Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

M. Zerner

Caractéristiques d'approximation des compacts dans les espaces fonctionnels et problèmes aux limites elliptiques

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1971-1972), exp. n° 8, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1971-1972____A8_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 1 - 1 9 7 2

CARACTERISTIQUES D'APPROXIMATION DES COMPACTS DANS LES ESPACES FONCTIONNELS ET PROBLEMES AUX LIMITES ELLIPTIQUES

par M. ZERNER

Exposé N° VIII — 1er Décembre 1971

Cet exposé réunit le texte de deux conférences : l'une faite au séminaire Goulaouic-Schwartz à l'Ecole Polytechnique et l'autre au séminaire Lions-Brézis à l'Université Paris VI.

A paraître au C.I.M.E.

§ 1.

Considérons le problème aux limites :

$$(1) \qquad \begin{cases} Au = 0 & \text{sur } \Omega \\ B_j u = \varphi_j & \text{sur } \partial\Omega \quad j = 1,\dots,m \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné suffisamment régulier de $\mathbb{R}^n$. A est un opérateur elliptique à coefficients $\mathcal{C}^\infty$ d'ordre 2m, les B_j des opérateurs d'ordre m_j, les φ_j des fonctions données dans des boules des $W^p_{k-m_j-1/2}$.

Nous faisons expressément l'hypothèse que ce problème est bien posé et que si $u = G(\varphi_1,\dots,\varphi_m)$ est la solution, alors G est un isomorphisme de $V_k = W^p_{k-m_j-1/p}(\partial\Omega)$ sur $W^p_k(\Omega) \cap A^{-1}(0)$ et cela pour tout k assez grand.

Nous voulons des indications sur la façon de discrétiser ce problème de façon à garantir une précision de ε au sens de $W^p_l(\Omega)$ $(l < k)$ pour toute donnée $\varphi = (\varphi_1,\dots,\varphi_m)$ avec $\|\varphi\|_k \leq 1$ où

$$\|\varphi\|_k = \max_{1\leq j\leq m} \|\varphi_j\|_{W^p_{k-m_j-1/p}} .$$

Nul n'ignore que si l'on veut arriver à ce résultat sans gaspillage inconsidéré de volume de mémoire et de temps machine, il faut construire un réseau de discrétisation plus serré près de la frontière qu'à l'intérieur.

Cependant si l'on veut aller plus loin , il faut donner une description axiomatique de ce qu'on entend par là.

Nous supposerons désormais k assez grand pour que tous les $W^p_{k-m_j-1/p}$ soient des espaces de fonctions continues.

On cherche alors des sous-ensembles finis $\mathcal{R}$ de $\bar{\Omega}$ et $\mathcal{S}$ de $\partial\Omega$, une application linéaire L de $(\mathbb{R}^{\mathcal{S}})^m$ dans $\mathbb{R}^{\mathcal{R}}$, une application J de $\mathbb{R}^{\mathcal{R}}$ dans $W_1^p(\Omega)$ telles que :

(i) pour tout $v \in \mathbb{R}^{\mathcal{R}}$

$$(J\, v)_{|\mathcal{R}} = v$$

(ii) pour toute $\varphi \in V_k$ vérifiant $\|\varphi\|_k \leq 1$,

$$\|J \circ L \circ \rho_{\mathcal{S}}\, \varphi - G\varphi\|_{W_1^p(\Omega)} \leq \varepsilon$$

où $\rho_{\mathcal{S}}$ désigne la restriction à $\mathcal{S}$.

<u>Remarque 1</u> : Cette version du formalisme suppose que la discrétisation ne met en jeu que les valeurs de la fonction elle-même sur les points du réseau. Or certaines méthodes d'éléments finis par exemple mettent en jeu des dérivées. Il n'y a là rien d'essentiel et tous les résultats généraux peuvent être conservés moyennant une légère complication du formalisme. On peut aussi mettre en jeu des moyennes sur des éléments du réseau, etc....

<u>Rappel de définitions</u> : Soit K un sous-ensemble d'un espace normé E. On appelle n-ème épaisseur de K (dans E) et on note $d_n(K)$ le nombre :

$$d_n(K) = \inf_{L \in \mathcal{G}_n} \sup_{x \in K} \inf_{y \in L} \|x - y\|$$

où $\mathcal{G}_n$ est l'ensemble des sous-espaces de dimension n de E. En d'autres termes, on prend la distance des éléments de K à L et on la maximise sur K. On doit enfin faire varier le sous espace L de dimension n de façon à minimiser le résultat obtenu.

Si F est un autre espace vectoriel normé et $F \hookrightarrow E$ on note $d_n(F,E)$ la n-ème épaisseur de la boule unité de F dans E. Notons N_0 le nombre des éléments de $\mathcal{S}$. L'application $J_0 L_0 \rho_{\mathcal{S}}$ étant de rang N_0 et G étant un isomorphisme de V_1 sur son image, on a :

<u>Proposition 1</u> : Pour que les conditions (i) et (ii) ci-dessus aient lieu, il est nécessaire que

(2) $$d_{N_0}(V_1, V_k) \leq C\,\varepsilon$$

où le nombre C ne dépend pas de ε.

Moyennant les évaluations connues de n-ème épaisseur, (Kolmogorov [4], Birman et Solomjak [2], El Kolli [3]), on en déduit

(3) $$N_0 \geq C\ \varepsilon^{-(n-1)/(k-1)}$$

(ici et par la suite, C désignera une "constante" au sens des analystes, c'est-à-dire qui ne dépend pas de tous les autres nombres qui interviennent, mais elle pourra dépendre du numéro de la formule où elle intervient).

Dans des cas simples, on peut vérifier l'inégalité inverse de (3). Le problème est donc maintenant de regarder $\mathcal{R}$. Dans la pratique $\mathcal{S}$ a autant de points qu'il y a de points de $\mathcal{R}$ "proches" de $\partial\Omega$. Supposons qu'on ait un réseau $\mathcal{R}$ régulier de pas h, au moins au voisinage de la frontière, et que $\mathcal{S}$ ait autant de points que $\mathcal{R}$ a de points dont la distance à $\partial\Omega$ est inférieure à $A\,h$ (A une certaine constante). On a alors :

(4) $$N_0 \approx h^{-(n-1)}$$

($a \approx b$ signifie $a = O(b)$ et $b = O(a)$; il s'agit ici de relations pour $h \to 0$).

Nous appellerons N le nombre d'éléments de $\mathcal{R}$. Si le réseau est régulier $N \approx h^{-n} \approx N_0^{\frac{n}{n-1}}$ ce qui montrerait, s'il en était besoin, qu'il faut construire un réseau irrégulier.

On voudrait bien en effet que $N = O(N_0)$.

Nous pouvons en dire un tout petit peu plus long en introduisant un "pas local".

Dans la partie 2 nous examinerons des réseaux $\mathcal{R}$ pour lesquels ce concept est simple. On construit une suite finie d'ouverts $\Omega = \Omega_0 \supset \Omega_1 \supset \ldots \supset \Omega_\alpha$. Sur $\Omega_i - \Omega_{i+1}$, la trace de $\mathcal{R}$ est un réseau régulier de pas h_i, h_i est le pas local en $x \in \Omega_i - \Omega_{i+1}$. On prendra naturellement $h_i < h_{i+1}$. Si alors

(5) $$h_\alpha \approx h^\beta$$

il faudra, si on veut que

(6) $$N = O(N_0)$$

avoir

(7) $$\beta = \frac{n-1}{n} \quad .$$

De plus, si on pose :

$$a = k - 1$$

il faudra utiliser une méthode dont l'ordre de précision soit au moins :

$$b = \frac{an}{n-1} \quad .$$

§ 2.

Gardant les notations ci-dessus, nous allons donner une construction des Ω_i et des h_i que nous appellerons "construction de Bachvalov simplifiée" (en abrégé C.B.S.). Nous dirons un mot des modifications à faire pour passer aux constructions de Bahvalov [1]. Ces modifications n'enlèvent pas leur validité aux calculs d'ordres de grandeur ci-dessous.

On se donne deux paramètres : $\sigma \in]0,1[$ et $\tau > 1$. On pose :

$$s(i) = \min\{t \text{ entier}, \sigma t \geq i\} .$$

Pour tout multi-entier j, J(j,s) désignera le pavé :

$$\{x \,;\, |x_\mu - 2^{s-1} j_\mu| \leq h\, 2^{s-1},\ \ \mu = 1,\ldots,n\} .$$

Nous dirons que $J(j,s) \in \mathcal{J}_s$ si le pavé de même centre τ fois plus grand

$$\{x \,;\, |x_\mu - 2^{s-1} j_\mu| \leq \tau\, 2^{s-1},\ \ \mu = 1,\ldots,n\}$$

est contenu dans $\overline{\Omega}$. Nous poserons alors

$$\overline{\Omega}_i = \bigcup_{J \in \mathcal{J}_s} J$$

et Ω_i sera l'intérieur de son adhérence. Enfin :

$$h_i = 2^i h .$$

On a alors, Λ désignant le côté du plus grand cube contenu dans Ω et pourvu que h soit assez petit pour que $2\tau h < \Lambda$:

(8) $$\frac{\Lambda}{2} \leq \tau\, h\, 2^{s(\alpha)} \leq \Lambda$$

d'où l'on déduit que (5) est vérifiée avec :

(9) $$\beta = 1 - \sigma$$

de sorte que (7) devient :

(10) $$\sigma \geq \frac{1}{n} .$$

<u>Proposition 2</u> : Dans une C.B.S. vérifiant $\sigma > 1/n$, on a $N \approx h^{-(n-1)}$ (et par suite (6) est vérifié).

<u>Lemme</u> : Notons :

$$\Omega^{(r)} = \{x \; ; \; x \in \Omega, d(x, \partial\Omega) \leq r\} .$$

Il existe C tel que :

$$\text{mes}\,(\Omega^{(r)}) \leq C\, r .$$

<u>Démonstration</u> : Comme $\Omega^{(r)} \subset \Omega$ qui est borné, il suffit de démontrer que

$$\underset{r \to 0}{\text{lim. sup.}} \frac{\text{mes}\,(\Omega^{(r)})}{r} < \infty .$$

Par compacité de la frontière, on se ramène au domaine d'une carte locale et à démontrer que $\text{mes}\,(U^r) \leq C'\, r$ où

$$U^r = \{x \; ; \; x = (x', t), \quad x' \in V, \; 0 < t \leq \varphi(x', r)\}$$

où C' ne dépend pas de r, non plus que l'ensemble V borné dans $\mathbb{R}^{n-1}$ et

$$\varphi(x', r) \leq C''\, r \quad .$$ <u>cqfd</u>♦

♦ Le lemme s'applique à un ouvert borné lipschitzien et par conséquent la proposition 2 aussi.

<u>Démonstration de la proposition 2</u> : Si un point de Ω n'est pas dans Ω_i , sa distance à $\partial\Omega$ est au plus $\sqrt{n}(1+\tau)2^{s(i)-1}h$. On utilise alors le lemme pour voir que

$$\text{mes } (\Omega_{i-1} - \Omega_i) \leq C_1 2^{s(i)} h \quad .$$

Il y a donc au plus

$$C_2 \, 2^{s(i)-ni} \, h^{-(n-1)}$$

points de $\mathcal{R}$ dans $\Omega_{i-1} - \Omega_i$, ce qui, d'après la définition de $s(i)$, est majoré par

$$C_3 \, 2^{-(n-1/\sigma)i} \, h^{-(n-1)}$$

d'où enfin :

$$N \leq C_3 \sum_i 2^{-(n-1/\sigma)i} \, h^{-(n-1)} \; ;$$

or la série est convergente, <u>cqfd</u>.

Bahvalov [1] donne deux constructions correspondant à $\tau = 2$ et 3 respectivement. Il est amené à ajouter des points au réseau près de la frontière des Ω_i . Il donne aussi les équations discrétisées correspondantes pour le problème :

$$(11) \qquad \begin{cases} \Delta u = 0 \\ u\big|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$$

et une méthode d'interpolation, l'ensemble assurant que la solution approchée diffère de la solution exacte de moins de ε en norme du sup. Il donne ensuite une méthode de résolution itérative du système discrétisé (celle de Jacobi semble-t-il) qui permet d'atteindre la précision ε en $O(h^{2\sigma-2}|\log h|)$ itérations dans un cas, en $O(|\log h|^2)$

itérations dans l'autre cas avec $n=2$ variables indépendantes. Dans ce deuxième cas, la situation est donc très satisfaisante, mais je dois dire que la partie "résolution des systèmes discrétisés" m'a paru particulièrement obscure.

§ 3.

Nous revenons au problème général mais en prenant $p=+\infty$. Soit $x\in\Omega$, posons $R=d(x,\partial\Omega)$ et soit $r\in]0,R[$. Nous voudrions évaluer M, le nombre d'éléments de $\mathcal{R}$ appartenant à la boule U_r de centre x et rayon r. Il faut penser pour comprendre la suite que r est petit devant le diamètre de Ω mais grand devant $h\approx N_o^{-1/(n-1)}$.

<u>Définition</u> : Soit K un sous-ensemble borné d'un espace normé E, on appelle <u>n-ème épaisseur au sens de Gelfand</u> de K le nombre :

$$e_n(K)=e_n=\inf_{L^{(n)}}\ \sup_{x\in K\cap L^{(n)}} \|x\|$$

où $L^{(n)}$ parcourt l'ensemble des sous-espaces vectoriels fermés de codimension n.

Nous rappellons les deux propriétés faciles suivantes :

a) Soit D un sous-ensemble dense de E'. Dans la définition de la n-ème épaisseur au sens de Gelfand, il suffit de faire parcourir à $L^{(n)}$ l'ensemble des sous-espaces définis par des systèmes d'équations :

$$<x,\xi_j> = 0 \qquad j=1,\dots,n$$

où $\xi_j\in D$; $j=1,\dots,n$.

b) Soit L un sous-espace de dimension n+1 dans E et K la boule de rayon ρ dans L. On a :

$$\begin{cases} e_k(K) = \rho & k\le n \\ e_k(K) = 0 & k>n . \end{cases}$$

Soit K l'ensemble parcouru par les solutions de (1) lorsque φ parcourt la boule unité de V_k. Nous voulons qu'une fonction $u \in K$ qui s'annule aux M points de $\mathcal{R} \cap U_r$ soit majorée par ε dans $W_1^\infty(U_r)$, d'où l'idée de déterminer M par la relation

$$(12) \qquad l_M(K) \leq \varepsilon \quad \text{pour la norme} \quad W_1^\infty(U_r) .$$

Pour montrer que cette idée n'est pas entièrement utopique, nous allons nous limiter au cas $n = 2$, $k > 1$, $l = 0$, Ω simplement connexe et démontrer deux inégalités très simples.

<u>Lemme</u> : Sous les hypothèses ci-dessus il existe A tel que u se décompose en

$$u = u_1 + u_2$$

u_1 holomorphe, u_2 antiholomorphe, et

$$\|u_j\|_{L^\infty} \leq A \qquad j = 1,2 .$$

Si u est un polynôme de degré k, u_1 et u_2 aussi, si les dérivées d'ordre $\leq \nu$ de u s'annulent en x, celles de u_1 et u_2 aussi.

Nous admettrons ce lemme qui résume des résultats classiques de la théorie des fonctions.

<u>Proposition 3</u> : Il existe C telle que

$$\forall \kappa \qquad e_\kappa(K) \leq C(r/R)^{\kappa/2}$$

où $R = d(x, \complement\Omega)$.

<u>Démonstration</u> : Nous prenons pour $L^{(\kappa)}$ l'ensemble des fonctions qui s'annulent avec leurs dérivées d'ordre $\leq \kappa_1$. Compte-tenu des relations

$$\frac{\partial^{j_1+j_2+2j_3} u}{\partial x^{j_1} \partial y^{j_2+2j_3}} = (-1)^{j_3} \frac{\partial^{j_1+j_2+2j_3}}{\partial x^{j_1+2j_3} \partial y^{j_2}}$$

c'est un sous-espace de codimension au plus $2\kappa_1 + 1$ d'où $\kappa_1 \leq \frac{\kappa-1}{2}$. On a alors, d'après le fait que $u_1/(x_1+i\, x_2)^{\kappa_1}$ et $u_2/(x_1-i\, x_2)^{\kappa_1}$ sont encore respectivement holomorphe et antiholomorphe , et en utilisant le principe du maximum,

$$|u_j(y)| \leq C_1(r/R)^{\kappa_1}$$

on en déduit :

$$e_\kappa(K) \leq C_2(r/R)^{\kappa/2} .$$

Proposition 4 : Soir R' tel que $\overline{\Omega}$ soit contenu dans le disque ouvert de centre x et de rayon R'. Il existe C tel que, pour tout κ :

$$C\, e_\kappa(K) \geq (r/R')^{\kappa_2} .$$

Démonstration : On utilise la propriété b). On prend comme sous-espace de dimension κ_1 l'ensemble des polynômes harmoniques de degré au plus κ_1 . On remarque qu'il existe $B>0$ tel que u harmonique et majorée par B pour $\|y - x\| < R'$ implique $u \in K$. On divise $u_1(y_1, y_2)$ par $(y_1-x_1+i\, y_2-i\, x_2)^{\kappa_1+1}$, $u_2(y_1, y_2)$ par $(y_1-x_1-i\, y_2+i\, x_2)^{\kappa_1+1}$. Enfin on fait une inversion de centre x et on raisonne comme dans la démonstration de la proposition 3.

Remarque en guise de conclusion : Les densités prévues par les propositions 2 et 3 sont beaucoup plus faibles que celles des réseaux construits en 2. Pour les utiliser il faudrait trouver des formules de discrétisation utilisant toute la régularité de la solution, donc en ordre variable ! Outre qu'on n'en est pas là, on a vu que les réseaux du 2 suffisent à assurer que l'ordre de grandeur du nombre total de points est celui du nombre de points frontières.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. S. Bahvalov : O čislenom rešenij zadači Dirihle dlja uraŕnenja Laplasa Vestnik Moskovsk, Un 5 (1959).

[2] Birman et Solomonjak : Approximation polynômiale par morceaux des fonctions de classe $W^{\alpha,p}$, Mat. Sbornik 73 (115):3, (1967) 331-355.

[3] A. El Kolli : n-ème épaisseur dans les espaces de Sobolev, Note aux C. R. Acad. Sc. Paris t. 272 (1971), 537-539.

[4] A. N. Kolmogorov : Math. Ann. (2) 37 (1936), 107-111.