G. Mokobodzki

Compactification associée à une résolvante

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1971-1972), exp. n° 7, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1971-1972____A7_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77

(633)

SEMINAIRE GOULAOUIC-SCHWARTZ 1971-1972

COMPACTIFICATION ASSOCIEE A UNE RESOLVANTE

par G MOKOBODZKI

Exposé N° VII

24 Novembre 1971

§ 0. INTRODUCTION

Soient $(X,\mathfrak{B})$ un espace mesurable, $(V_\lambda)_{\lambda\geq 0}$ une famille de noyaux positifs bornés sur $(X,\mathfrak{B})$ vérifiant l'équation résolvante $V_o = V_\lambda + \lambda V_\lambda V_o$. A cette famille résolvante, on associe une théorie du potentiel ainsi que des processus de Markov sous des hypothèses convenables. (cf. [2], [4], [5]).

Bon nombre de résultats ont été obtenus en se plaçant d'abord dans le cadre suivant : X est un espace compact ou localement compact. $\mathfrak{B}$ est la tribu borélienne usuelle de X et les opérateurs V_λ envoient $\mathcal{C}(X)$ dans lui-même, ou encore $\mathcal{C}_0(X)$ dans lui-même.

A priori, ce deuxième cadre offre davantage de moyens de démonstration puisqu'on peut utiliser la structure topologique de X : a posteriori, on peut se demander si les résultats obtenus, dans la mesure où leurs énoncés ne font pas intervenir cette structure topologique, ne sont pas également vrais dans le cadre des espaces mesurables.

Deux voies au moins peuvent être suivies dans cette tentative de généralisation.

La première méthode consiste à adapter au cadre des espaces mesurables des démonstrations établies dans le cadre topologique.

La deuxième méthode, dite de compactification, consiste à faire apparaître le système $((X,\mathfrak{B}),(V_\lambda)_{\lambda\geq 0})$ comme un système induit sur un sous-ensemble par un système $((Y,\mathfrak{F}),(U_\lambda)_{\lambda\geq 0})$ où Y est un espace compact, $\mathfrak{F}$ sa tribu borélienne, et $(U_\lambda)_{\lambda\geq 0}$ une famille résolvante d'opérateurs linéaires positifs de $\mathcal{C}(Y)$ dans lui-même. C'est cette dernière méthode que nous allons décrire, d'après [1], (cf. aussi [5]) en en donnant deux nouvelles illustrations.

Pour les définitions générales et les résultats classiques sur les familles résolvantes, on renvoie à [2].

§ 1. MORPHISMES ET COMPACTIFICATION

Pour simplifier les notations, on appellera, dans ce travail, famille résolvante un système $((X,\mathfrak{B}),(V_\lambda)_{\lambda>0})$ où $(X,\mathfrak{B})$ est un espace mesurable, $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ une famille de noyaux bornés et positifs sur $(X,\mathfrak{B})$ vérifiant l'équation résolvante $V_\lambda - V_\mu = (\mu-\lambda)V_\lambda V_\mu$ pour $\lambda, \mu > 0$. Rappelons que pour tout $\lambda > 0$ et tout $A \in \mathfrak{B}$, $V_\lambda 1_A$ est $\mathfrak{B}$-mesurable.

<u>Définition 1</u> : Soient $F = ((X,\mathfrak{B}),(V_\lambda)_{\lambda>0})$ et $G = ((Y,\mathfrak{F}),(U_\lambda)_{\lambda>0})$ deux familles résolvantes.
On appellera morphisme de famille résolvante de F dans G une application φ $\mathfrak{B}$-$\mathfrak{F}$-mesurable de X dans Y qui vérifie les conditions suivantes équivalentes :
1) pour toute fonction numérique f sur Y, $\mathfrak{F}$-mesurable et bornée et pour tout $\lambda > 0$, on a

$$V_\lambda(f \circ \varphi) = (U_\lambda f) \circ \varphi$$

2) pour tout $x \in X$, tout $\lambda > 0$

$$\varphi(\varepsilon_x V_\lambda) = \varepsilon_{\varphi(x)} U_\lambda$$

(ε_x est la mesure de Dirac associée au point x).
<u>Exemples</u> : Soit $((X,\mathfrak{B}),(V_\lambda)_{\lambda>0})$ une famille résolvante.
<u>Exemple 1</u> : Soit $X' \subset X$, **on suppose que pour tout** $x \in X'$, tout $\lambda > 0$, la mesure $\varepsilon_x V_\lambda$ est portée par X'. C'est-à-dire que $\varepsilon_x V_\lambda(A) = \varepsilon_x V_\lambda(X)$ pour tout $A \in \mathfrak{B}$, $A \supset X'$. Désignons par $\mathfrak{B}'$ la tribu induite par $\mathfrak{B}$ sur X. Par hypothèse, si f est une fonction $\mathfrak{B}$-mesurable nulle sur X', on a $V_\lambda f(x) = 0 \quad \forall x \in X'$. On peut donc définir des noyaux U_λ sur $(X',\mathfrak{B}')$ de la façon suivante : pour tout borélien $A' \in \mathfrak{B}'$, tout $x \in X'$, on pose $U_\lambda 1_{A'}(x) = V_\lambda 1_A(x)$ où $A \in \mathfrak{B}$ satisfait seulement à la condition $A \cap X' = A'$. Les noyaux (U_λ) vérifient l'équation résolvante et l'injection canonique φ de $(X',\mathfrak{B}')$ dans $(X,\mathfrak{B})$ est un morphisme de la famille résolvante $F = ((X',\mathfrak{B}'),(U_\lambda)_{\lambda>0})$ dans la famille résolvante
$G = ((X,\mathfrak{B}),(V_\lambda)_{\lambda>0})$.

On dira alors que (U_λ) est la <u>famille induite sur X'</u>.

<u>Exemple 2</u> : Soit $\mathfrak{B}'$ une sous-tribu de $\mathfrak{B}$ telle que pour tout $\lambda > 0$, et tout $A \in \mathfrak{B}'$, $V_\lambda 1_A$ soit une fonction $\mathfrak{B}'$-mesurable. Dans ces conditions, l'application canonique φ de $(X,\mathfrak{B})$ dans $(X,\mathfrak{B}')$ est un morphisme de famille résolvante de $((X,\mathfrak{B}),(V_\lambda)_{\lambda>0})$ dans $((X,\mathfrak{B}'),(V_\lambda)_{\lambda>0})$.

<u>Exemple 3</u> : Cet exemple se rattache à l'exemple 2. Soit H un sous-espace vectoriel réticulé de fonctions $\mathfrak{B}$-mesurables bornées sur X tel que $1 \in H$. On désignera par $\mathfrak{B}'$ la sous-tribu engendrée par les éléments de H. Si l'on a $V_\lambda(H) \subset H$ pour tout $\lambda > 0$, alors l'injection canonique de $(X,\mathfrak{B})$ dans $(X,\mathfrak{B}')$ est un morphisme de $((X,\mathfrak{B}),(V_\lambda)_{\lambda>0})$ dans $((X,\mathfrak{B}'),(V_\lambda)_{\lambda>0})$, cette dernière expression a un sens car $V_\lambda 1_A$ est $\mathfrak{B}'$-mesurable pour tout $A \in \mathfrak{B}'$, tout $\lambda > 0$.

On vérifie sans peine que le composé de deux morphismes de familles résolvantes est encore un morphisme de famille résolvante.

<u>Propriétés des morphismes de familles résolvantes</u> :

Soient $F = ((X,\mathfrak{B}),(V_\lambda)_{\lambda>0})$ et $G = ((Y,\mathfrak{F}),(U_\lambda)_{\lambda>0})$ deux familles résolvantes et φ un morphisme de F dans G.

Les propriétés suivantes se démontrent facilement :

1) pour tout $q > 0$ et tout f q-excessive sur Y par rapport à G, $f \circ \varphi$ est q-excessive sur X par rapport à F.
En effet, f est q-excessive par rapport à G si l'on a $f = \sup_\lambda \lambda U_{\lambda+q} f$;

2) si f est q-surmédiane sur Y par rapport à G, alors $f \circ \varphi$ est q-surmédiane sur X par rapport à F et leurs régularisées q-excessives $\widehat{f \circ \varphi}$ et $\hat{f}$ vérifient $\widehat{f \circ \varphi} = \hat{f} \circ \varphi$;

3) si la famille résolvante (U_λ) est sous-markovienne, il en est de même pour la famille (V_λ). Soit alors f mesurable bornée sur Y. On définit la fonction $R^Y f$ sur Y en posant $R^Y f = \inf \{v \mid v$ surmédiane par rapport à G et $v \geq f\}$. De même pour g mesurable bornée sur X,
$R^X g = \inf \{w \mid w$ surmédiane par rapport à F et $w \geq g\}$ on a alors pour tout

f mesurable bornée sur Y, $(R^Y f) \circ \varphi = R^X(f \circ \varphi)$.

Théorème 2 : Soit $((X,\mathfrak{B}),(V_\lambda)_{\lambda>0}) = F$ une famille résolvante et soit H un sous-espace vectoriel réticulé de fonctions numériques $\mathfrak{B}$-mesurables bornées, tel que $1 \in H$ et $V_\lambda(H) \subset H$ pour tout $\lambda > 0$.
Soit $\hat{X}$ le compactifié séparé de X pour la structure uniforme la moins fine rendant continus les éléments de H et soit φ l'application canonique de X dans $\hat{X}$.
Il existe une famille résolvante $(U_\lambda)_{\lambda>0}$ et une seule d'opérateurs linéaires positifs de $\mathcal{C}(\hat{X})$ dans $\mathcal{C}(\hat{X})$ telle que pour tout $f \in \mathcal{C}(\hat{X})$, $V_\lambda(f \circ \varphi) = (U_\lambda f) \circ \varphi$, $\forall \lambda > 0$. En particulier si $\hat{\mathfrak{B}}$ est la tribu de Baire de $\hat{X}$, φ est un morphisme de $((X,\mathfrak{B}),(V_\lambda)_{\lambda>0})$ dans $((\hat{X},\hat{\mathfrak{B}}),(U_\lambda)_{\lambda>0})$.

Démonstration : Les noyaux V_λ étant bornés, on peut supposer que H est fermé en norme uniforme, de sorte que l'application $\varphi^* : f \mapsto f \circ \varphi$ est une bijection de $\mathcal{C}(\hat{X})$ sur H. Posons alors $U_\lambda f = (\varphi^*)^{-1}(V_\lambda(f \circ \varphi))$, pour $f \in \mathcal{C}(\hat{X})$. La famille $(U_\lambda)_{\lambda>0}$ est une famille résolvante sur $\hat{X}$ et l'on a bien $V_\lambda(f \circ \varphi) = (U_\lambda f) \circ \varphi$. L'unicité de (U_λ) résulte simplement du fait que $\varphi(X)$ est dense dans $\hat{X}$.

Définition 3 : En conservant les notations et hypothèses du théorème précédent, on dira que $\hat{X}$ est un compactifié de X associé à la résolvante $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ et que $(U_\lambda)_{\lambda>0}$ est la famille résolvante sur $\hat{X}$ associée à $(V_\lambda)_{\lambda>0}$.

Soit $((X,\mathfrak{B}),(V_\lambda)_{\lambda>0})$ une famille résolvante. Désignons par $B(X,\mathfrak{B})$ l'espace vectoriel des fonctions numériques $\mathfrak{B}$-mesurables bornées sur X. Si aucune confusion n'est possible, on écrira simplement $B(X)$ au lieu de $B(X,\mathfrak{B})$.

Lemme 4 (cf. [1]) : Soit H un sous-espace vectoriel séparable de $B(X)$. Le plus petit espace vectoriel $H' \subset B(X)$, tel que

a) $H \subset H'$;

b) $1 \in H'$ et H' est réticulé ;

c) $V_\lambda(H') \subset H'$, $\forall \lambda > 0$, est aussi séparable.

<u>Démonstration</u> : Soit H un sous-espace vectoriel séparable de B(X). Soit $\widetilde{H}$ l'espace vectoriel engendré par la réunion $\bigcup\limits_{\lambda>o} V_\lambda(H)$, puis soit $\hat{H}$ l'espace vectoriel réticulé engendré par $\widetilde{H}$. L'espace $\hat{H}$ est séparable. Considérons alors la suite (H_n) définie par $H_o = H$, $H_{n+1} = \hat{H}_n$ et posons $H' = \bigcup\limits_n H_n$, l'espace vectoriel H' est encore séparable, réticulé et stable par les V_λ .

<u>Théorème 5</u> : Soit $((X,\mathfrak{B}),(V_\lambda)_{\lambda>0})$ une famille résolvante. On suppose qu'il existe une tribu séparable $\mathfrak{B}' \subset \mathfrak{B}$ telle que pour un $p > 0$, les fonctions p-excessives $\mathfrak{B}$-mesurables soient $\mathfrak{B}'$-mesurables.

Il existe alors un compactifié métrisable $\hat{X}$ associé à $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ de résolvante associée $(U_\lambda)_{\lambda>0}$ sur $\hat{X}$, vérifiant les conditions suivantes

a) $U_\lambda(\mathcal{C}(\hat{X}))$ sépare les points de $\hat{X}$;

b) pour tout $q > 0$, et toute fonction $f \in B(X)$, q-excessive par rapport à la famille (V_λ), il existe $g \in B(\hat{X})$, q-excessive par rapport à la famille $(U_\lambda)_{\lambda>0}$ telle que $f = g \circ \varphi$, où φ est l'application canonique de X dans $\hat{X}$.

<u>Indications pour une démonstration</u> :

Soit (A_n) une base de $\mathfrak{B}'$ et soit $\mathfrak{B}''$ la tribu la moins fine rendant mesurables les fonctions $V_\lambda 1_{A_n}$; pour tout $q > 0$, les fonctions q-excessives sont $\mathfrak{B}''$-mesurables. Soit alors H' l'espace vectoriel réticulé stable par les opérateurs V_λ , engendré par la famille $(V_\lambda 1_{A_n})_{\lambda>0, n\geq 0}$ et les constantes.

Le compactifié $\hat{X}$ de X pour la structure uniforme la moins fine rendant continue les éléments de H' répond aux conditions cherchées.

§ 2. APPLICATIONS

Soit $((X,\mathfrak{B}),(V_\lambda)_{\lambda>0})$ une famille résolvante. Nous supposerons que $\lambda V_\lambda 1 \leq 1 \quad \forall \lambda > 0$ et que le noyau $V_0 = V = \sup_\lambda V_\lambda$ est borné sur $(X,\mathfrak{B})$. On désignera par $\mathcal{S}$ le cône des fonctions excessives, par C le cône des fonctions surmédianes par rapport à la famille résolvante $(V_\lambda)_{\lambda>0}$. On ne considèrera ici que des fonctions $\mathfrak{B}$-mesurables. Si $u \in C$, $\hat{u} = \sup_\lambda \lambda V_\lambda u$.

Théorème 6 : S'il existe une sous-tribu séparable $\mathfrak{B}' \subset \mathfrak{B}$ par rapport à laquelle les éléments de $\mathcal{S}$ sont mesurables, l'ensemble $X_0 \subset X$ défini par les relations $(x \in X_0) \Leftrightarrow (\forall\ s,\ s' \in \mathcal{S}\ ,\ \widehat{\inf(s,s')}(x) = \inf(s,s')(x))$ est un élément de $\mathfrak{B}'$ qui porte les noyaux V_λ, c'est-à-dire que $V_\lambda(1_{\complement X_0}) = 0 \quad \forall \lambda > 0$.

Théorème 7 (cf. [3]) : Supposons que la famille résolvante $(V_\lambda)_{\lambda\geq 0}$ vérifie l'hypothèse (L) de Meyer, c'est-à-dire que les noyaux (V_λ) sont basiques. Dans ces conditions

a) les hypothèses du théorème précédent sont vérifiées ;

b) il existe une topologie à base dénombrable $\mathcal{T}$ sur X_0 telle que pour toute fonction surmédiane bornée v sur X et tout $x \in X_0$, on ait

$$\sup_\lambda \lambda V_\lambda v(x) = \hat{v}(x) = \lim_{y\in X_0;\ y \xrightarrow{\mathcal{T}} x} \inf v(y) .$$

Commençons par démontrer les propriétés énoncées dans un cadre topologique.

Soit X un espace compact métrisable, $(V_\lambda)_{\lambda\geq 0}$ une famille résolvante sous-markovienne d'opérateurs positifs de $\mathcal{C}(X)$ dans $\mathcal{C}(X)$, telle que $V_0(\mathcal{C}(X))$ sépare les points de X. Sous ces hypothèses, on a les résultats suivants : (voir Meyer [2] et Ray [5]):

a) pour tout $x \in X$ $\lim_{\lambda\to\infty} \varepsilon_x \lambda V_\lambda = \hat{\varepsilon}_x$ existe pour la topologie vague sur $\mathfrak{M}(X)$;

b) l'ensemble X_o des points $x \in X$ tels que $\hat{\varepsilon}_x = \varepsilon_x$ est un G_δ (intersection d'une famille dénombrable d'ouverts) de X et cet ensemble porte les noyaux V_λ ;

c) pour toute fonction surmédiane v sur X, la régularisée semi-continue inférieurement de v, soit $\tilde{v}$, est une fonction surmédiane.

En effet $\lambda V_\lambda \tilde{v}$ est une fonction s.c.i. pour tout $\lambda > 0$ et l'on a $\lambda V_\lambda \tilde{v} \leq \lambda V_\lambda v \leq v$ par suite $\lambda V_\lambda \tilde{v} \leq \tilde{v}$.

Nous aurons besoin des lemmes suivants :

<u>Lemme 8</u> : Soit v une fonction surmédiane s.c.i. sur X. Pour tout $x \in X_o$, on a $\sup \lambda V_\lambda v(x) = \hat{v}(x) = v(x)$.

<u>Démonstration</u> : L'application $\mu \mapsto \int v \, d\mu$ est s.c.i. sur $\mathfrak{M}^+(x)$ muni de la topologie vague ; on a donc $\lim\limits_{\lambda \to \infty} \langle \varepsilon_x \lambda V_\lambda , v \rangle \geq v(x)$ et comme v est surmédiane, on a l'inégalité inverse, d'où l'égalité.

<u>Remarque</u> : Cette propriété de X_o est caractéristique et pourrait servir de définition.

<u>Lemme 9</u> : Pour tout couple f_1, f_2 de fonctions s.c.s. sur X telles que $0 \leq f_1$, $f_2 \leq 1$, on a

$$\widehat{\inf (V f_1 , V f_2)}(x) = \inf (V f_1 , V f_2)(x) \quad \forall x \in X_o .$$

<u>Démonstration</u> : Posons $h_1 = 1 - f_1$, $h_2 = 1 - f_2$. On a les relations

$$\inf (V f_1 , V f_2) + \sup (V f_1 , V f_2) = V f_1 + V f_2$$

et

$$\sup (V f_1 , V f_2) = V1 - \inf (V h_1 , V h_2) .$$

Les fonctions Vf_1, Vf_2, $V1$ sont excessives et $\inf(Vh_1, Vh_2)$ est surmédiane s.c.i., on applique alors le lemme précédent.

<u>Théorème 10</u> : Soient u, v des fonctions excessives universellement mesurables sur X ; pour tout $x \in X_0$. on a $\widehat{\inf(u,v)}(x) = \inf(u,v)(x)$.

<u>Démonstration</u> : Il existe deux familles (h_α) et (f_β) de fonctions s.c.s. positives sur X telles que $u = \sup_\alpha V h_\alpha$ et $v = \sup_\beta V f_\beta$.

On a évidemment $\widehat{\inf u,v}(x) \geq \widehat{\inf V h_\alpha, V f_\beta}(x)$ pour tout $x \in X$, et par conséquent :

$$\widehat{\inf(u,V)(x)} = \inf(u,v)(x) \quad \forall x \in X_0 .$$

<u>Démonstration du théorème 6</u> :

Considérons un système $(\hat{X}, (U_\lambda)_{\lambda \geq 0})$ où $\hat{X}$ est un compactifié métrisable de X associé à $(V_\lambda)_{\lambda \geq 0}$, $(U_\lambda)_{\lambda \geq 0}$ est la résolvante associée, le système vérifiant les propriétés énoncées dans le théorème 5.

Soit φ l'application canonique de X dans X. Posons $\hat{X}_0 = \{y \in \hat{X} ; \varepsilon_y = \lim_{\lambda \to \infty} \varepsilon_y \lambda U_\lambda\}$. Si la condition b) du théorème 5 est vérifiée, alors l'ensemble $X_0 = \varphi^{-1}(\hat{X}_0) \in \mathfrak{B}'$ et

$$(x \in X_0) \Leftrightarrow (\forall\, s, s' \in \mathcal{S}\ ,\ \widehat{\inf s, s'}(x) = \inf(s,s')(x)) .$$

Soit maintenant (h_n) une suite dense en norme dans $\mathcal{C}^+(\hat{X})$ et considérons la suite (f_p) des fonctions de la forme $f_p = \inf(Vh_{n_1}, \dots, Vh_{n_k})$.

Les fonction f_p sont surmédianes sur $\hat{X}$ et $\hat{X}_0 = \bigcap_p \{f_p = \hat{f}_p\}$.

Les fonctions $f_p \circ \varphi$ sont surmédianes sur X par rapport à la résolvante $(V_\lambda)_{\lambda \geq 0}$, par suite V ne charge aucun des ensembles $A_p = \{\widehat{f_p \circ \varphi} \neq f_p \circ \varphi\}$, et l'on a $X_0 = \varphi^{-1}(\hat{X}_0) = \complement \bigcup_p A_p$, donc V est porté par X_0.

Nous allons faire une étude dans un cadre topologique qui permettra de démontrer le théorème 7. Remarquons d'abord que la propriété énoncée dans le théorème 7 n'est pas attachée strictement à la famille résolvante $(V_\lambda)_{\lambda\geq 0}$ mais aux cônes de fonctions excessives et surmédianes qui s'en déduisent.

Soit $f \in B^+(X)$, telle que $f(x) > 0 \ \forall x \in X$; le noyau $U : g \mapsto Vg.f$ est l'opérateur terminal d'une famille résolvante $(U_\lambda)_{\lambda\geq 0}$ de noyaux positifs sur $(X,\mathfrak{B})$ telle que $U = U_0$ et les familles résolvantes $(U_\lambda)_{\lambda\geq 0}$ et $(V_\lambda)_{\lambda\geq 0}$ définissent les mêmes ensembles de fonctions surmédianes et de fonctions excessives. Dans Meyer [3], on trouve une démonstration du résultat suivant :

<u>Lemme 11</u> : Soit $(V_\lambda)_{\lambda\geq 0}$ une famille résolvante de noyaux positifs sur $(X,\mathfrak{B})$ satisfaisant l'hypothèse (L). Il existe alors $f \in B^+(X)$ telle que le noyau $U : g \mapsto Vfg$ soit compact de $B(X)$ dans lui-même. Si $(U_\lambda)_{\lambda\geq 0}$ est la famille résolvante d'opérateur terminal $U = U_0$, les noyaux U_λ sont aussi compacts.

<u>Théorème 12</u> : Soit X un espace compact métrique, et soit $(U_\lambda)_{\lambda\geq 0}$ une famille résolvante d'opérateurs linéaires positifs de $\mathcal{C}(X)$ dans lui-même. On suppose que

a) $\lambda U_\lambda 1 \leq 1 \ \forall \lambda > 0$ et $U_\lambda(\mathcal{C}(X))$ sépare X ;

b) les opérateurs U_λ sont fortement compacts.

Dans ces conditions, pour toute fonction surmédiane bornée v sur X, on a, pour $x \in X_0$,

$$\sup \lambda U_\lambda v(x) = \hat{v}(x) = \liminf_{\substack{y\in X_0 \\ y\to x}} v(y)$$

où $X_0 = \{y \in X \mid \lim_{\lambda\to\infty} \varepsilon_y \lambda U_\lambda = \varepsilon_y\}$.

<u>Démonstration</u> : L'ensemble X_0 est borélien ; soit w la fonction définie sur X par

$$w(x) = v(x) \quad \text{si} \quad x \in X_0 \quad \text{et} \quad w(x) = \sup v \quad \text{si} \quad x \notin X_0 .$$

La fonction w est surmédiane, de même que la régularisée s.c.i. $\tilde{w}$ de w.

Les noyaux U_λ sont compacts, par conséquent $\lambda U_\lambda(w) - \lambda U_\lambda(v)$ est continue sur X donc $\lambda U_\lambda(w) \leq \hat{w}$ et $w \geq \tilde{w} \geq \hat{w} = \hat{v}$.
Ces inégalités nous donnent $\hat{\tilde{w}} = \hat{w}$ et comme $\tilde{w}$ est s.c.i., $\hat{w}(x) = \hat{\tilde{w}}(x)$ pour tout $x \in X_0$. Pour terminer, il suffit de remarquer que, pour tout $x \in X_0$, on a par construction, $\tilde{w}(x) = \lim\limits_{y \in X_0 ;\, y \to x} \inf v(y)$, d'où le théorème.

Démonstration du théorème 7 :

On a vu qu'on pouvait supposer (lemme 11) les noyaux V_λ compacts. Soit alors $(\hat{X}, (U_\lambda)_{\lambda \geq 0})$ un système vérifiant les propriétés énoncées dans le théorème 5, où $\hat{X}$ est un compactifié métrisable associé à la famille résolvante $(V_\lambda)_{\lambda \geq 0}$, φ désignant toujours l'application canonique de X dans $\hat{X}$. Comme dans la démonstration du théorème 6, on définit successivement les ensembles $\hat{X}_0$ et $X_0 = \varphi^{-1}(\hat{X}_0)$. La topologie $\mathcal{C}$ sur X_0, la moins fine, rendant continue l'application φ de X_0 dans $\hat{X}_0$, vérifie les conditions énoncées dans le théorème 7.

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. Knight : Note on regularization of Markov processes, Ill. J. Math. 9 (1965), 548-552.

[2] P. A. Meyer : Probabilités et potentiels, Hermann (Paris).

[3] P. A. Meyer : Représentation intégrale des fonctions excessives, Université de Strasbourg, Séminaire de Probabilités 1969-1970.

[4] P. A. Meyer, J. B. Walsh : Quelques applications des résolvantes de Ray, à paraître. (Cet article contient une bibliographie étendue).

[5] D. Ray : Resolvents, transition functions and strongly Markovian processes, Ann. Math. 70 (1959), 43-75.

[6] G. Mokobodzki : Noyaux absolument mesurables ou basiques et opérateurs nucléaires, Séminaire Goulaouic-Schwartz 1971-1972, Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique (Paris).