

# SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

H. BREZIS

G. STAMPACCHIA

## **Problèmes elliptiques avec frontière libre**

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)* (1972-1973), exp. n° 11,  
p. 1-9

[http://www.numdam.org/item?id=SEDP\\_1972-1973\\_\\_\\_A12\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1972-1973___A12_0)

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)  
(École Polytechnique), 1972-1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V .

Téléphone : MÉDICIS 11-77  
(633)

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 2 - 1 9 7 3

PROBLEMES ELLIPTIQUES AVEC FRONTIERE LIBRE

par H. BREZIS et G. STAMPACCHIA

Exposé N° XI

13 Décembre 1972



Nous présentons au paragraphe 1 une méthode permettant de ramener l'étude de certains problèmes aux limites elliptiques à frontière libre, à la résolution d'inéquations variationnelles. Vu la grande diversité des problèmes particuliers que l'on rencontre, nous nous contenterons d'énoncer seulement quelques principes directeurs.

Les conditions aux limites que nous imposons sur la frontière libre se rencontrent :

- 1) explicitement dans certains problèmes physiques (exemple : filtrage à travers une digue, cf. Baiocchi [1]),
- 2) indirectement, après transformation de l'hodographe dans de nombreux problèmes d'écoulements (avec ou sans sillage) de fluides compressibles ou incompressibles (cf. l'exemple du paragraphe 2 ainsi Brezis-Stampacchia [2] et Brezis-Duvaut [3]).

#### § 1. DESCRIPTION HEURISTIQUE DE LA METHODE

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert fixé ; on cherche :

1) un domaine  $\mathcal{D} \subset \Omega$  ; on désignera par  $\Gamma$  la frontière libre de  $\mathcal{D}$ , i.e.  $\Gamma = \partial \mathcal{D} \cap \Omega$

2) une fonction  $\phi$  définie sur  $\mathcal{D}$  telle que

$$(1) \quad - \Delta \phi = \varphi \quad \text{sur } \mathcal{D}$$

$$(2) \quad \phi = 0 \quad \text{sur } \Gamma$$

$$(3) \quad \frac{\partial \phi}{\partial \nu} = \vec{\pi} \cdot \vec{\nu} \quad \text{sur } \Gamma$$

(4) des conditions aux limites usuelles pour  $\phi$  sur  $\partial \mathcal{D} \cap \partial \Omega$

(par exemple, Dirichlet, Neumann etc...)

où  $\varphi$  est une fonction donnée sur  $\Omega$ ,  $\vec{\pi}$  est un champ de vecteurs donné sur  $\Omega$  ( $\vec{\pi} \neq 0$ ) et  $\vec{\nu}$  est la normale extérieure à  $\mathcal{D}$  sur  $\Gamma$ .

On notera que la donnée de deux conditions aux limites sur  $\Gamma$  ((2) et (3)) "compense" le fait que  $\Gamma$  est a priori inconnu. La méthode que nous présentons est inspirée de l'important travail de Baiocchi [1]. Rappelons brièvement son problème.

Soit  $\Omega = ]a, b[ \times ]0, H[$  et soit à chercher une fonction  $\tilde{\phi}(x, y)$  vérifiant

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{\phi} &= 0 && \text{sur } \mathcal{D} \\ \tilde{\phi} &= y && \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \nu} &= 0 && \text{sur } \Gamma \end{aligned}$$

ainsi que (4).

Le changement d'inconnu  $\phi = \tilde{\phi} - y$  montre que l'on peut se ramener à la forme (1) - (4) avec  $\varphi = 0$  et  $\vec{\pi} = (0, -1)$ .

L'idée principale de Baiocchi consiste à prolonger  $\phi$  par 0 en dehors de  $\mathcal{D}$  et à chercher  $\phi$  sous la forme  $\phi = \frac{\partial u}{\partial y}$  où  $u$  est la solution d'une inéquation variationnelle posée dans  $\Omega$ .

Afin de mieux faire apparaître le rapport existant entre le problème (1) - (3) et les inéquations variationnelles, procédons en sens inverse ; c'est-à-dire, dérivons la solution d'une inéquation variationnelle et explicitons les propriétés qu'elle satisfait. Pour  $u, v \in H_0^1(\Omega)$ , posons  $a(u, v) = \int_{\Omega} \text{grad } u \text{ grad } v \, dx$ , et soit  $u \in K$  la solution de l'inéquation variationnelle

$$(5) \quad a(u, v - u) \geq \int_{\Omega} f(v - u) \, dx \quad \forall v \in K$$

où  $K = \{v \in H_0^1(\Omega); v \geq 0 \text{ p.p. sur } \Omega\}$ .

On sait que si  $f \in L^p(\Omega)$ , alors  $u \in W^{2,p}(\Omega)$  et en particulier si  $p > n$ , on a  $u \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$  avec  $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$ .

Enfin  $u$  vérifie

$$- \Delta u = f \quad \text{sur } \mathcal{D}$$

où  $\mathcal{D} = \{u \in \Omega; u(x) > 0\}$  et  $\text{grad } u = 0$  sur  $\Gamma$  (puisque  $u \in C^1(\Omega)$ ).

Posons  $\phi = \frac{\partial u}{\partial \xi}$  où  $\xi$  est une direction arbitraire ( $|\xi| = 1$ ) et montrons que  $\phi$  vérifie

$$(6) \quad \begin{cases} - \Delta \phi = \frac{\partial f}{\partial \xi} & \text{sur } \mathcal{D} \\ \phi = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial \phi}{\partial \nu} = - f \vec{\xi} \cdot \vec{\nu} & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

En effet, soit  $v \in C_0^\infty(\Omega)$ ; on a

$$\begin{aligned} \sum_i \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx &= \sum_i \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial \xi} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = - \sum_i \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial \xi} dx \\ &= \int_{\mathcal{D}} \Delta u \frac{\partial v}{\partial \xi} dx = - \int_{\mathcal{D}} f \frac{\partial v}{\partial \xi} dx = - \int_{\Gamma} f v \cos(v, \xi) d\Gamma + \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial f}{\partial \xi} v dx. \end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$\sum_i \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} v d\Gamma - \int_{\mathcal{D}} \Delta \phi \cdot v dx ;$$

d'où l'on déduit (6).

Autrement dit  $\phi = \frac{\partial u}{\partial \xi}$  résoud le problème initial si l'on peut trouver  $f$  et  $\xi$  tels que

$$\phi = \frac{\partial f}{\partial \xi} \quad \text{et} \quad \vec{\pi} = -f \vec{\xi}.$$

Ceci n'étant pas le cas en général, nous sommes conduits à introduire la nouvelle transformation  $\phi = \sum_{k=1}^n a_k \frac{\partial u}{\partial x_k}$  où  $\vec{a} = (a_k)$  est un champ de vecteurs sur  $\Omega$  et  $u$  est la solution de (5).

Par un calcul analogue, on trouve cette fois

$$\left\{ \begin{array}{l} - \Delta \phi = \sum_k a_k \frac{\partial f}{\partial x_k} - 2 \sum_{i,k} \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} - \sum_k (\Delta a_k) \frac{\partial u}{\partial x_k} \quad \text{sur } \mathcal{D} \\ \phi = 0 \quad \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial \phi}{\partial \nu} = -f \vec{a} \cdot \vec{\nu} \quad \text{sur } \Gamma \end{array} \right.$$

Modulo un commutateur,  $\phi = \sum_k a_k \frac{\partial u}{\partial x_k}$  résoud le problème initial si l'on peut trouver  $f$  et  $\vec{a}$  tels que

$$(7) \quad \phi = \sum_k a_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \quad \text{et} \quad \vec{\pi} = -f \vec{a}$$

Les équations (7) déterminent  $f$  et  $\vec{a}$ , car on a  $a_k = -\frac{1}{f} \pi_k$  et

$\sum_k \pi_k \frac{\partial}{\partial x_k} (\log f) = -\phi$ ; cette équation en  $f$  s'intègre "explicitement" le long des caractéristiques de  $\vec{\pi}$ .

Il est maintenant indispensable de modifier sensiblement l'inéquation (5) de façon à éliminer les termes provenant du commutateur.

Pour simplifier nous supposons dorénavant que  $\vec{\pi}$  conserve une direction constante par exemple  $\vec{\pi} = \pi \vec{e}_n$ . [ Remarquons qu'on peut toujours se ramener à ce cas par un changement de coordonnées, mais alors  $\Delta$  est remplacé dans (1) par un opérateur à coefficients variables, ce qui complique notablement la suite].

On a alors  $\vec{a} = a e_n$  avec  $\varphi = a \frac{\partial f}{\partial x_n}$  et  $\pi = -af$ .  
Reportant  $\psi = a \frac{\partial u}{\partial x_n}$  dans l'équation (1) il vient

$$-\varphi = a \Delta \frac{\partial u}{\partial x_n} + 2 \sum_i \frac{\partial a}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_n} + (\Delta a) \frac{\partial u}{\partial x_n}$$

Divisant par  $a$  ( $a \neq 0$  car  $\pi \neq 0$ ) on a  $-\frac{\partial f}{\partial x_n} = \frac{\partial}{\partial x_n} (\Delta u) + \sum_i A_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_n} + B \frac{\partial u}{\partial x_n}$   
avec  $A_i = \frac{2}{a} \frac{\partial a}{\partial x_i}$  et  $B = \frac{\Delta a}{a}$

Donc  
 $-\frac{\partial f}{\partial x_n} = \frac{\partial}{\partial x_n} (\Delta u) + \frac{\partial}{\partial x_n} \left( \sum_{i=1}^i A_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial A_i}{\partial x_n} \frac{\partial u}{\partial x_i} + \left( B - \frac{\partial A_n}{\partial x_n} \right) \frac{\partial u}{\partial x_n}$

Par suite  
$$Lu = -\Delta u - \sum_{i=1}^n A_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \int_{x_n}^{x_n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial A_i}{\partial x_n} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_n - \left( B - \frac{\partial A_n}{\partial x_n} \right) u + \int_{x_n}^{x_n} C u dx_n =$$
  
 $f + \Phi(x')$ .

où  $C = \frac{\partial}{\partial x_n} \left( B - \frac{\partial A_n}{\partial x_n} \right)$ .

Choisissant des bornes d'intégration convenables (plus précisément  $u = \int_{\Gamma}^{x_n} \frac{\psi}{a} dx_n$ ) on montre, moyennant des hypothèses appropriées sur les signes de  $\varphi$  et  $\pi$ , que  $u$  (prolongé par 0 en dehors de  $\mathcal{D}$ ) est solution de l'inéquation variationnelle  $u \in K$

$$(8) \quad (Lu, v-u) \geq (f, v-u) \quad \forall v \in K$$

On a ainsi abouti à un problème (non linéaire) posé sur  $\Omega$  et  $\mathcal{D}$  apparaît ensuite comme étant l'ensemble  $\{x \in \Omega ; u(x) > 0\}$ .

On ne peut pas appliquer directement à (8) les résultats classiques d'existence et d'unicité pour deux raisons :

- a)  $L$  n'est pas un opérateur elliptique ordinaire mais contient des "perturbations" intégral-différentielles.
- b) les conditions aux limites pour  $u$  sur  $\partial\Omega$  sont en général compliquées; par exemple si  $\phi = 0$  sur  $\partial\Omega \cap \partial\mathcal{D}$  on est conduit à  $\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$  sur  $\partial\Omega$  : c'est un problème de dérivées obliques (qui se réduit d'ailleurs à un problème de Dirichlet ou Neumann sur les parties de  $\partial\Omega$  où  $e_n$  est tangent ou normal à  $\partial\Omega$ ).

Notons enfin que l'opérateur  $L$  prend une forme particulièrement simple dans le cas suivant :  $\varphi = 0$  et  $\pi(x) = R(x') e^{-kx_n}$  où  $R$  est une fonction qui dépend seulement de  $x' = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ . En effet dans ce cas on peut prendre

$$(9) \quad f(x) = -R(x') \quad \text{et} \quad a(x) = e^{-kx_n};$$

d'où  $A_i = 0$  pour  $1 \leq i \leq n-1$ ,  $A_n = -2k$  et  $B = k^2$ . Par suite

$$(10) \quad Lu = -\Delta u + 2k \frac{\partial u}{\partial x_n} - k^2 u.$$

§ 2. UN EXEMPLE (cf. Brezis-Duvaut [3])

On considère un écoulement plan, stationnaire, irrotationnel d'un fluide parfait et incompressible autour d'un profil  $\mathcal{P}$  convexe et symétrique. On suppose de plus que l'écoulement est uniforme à l'infini et admet un sillage ( $\gamma$ ) (qui est une frontière libre).

Dans le plan physique  $(x,y)$  le vecteur vitesse  $\vec{q} = (u,v)$  vérifie

$$\operatorname{div} \vec{q} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{q} = 0$$

$\vec{q}$  est tangent à  $\mathcal{P}$  le long de  $\mathcal{P}$ ,  
 $\vec{q}(u,y) \rightarrow \vec{q}_\infty$  quand  $(x,y) \rightarrow \infty$ .

Le long de  $(\gamma)$ ,  $\vec{q}$  est tangent à  $\gamma$  et de plus  $q = |\vec{q}| = |\vec{q}_\infty| = q_\infty$ .

Il est classique d'introduire la fonction courant  $\phi$  par les relations

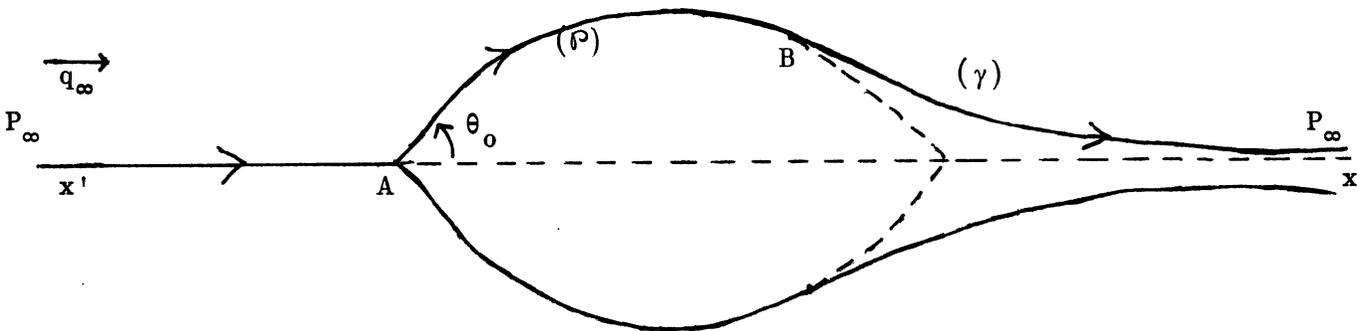
$$u = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = - \frac{\partial \phi}{\partial x} ;$$

on a alors

$$(11) \quad \Delta \phi = 0$$

Le profil  $\mathcal{P}$  étant symétrique par rapport à l'axe  $x'x$  (portant  $\vec{q}_\infty$ ) on peut se restreindre à l'étude de  $\phi$  dans le demi-plan supérieur. Les conditions aux limites pour  $\phi$  sont

$$\left\{ \begin{array}{ll} \phi = 0 & \text{sur } P_\infty A, AB \text{ et } (\gamma) \\ |\text{grad } \phi| = q_\infty & \text{sur } (\gamma) \end{array} \right.$$



Les conditions aux limites le long de la frontière libre  $(\gamma)$  ne sont pas de la forme (2) - (3).  
 Nous allons toutefois nous ramener à un problème du type (1) - (4) à l'aide de la transformation de l'hodographe. Soit  $\mathcal{G}$  la transformation

$$(x, y) \longrightarrow (u, v) \longrightarrow (\theta, q) \quad \text{où } \text{tg } \theta = \frac{v}{u}$$

L'équation (11) devient

$$(12) \quad q^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial q^2} + q \frac{\partial \phi}{\partial q} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0$$

si l'on considère  $\phi$  comme fonction des variables indépendantes  $\theta$  et  $q$ .

Enfin il est commode de poser  $\sigma = -\log q$  de sorte que si l'on considère  $\phi$  comme fonction de  $\theta$  et  $\sigma$  on a grâce à (12)

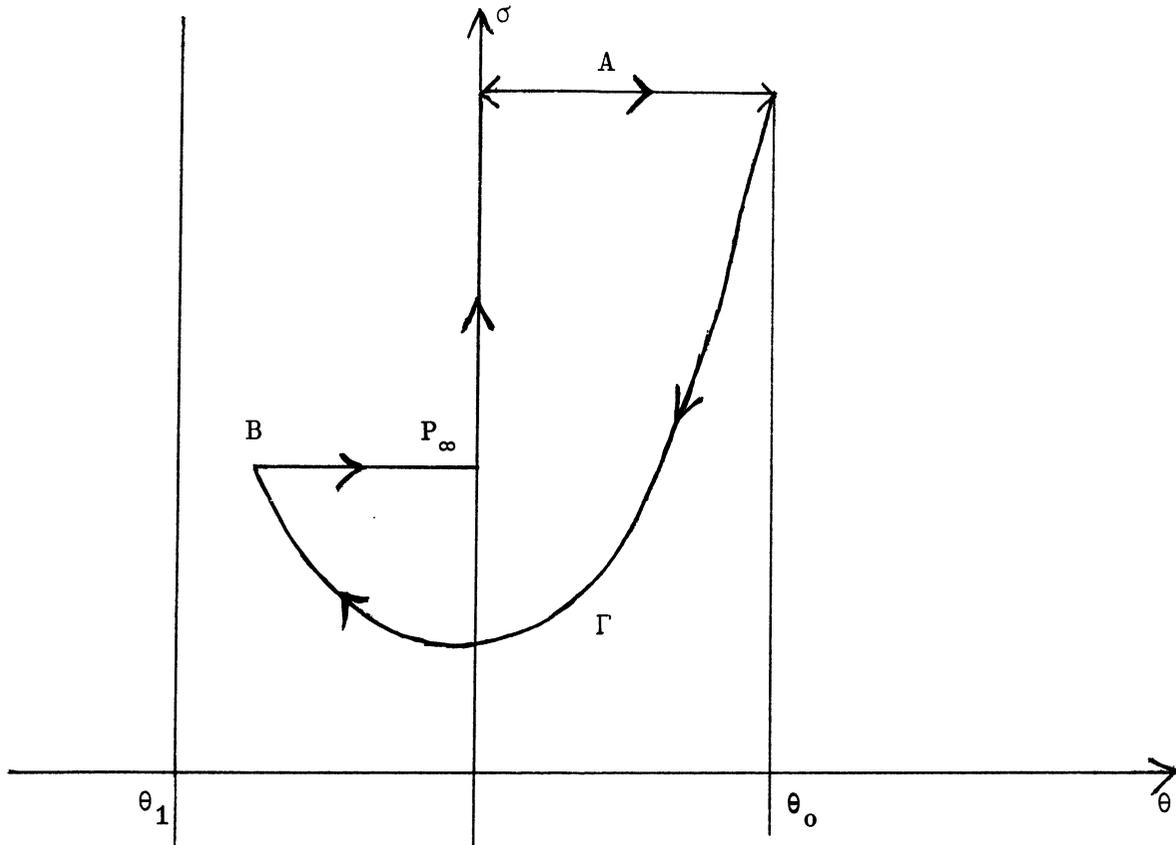
$$(13) \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \sigma^2} = \Delta \phi = 0.$$

Le profil ( $\rho$ ), donné dans le plan physique, est transformé par  $\mathcal{C}$  en une courbe  $\Gamma$  qui doit être considérée comme une frontière libre dans le plan de l'hodographe (puisque  $\mathcal{C}$  dépend de  $\phi$  et n'est pas connu à priori). Par contre la courbe ( $\gamma$ ), inconnue dans le plan physique est transformée par  $\mathcal{C}$  en un segment de la droite  $\sigma = \sigma_\infty$  (puisque  $q = q_\infty$  le long de ( $\gamma$ )).

Enfin on montre que , le long de  $\Gamma$  on a

$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu} = \vec{\pi} \cdot \vec{\nu} \quad \text{où} \quad \vec{\pi} = (0, R(\theta) e^{-\sigma})$$

où  $R(\theta)$  est le rayon de courbure algébrique de  $\rho$  au point  $P \in \rho$  où la tangente à  $\rho$  forme avec l'axe  $x'x$  un angle  $\theta$ .



Appliquant les résultats du paragraphe 1 ( en particulier (9) et (10)) on voit que l'on est conduit à résoudre une inéquation variationnelle pour l'opérateur  $Lu = - \Delta u + 2 \frac{\partial u}{\partial \sigma} - u$ ,  $u$  et  $\psi$  étant liés par  $\psi = e^{-\sigma} \frac{\partial u}{\partial \sigma}$ .

On notera enfin que les conditions aux limites pour  $u$  sur  $\partial\Omega$  se réduisent à des conditions de Dirichlet ou Neumann car  $\partial\Omega$  est composé de segments parallèles ou orthogonaux à la direction  $\sigma$ . Pour les détails nous renvoyons à [3].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. Baiocchi : Su un problema di frontiera libera connesso a questioni di idraulica, Ann. di Mat. Pura ed Applic. 92 (1972) p. 107-127.
- [2] H. Brezis, G. Stampacchia : Une nouvelle méthode pour l'étude d'écoulements stationnaires, C. R. Acad. Sc. Paris, (1972) et article détaillé à paraître.
- [3] H. Brezis, G. Duvaut : Ecoulement avec sillage autour d'un profil symétrique sans incidence, C. R. Acad. Sc. Paris (1973).
-