le problème est un problème d'analyse fonctionnelle qui ne fait intervenir que l'e.v.t. $W = U \oplus V$ et l'opérateur de corrélation du processus $T = R \oplus S$, basé sur W. Autrement dit, on a un problème de la théorie des sous-espaces hilbertiens. Ce problème est étudié et résolu au paragraphe 2. On trouve aussi une caractérisation par moindres carrés de $A_0 v$, pour $v \in D(A_0)$, $(A_0) = (D(A_0), A_0)$ étant l'opérateur non nécessairement continu (n.n-c) de V dans U, d'approximation linéaire optimale. Au paragraphe 3, on traduit le résultat obtenu en termes de processus linéaires. On choisit alors des espaces X et Y en dualité séparante avec U et V respectivement.

Par transposition des résultats obtenus pour l'approximation linéaire optimale, on en déduit alors des résultats pour l'estimation linéaire optimale des trajectoires de S, à l'aide des trajectoires correspondantes de R. De nombreux exemples montrent que l'hypothèse qui nous a servi à énoncer le résultat du paragraphe 2, (à savoir la densité dans V du domaine de A_o) n'est pas une commodité pour les raisonnements. Si $D(A_o)$ n'est pas dense dans V, on peut souvent se ramener au cas où $D(A_o)$ est dense en remplaçant les processus linéaires donnés par des processus linéaires basés sur des espaces plus grands ou plus petits. L'utilisation du formalisme des sous-espaces hilbertiens nous permet aussi de faire le lien entre les problèmes d'estimation et la théorie du potentiel : on donne de nombreux exemples où la recherche de l'approximation linéaire optimale, équivaut à un problème de balayage sur un ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$, relativement à une certaine théorie du potentiel. Très récemment, E. Nelson (à paraître) a introduit la notion de champ markovien euclidien sur $\mathbb{R}^n$. En admettant l'existence d'un tel champ sur $\mathbb{R}^n$, E. Nelson construit une représentation des relations de commutation pour le champ libre. Nous donnons une définition assez générale des champs markoviens, et nous donnons un procédé très général pour construire de tels champs. Nous pensons d'ailleurs que l'étude détaillée de ces champs, a un très grand intérêt théorique et pratique.

§ 1. LES DONNEES DU PROBLEME

On rappelle d'abord le principe heuristique de la théorie de Wiener-Kolmogoroff et quelques notations de la théorie des processus linéaires (voir I.M.Gelfand, N. Y. Vilenkin [1], L. Schwartz [2], A. Badrikian [1]). On montre (en utilisant un exemple) comment se pose le problème de l'approximation linéaire optimale. Soit $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un espace probabilisé et soit $L^2(\Omega)$ l'espace de Hilbert réel des variables aléatoires (v.a.) du second ordre. Soit T une partie de $\mathbb{R}^n$ et soit a un point de $\mathbb{R}^n$ disjoint de T. Soit $(X_u)_{u\in\mathbb{R}^n}$ un champ stochastique continu du second ordre sur $\mathbb{R}^n$, supposé observé sur T, et qu'on cherche à estimer au point a. On suppose connue la fonction de cohérence R (ou d'autocorrélation) du processus

(1) $$\begin{aligned} &\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ &(t\,;\,t') \longmapsto R(t,t') \triangleq \mathcal{E}(X_t X_{t'}) \end{aligned}$$

On cherche un opérateur linéaire d'estimation E_o, défini sur un espace vectoriel topologique F de fonctions f définies sur T, à valeurs dans $\mathbb{R}$;

E_o étant défini par une "fonction" K_o définie sur T de la manière suivante

(2)
$$\begin{array}{rcl} F & \xrightarrow{E_o} & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & E_o f \triangleq \int_{t\in T} K_o(t)u(t)dt \end{array}$$

En pratique, f est une trajectoire du processus X restreint à T : f est donc un élément aléatoire de F. Il en résulte que $E_o f$ est un nombre aléatoire ; et par conséquent on a une v.a.

$$\omega \overset{Y}{\longmapsto} \int_{\theta\in T} X_\theta(\omega) K_o(\theta)\, d\theta$$

On cherche K_o de façon que cette v.a. soit la projection orthogonale de X_a sur l'adhérence du sous-espace de $L^2(\Omega)$ engendré par les v.a. X_t, t décrivant T. D'où l'équation

(3)
$$\forall\, t \in T \qquad \mathcal{E}(Y X_t) = \mathcal{E}(X_a X_t)$$

D'où l'équation de Wiener-Hopf (où l'inconnue est K_o)

(4)
$$\forall\, t \in T \qquad \int_{\theta\in T} K_o(\theta) R(\theta,t)\, d\theta = R(a,t)$$

Une étude théorique supplémentaire est nécessaire pour déterminer le degré d'irrégularité de la "fonction" K_o. L'équation (4) est résolue et discutée dans des cas très simples seulement, par exemple :

(5) $n = 1, \quad T = \mathbb{R}^-, \quad a > 0, \quad R(t,t') = R(t-t')$, la fonction $u \to R(u)$ ayant une transformée de Fourier rationnelle

Plus particulièrement

(6)
$$R(t,t') = A \exp(-\alpha\, |t-t'|) \Rightarrow K(t) = e^{-\alpha a}\, \delta_o(t)$$

On veut étendre ces résultats en utilisant la théorie des processus linéaires et des probabilités cylindriques, théorie dont on rappelle brièvement le formalisme. Cette théorie est par rapport à la théorie des processus stochastiques, ce qu'est la théorie des distributions par rapport à la théorie des fonctions. Et de même que la théorie des distributions est très utile en physique déterministe, la théorie des probabilités cylindriques et des processus linéaires est très utile dans l'étude des phénomènes aléatoires.

(7) Processus linéaires

Un processus linéaire R de type 2 basé sur l'e.v.t.l.c.s. U est une application linéaire continue R de U dans $L^2(\Omega)$; alors qu'un processus linéaire R basé sur l'espace vectoriel U, serait seulement une application linéaire R de U dans $L^0(\Omega)$.

Soit V un autre e.v.t.l.c.s. et soit $(A) = (D(A), A)$ un opérateur linéaire non nécessairement continu (n.n.c.) de V dans U dont le domaine D(A) est dense dans V. Si l'application linéaire

$$\begin{aligned} D(A) &\longrightarrow L^2(\Omega) \\ v &\longmapsto R(A(v)) \end{aligned}$$

se prolonge par continuité en une application linéaire continue $V \to L^2(\Omega)$, le prolongement $\overline{RA}$ de $R \circ A = RA$ est appelé composé du processus linéaire R avec l'application (A). La transformée de Fourier (T.F.) $\widehat{R}$ du processus linéaire R est par définition l'application

$$\begin{aligned} U &\longrightarrow \mathbb{C} \\ u &\longmapsto \widehat{R}(u) = \mathscr{E}[\exp(-i\, R(u))] \end{aligned}$$

De ces définitions, il résulte que si R est composable avec (A), la T. F. du processus $\overline{RA}$ est le prolongement continu à V de l'application $v \longmapsto \widehat{R}(Av)$

(8) Exemples généraux de processus linéaires

a) Si U est de dimension finie, il existe une v.a. X du second ordre $\Omega \to U$ telle que $R(u) = (\vec{X}, u)$ pour tout u de U. Donc $\widehat{R}$ est la T. F. de la loi de $\vec{X}$; et par conséquent $\widehat{R}$ est une fonction définie positive.

b) Si U est de dimension quelconque, notons $(U_i)_{i \in I}$, la famille des souse.v. de dimension finie de U et pour tout i, notons R_i la restriction de R à U_i. Soit X un e.v.t.l.c.s. en dualité séparante avec U, X étant muni de la topologie $\sigma(X,U)$. On peut identifier U_i^* à X/U_i^o , où U_i^o désigne le polaire de U_i. Vu a), sur tout quotient X/U_i^o , on a une loi de probabilité m_i. Si l'on a $U_i \subset U_j$ (i et j $\in$ I), on en déduit $U_i^o \supset U_j^o$; d'où une surjection $s_{ij}: X/U_j^o \to X/U_i^o$. Comme $\hat{R}_i = \hat{R}_j|U_i$, on a $m_i = s_{ij}(m_j)$, d'où un système projectif $(m_i)_{i\in I}$ de lois de probabilité sur le système projectif X/U_i^o d'espaces vectoriels. Un tel système est une probabilité cylindrique sur X. On appelle vraie probabilité sur X une mesure de probabilité sur la tribu borélienne de X : une telle probabilité définit naturellement une probabilité cylindrique sur X.

c) De la même manière que les opérations sur les distributions se définissent par transposition des opérations linéaires entre espaces de fonction d'épreuve, on peut définir naturellement les opérations sur les probabilités cylindriques par transposition des opérations sur les processus linéaires. Par exemple si (A) est un opérateur linéaire V $\to$ U tel que $\overline{RA}$ est défini, et si (A)' est le transposé de (A), on définit A'(m), où m est la probabilité cylindrique sur X associée au processus linéaire R, comme étant la probabilité cylindrique sur Y, associée au processus linéaire $\overline{RA}$.

d) La T. F. $\hat{R}$ d'un processus linéaire R basé sur U est telle que pour tout $i \in I$, $\hat{R} \mid U_i$ est continue, définie positive égale à 1 à l'origine. On peut montrer la réciproque (pour $\hat{R}$ donné à priori, R n'est défini qu'à une isonomie près). Par exemple on notera processus gaussien canonique sur un espace de Hilbert, tout processus de T. F. $u \mapsto \exp\left(-\frac{1}{2}\|u\|^2\right)$.

(9) <u>Vecteur moyenne et opérateur de corrélation d'un processus linéaire de type 2.</u>

Soit R un processus linéaire de type 2 basé sur l'e.v.t.l.c.s. U. Soit U' le dual fort de U. Alors la moyenne R du processus linéaire R basé sur U est l'élément de U' associé à la forme linéaire $u \mapsto \mathcal{E}(Ru)$, définie sur U. L'opérateur de corrélation C_R = Corr (R) du processus linéaire R est l'opérateur linéaire continu de U dans U' tel que :

$$(10) \qquad \forall\, u, u_z \in U \qquad (C_R u_1 , u_2) = \mathcal{E}[(Ru_1)(Ru_2)]$$

Notons que C_R est un opérateur symétrique positif. Dans l'ensemble des opérateurs linéaires continus symétriques positifs de U dans U', on note $\ll$ la relation d'ordre naturelle :

(11) $$D \ll C \quad \Leftrightarrow \quad \forall u \in U \qquad (Du,u) \leq (Cu,u)$$

Notons que si le processus R basé sur U est composable avec l'opérateur n.n.c. (A) de V dans U de domaine dense dans V, alors l'application bilinéaire :

(12) $$\begin{aligned} D(A) \times D(A) &\to \mathbb{R} \\ (v_1, v_2) &\mapsto \mathcal{E}[(R\,Av_1)(R\,Av_2)] = (C_R\,Av_1, A\,v_2) \end{aligned}$$

se prolonge par continuité en une application bilinéaire β continue définie sur V. Ceci entraîne que $A'\,C_R\,A$ est défini, et que Corr $(\overline{RA})$ prolonge $A'\,C_R\,A$.

(13) <u>Donnée simultanée de deux processus linéaires de type 2.</u>

Soient $R : U \to L^2(\Omega)$ et $S : V \to L^2(\Omega)$, deux processus linéaires de type 2 basés sur les e.v.t.l.c.s. U et V. Soit T le processus linéaire de type 2 basé sur $W = U \oplus V$ tel que $T(u \oplus v) = R(u) + S(v)$ quel que soit $w = u \oplus v \in W$. On écrit encore $T = R \oplus S$. Alors $C_T : W \to W'$ est associé à la forme bilinéaire

$$w_1, w_2 \mapsto (C_T w_1, w_2) = \mathcal{E}[(Ru_1 + Sv_1)(R\,u_2 + Sv_2)]$$

En écrivant ce dernier terme comme une somme de quatre espérances, on voit que C_T admet la décomposition par blocs :

(14) $$C_T = \begin{pmatrix} C_R & C_{RS} \\ C_{SR} & C_S \end{pmatrix}$$

avec $C_{RS} : V \to U'$ tel que $(C_{RS}\,v_1, u_2) = \mathcal{E}[Ru_2)(Sv_1)]$

et $C_{SR} : U \to V'$ tel que $(C_{SR}\,u_1, v_2) = \mathcal{E}[(Ru_1)(Sv_2)]$

(15) <u>Un exemple heuristique</u>

Pour tout entier n, et tout s réel, on note $G_s(x_1,\dots,x_n)$ la distribution (de Bessel) ayant pour transformée de Fourier

$$(1+\xi_1^2+\dots+\xi_n^2)^{-s/2} = (1+|\xi|^2)^{-s/2}$$

Par exemple, pour $n=1$, on a $G_1(x) = 2^{-1}\exp(-|x|)$. Soit L un processus gaussien canonique basé sur $L^2(\mathbb{R})$. Par filtrage de L à travers un filtre de réponse impulsionnelle G_1, on obtient un processus X_t sur $\mathbb{R}$ qui peut être représenté par le processus $M = L\,(G_1*)$ basé sur $H^{-1}(\mathbb{R})$;

(16)
$$\begin{tikzcd}
 & L^2(\mathbb{R}) \arrow[r, "G_1*"] & H^1(\mathbb{R}) \\
L^2(\Omega) & L^2(\mathbb{R}) \arrow[l, "L"'] \arrow[u, "C_L = \mathrm{Id}"] & H^{-1}(\mathbb{R}) \arrow[l, "G_1*"'] \arrow[u, "C_M"']
\end{tikzcd}$$

On a $C_M = (G_1*)(\mathrm{Id})(G_1*) = G_2*$. Dans le problème (6), on observe $(X_t)_t$ sur $\mathbb{R}^-$, et l'on cherche une estimation de $X_a(\omega)$, avec $a>0$.

On introduit donc :

. les opérateurs de restriction

$$\begin{array}{ccc} H^1(\mathbb{R}) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^-) & \quad\text{et}\quad & H^1(\mathbb{R}) \xrightarrow{r_2} \mathbb{R} \\[2ex] u \mapsto u|\Omega & & u \longmapsto u(a) \end{array}$$

. les transposées de r_1 et r_2 qui sont les injections canoniques de $U = \mathring{H}^{-1}(\bar{\mathbb{R}}^-)$ (distribution de $H^{-1}(\mathbb{R})$ portées par $\bar{\mathbb{R}}^-$) et de $V = \mathbb{R}\,\delta_a$ dans $H^{-1}(\mathbb{R})$

. les processus $R = M\,i_1$ et $S = M\,i_2$, $T = R \oplus S$

Finalement on a le schéma :

(17)
$$\begin{tikzcd}
 & L^2(\mathbb{R}) \arrow[r, "G_1*"] & H^1(\mathbb{R}) \arrow[rr, dashed, "r_2"] \arrow[dr, dashed, "r_1"'] & & V' = \mathbb{R} \\
 & & & U' = H^1(\mathbb{R}^-) & \\
L^2(\Omega) & L^2(\mathbb{R}) \arrow[l, "L"'] \arrow[uu, "C_L=\mathrm{Id}"] & H^{-1}(\mathbb{R}) \arrow[l, "G_1*"'] \arrow[uu, "C_M"'] & & V = \mathbb{R}\,\delta_a \arrow[ll, dashed, "i_2"'] \arrow[ul, "C_{RS}"'] \arrow[uu, "C_S"'] \\
 & & & U = \mathring{H}^{-1}(\bar{\mathbb{R}}^-) \arrow[ul, dashed, "i_1"] \arrow[uu, "C_R"'] &
\end{tikzcd}$$

Notons que $C_T : U \oplus V \to U' \oplus V'$ est l'isomorphisme coercif $v \mapsto (G_2 * v) | (\mathbb{R}^- U\{a\})$.

(18) Le problème de l'approximation linéaire optimale

Soit $T = R \oplus S$ un processus linéaire de type 2 basé sur $W = U \oplus V$. Pour tout $(A) : V \to U$ tel que $\overline{RA}$ soit défini, on pose $e(A) = \overline{RA} - S$. Je dirai que $e(A)$ est l'erreur d'approximation de S en fonction de R, relatif à l'opérateur d'approximation (A). Je cherche une classe $(\mathfrak{a})$ aussi grande que possible de tels opérateurs, et je cherche $(A_0) \in (\mathfrak{a})$, tels que

(19) $$\forall (A) \in (\mathfrak{a}) \qquad \text{Corr } e(A_0) << \text{Corr } e(A)$$

Or $e(A)$ est le processus linéaire de type 2 basé sur V obtenu en composant $T = R \oplus S$ avec l'opérateur linéaire $(A) \oplus -Id_V : V \to U \oplus V$.
On voit alors que dans cet énoncé, les processus linéaires n'interviennent que par l'intermédiaire de leurs opérateurs de corrélation. Ces opérateurs linéaires continus $X \to X'$ sont symétriques positifs, avec $X = U$ (ou V, ou $U \oplus V$). Si donc je suppose U et V reflexifs, donc tonnelés, alors X' est quasi-complet et $(X')' = X$. En adoptant la terminologie de L. Schwartz [1], je peux donc dire que les opérateurs de corrélation considérés sont des noyaux positifs relatifs à U', V' ou $U' \oplus V'$.

(20) D'où le nouvel énoncé
Les e.v.t.l.c.s. U et V étant réflexifs, on se donne un noyau positif C_T relatif à $W' = U' \oplus V'$. On a une écriture du type (14). Soit $(\mathfrak{a})$ une classe d'opérateurs n.n.c. à domaine dense $(A) : V \to U$ tels que C_R soit composable avec (A). Je cherche $(\mathfrak{a})$ aussi grande que possible et (A_0) dans $(\mathfrak{a})$ tels que l'image du noyau C_T par $(A) \oplus -Id_V$, soit un noyau positif sur V aussi petit que possible.

§ 2. NOYAUX POSITIFS SUR UNE SOMME DIRECTE

L'étude qui suit fait intervenir un noyau positif C_T défini sur une somme directe $W = U \oplus V$ d'e.v.t.l.c.s. réels réflexifs. On sait alors que le cone ordonné $\mathcal{N}^+(W')$ de ces noyaux est en correspondance biunivoque avec le cone des sous-espaces hilbertiens de W'.

Le noyau positif C_T admet la décomposition par blocs (14) avec

$C_R \in \mathcal{N}^+(U')$, $C_S \in \mathcal{N}^+(V')$, $C_{RS} \in \mathcal{L}(V,U')$, et $C_{SR} = (C_{RS})'$.

Nous commençons par étudier en détail ces opérateurs linéaires continus. On pose pour tout $w = u \oplus v \in W$:

(21) $$(C_T w, w) = (C_R u, u) + 2(C_{RS} v, u) + (C_S v, v)$$

(22) <u>Remarques</u> (voir M. Krée [1])

a) En remplaçant v par λv (λ réel) et en notant que $(C_T w,w) \geq 0$, on obtient l'inégalité

$$|(C_{RS} v, u)| \leq (C_R u, u)^{1/2} \cdot (C_S v, v)^{1/2}$$

b) De cette inégalité, il résulte que $\ker C_S \subset \ker C_{RS}$. On montre de même que $\ker C_R \subset \ker C_{SR}$.

c) Par polarité, on en déduit que

$$\overline{\operatorname{Im} C_S} \supseteq \overline{\operatorname{Im} C_{RS}} \qquad \text{et} \qquad \overline{\operatorname{Im} C_R} \supseteq \overline{\operatorname{Im} C_{SR}}$$

d) Si C_R est injectif, la relation $(C_R u,u) = 0$ entraîne $u = 0$. En effet, si l'on avait $(C_R u,u) = 0$ et $u \neq 0$, on peut écrire $U = U_1 \oplus \mathbb{R}_u$, où U_1 est un supplémentaire topologique de la droite engendrée par u. Relativemeny à cette décomposition en somme directe de U, on a

$$C_R = \begin{pmatrix} a & b \\ & \\ b' & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } a \in \mathcal{N}^+(U_1)$$

Vu (22 b)), on a $b = 0$, et par conséquent C_R ne serait pas injectif, ce qui serait absurde.

(23) <u>Les opérateurs</u> $(E_0) : U' \to V'$ <u>et</u> $(A_0) : V \to U$

On suppose C_R injectif. On introduit alors les opérateurs non nécessairement continus $(E_0) : U' \to V'$ et $(A_0) : V \to U$ ainsi définis

$$D(E_0) = \operatorname{Im} C_R \; ; \quad \forall\, u' \in D(E_0) \quad E_0 u' = C_{SR}\, C_R^{-1}\, u'$$

$$D(A_0) = \{v \in V \; ; \; C_{RS}\, v \in \operatorname{Im} C_R\}$$

$$\forall\, v \in D(A_0), A_0 v = C_R^{-1}\, C_{RS}\, v.$$

(24) Exercice

a) Le transposé de l'opérateur non nécessairement continu (E_o) est (A_o); donc (A_o) est fermé.

b) Si $D(A_o)$ est dense dans V, alors le transposé de (A_o) est (E_o).

Nous étudions à présent une écriture remarquable de la forme quadratique $(C_T w,w)$, écriture généralisant la forme réduite bien connue des trinômes du second degré.

(25) Proposition

On suppose C_R injectif

a) Pour tout $w = u \oplus v \in U \oplus D(A_o)$, on a

$$(C_T w,w) = (C_R(u+A_o v),\ u+A_o v) + ((C_S - C_{SR}\,C_R^{-1}\,C_{RS})v,v)$$

b) Si $D(A_o)$ est dense dans V, alors $P = C_S - C_{SR}\,C_R^{-1}\,C_{RS}$ se prolonge en un noyau positif relatif à V'.

c) On suppose toujours $D(A_o)$ dense dans V. Soit v fixé dans $D(A_o)$. Alors la forme quadratique

(27)
$$\begin{aligned} U &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto (C_T\,(u \oplus v),u\oplus v) \end{aligned}$$

atteint son minimum, si et seulement si $u = -A_o v$.

Démonstration

a) Si $v \in D(A_o)$, on peut écrire $C_{RS}\,v = C_R\,C_R^{-1}\,C_{RS}\,v$

Alors (26) résulte d'un calcul algébrique

b) En faisant dans (26), $u = -A_o v$, on obtient

$$\forall\, v \in D(A_o) \qquad (Pv,v) = ((C_S - C_{SR}\,C_R^{-1}\,C_{RS})v,v) \geq 0$$

Or pour tout $v \in D(A_o)$, on a $(C_{SR}\,C_R^{-1}\,C_{RS}\,v,v) = (C_R^{-1}C_{RS}v,C_{RS}v) \geq 0$.

Donc, on a pour tout $v \in D(A_o)$: $0 \leq (Pv,v) \leq (C_S v,v)$. Si $D(A_o)$ est dense dans V. D'où $0 \ll P \ll C_S$.

c) L'expression (26) montre que $(C_T w,w)$ est la somme de deux termes, dont le second est constant, puisque v est fixé et dont le premier est positif ou nul. Par conséquent $u \mapsto (C_T w, w)$ atteint son minimum si et seulement si le premier terme est nul; c'est-à-dire vu (22.d), si et seulement si $u + A_o v = 0$.◆ En utilisant des techniques similaires, on peut montrer le

(28) Théorème : Soit $w = V \oplus V$ la somme directe de deux e.v.t.l.c.s. réflexifs et soit $C_T = \begin{pmatrix} C_R & C_{RS} \\ C_{SR} & C_S \end{pmatrix}$ un noyau positif relatif à $W' = V' \oplus V'$. On suppose C_R injectif et $D(A_o)$ dense dans V, (A_o) étant défini par (23). Soit $(\mathfrak{a})$ l'ensemble des opérateurs linéaires $(A) = (D(A), A)$ de V dans U tels que :

. $A' C_R A$ soit défini et admet un prolongement linéaire continu de V dans U!

. $D'A) \cap D(A_o)$ soit dense dans V

a) Alors $(A_o) \in (\mathfrak{a})$

b) On considère tous les noyaux positifs sur V' obtenus en composant C_T avec $A \oplus -Id_V$. Alors le plus petit de ces noyaux est obtenu pour $(A) = (A_o)$ De plus tout autre opérateur (B) de $(\mathfrak{a})$ ayant cette propriété coïncide avec (A_o) sur $(D(B) \cap D(A_o)$.

c) Pour u fixé dans $D(A_o)$, posons $v_o = A_o u$. Alors v_o est le point de U où la forme quadratique suivante atteint son minimum

$$U \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$u \longmapsto (C_T(u \oplus -v, u \oplus -v)$$

(29) Exemples

On considère l'exemple (15). Comme $V = \mathbb{R}\,\delta_a$ est de dimension 1, pour connaître A_o, il suffit de connaître $u_o = A_o(\delta_a)$. Vu (25), u_o est le point de $U = \mathring{H}^{-1}(\bar{\mathbb{R}}^-)$ tel que

$$C_R u_o = C_{RS}\,\delta_a$$

soit $(G_2 * u_o)(t) = G_2(t-a)$ pour tout $t < 0$. En appliquant $G_2 * = -(\frac{d}{dx})^2 + 1$ à chaque membre, on voit que u_o est porté par l'origine. Comme de plus

---

◆ Pour des raisons de volume, nous abrégeons dès lors la rédaction.

$u_o \in H^{-1}$, u est proportionnel à δ_o. Finalement on trouve (6). On peut aussi déterminer u_o en utilisant la caractérisation (25-c) par moindres carrés. On voit ainsi que pour la théorie du potentiel relative au noyau de Green $G_2{}^*$, u_o est la balayée de δ_a sur le fermé $\mathbb{R}^-$.

§ 3 APPROXIMATION LINEAIRE OPTIMALE ET ESTIMATION LINEAIRE OPTIMALE

On renvoie à P. Krée [1] .

§ 4 APPLICATIONS. LES CHAMPS MARKOVIENS

A - Toute mesure de Radon gaussienne sur la somme directe $H \oplus K$ de deux espaces de Hilbert, admet une désintégration selon des mesures gaussiennes (se démontre en utilisant (25)).

B - Estimer : c'est balayer

Ceci se démontre en utilisant les techniques du paragraphe 11 de L. Schwart [1], et en généralisant de la manière suivante les raisonnements de (29). On prend un ouvert $0'$ de $\mathbb{R}^n$ et un opérateur Q de $\mathcal{D}(0')$ dans $\mathcal{D}'(0')$ tel que le noyau positif $p = {}^tQQ$ définisse un sous-espace hilbertien normal H_p de $\mathcal{D}'(0')$, au sens du paragraphe 10 de L. Schwartz [1]. On pose

$$\mathcal{W}(0') = H_p = \text{espace des charges}$$

$$\mathcal{U}(0') = H'_p = \text{espace des potentiels d'énergie finie}$$

$$Q^{-1}\,{}^tQ^{-1} = G = P^{-1} = \text{opérateur de Green}$$

Soit L un processus linéaire de type 2 basé sur $L^2(0')$ tel que C_L soit l'identité et soit $M = L\circ{}^tQ^{-1}$ le processus de type 2 basé sur $\mathcal{W}(0')$ obtenu en composant L avec ${}^tQ^{-1}$. Si F_1 et F_2 sont deux fermés disjoints de $0'$ soient $\mathring{\mathcal{W}}(F_1)$ et $\mathring{\mathcal{W}}(F_2)$ les espaces de charges à support dans F_1 et F_2 respectivement; i_1 et i_2 les injections de ces espaces dans $\mathcal{W}(0')$, R et S les processus obtenus en composant i_1 et i_2 avec M. Alors pour prévoir L sur F_1 en observant L sur F_2, on est amené à balayer sur F_1 toute charge $\theta \in \mathring{\mathcal{W}}(F_2)$.

C - Construction de champs markoviens (à suivre)

Il suffit que P soit différentiel pour que L soit "pré-markovien" sur O'. On retrouve ainsi le cas particulier du "mouvement" brownien si l'espace des paramètres a un nombre impair de paramètres (résultat du à Mackean).

BIBLIOGRAPHIE

N. Aronszajn [1] : Trans. Amer. Math. Soc., t.68, 1950, p. 337-404.

M. Authier [1] : Annali Scuola Norm. Sup., Pisa, série 3, vol. 25 fasc. 4, 1971, p. 693-765.

A. Badrikian [1] : Lecture Notes in Mathematics, Springer, N°128 (1971).

A. Bensoussan [1] : Filtrage... Dunod, Paris, Septembre 1971.

I. M. Gelfand et N. Y. Vilenkin [1] : Tome 4 du traité sur les fonctions généralisées (traduction publié par Dunod, Paris).

J. Hajek [1] Journal math. de Tchécoslovaquie, t. 12 (87) 1962, p.404-443.

M. Krée [1] : C. R. Acad. Sc. Paris, avril 1971.

P. Krée [1] : C. R. Acad. Sc. Paris, déc. 1972
[2] : Conférences à l'I.S.U.P. (mai 1972) et à l'institut des sciences nucléaires de Lyon I (octobre 1972).
[3] : Théorie et applications de l'approximation linéaire optimale : publications à paraître et rapports scientifiques DRME 71... n°1 (Septembre 1972) et n° 3 (Février 1973).

E. Parzen [1] : Time series analysis papers - Holden day 1967.

L. Schwartz [1] : Journal d'Analyse Math., Jérusalem, vol. 13, (1964), p. 115-256.
[2] : Séminaire à l'Ecole Polytechnique, Paris, 1970-1971.
