Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

G. Mokobodzki

Noyaux absolument mesurables ou basiques et opérateurs nucléaires

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1971-1972), exp. n° 6, p. 1-21

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1971-1972____A6_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 1 - 1 9 7 2

NOYAUX ABSOLUMENT MESURABLES OU BASIQUES

ET OPERATEURS NUCLEAIRES

par G. MOKOBODZKI

Exposé N° VI

17 Novembre 1971

On étudie ici une classe de noyaux sur des espaces mesurables dont les propriétés s'apparentent à celles des opérateurs linéaires faiblement compacts sur des espaces de type $\mathcal{C}(K)$.

On établira des théorèmes de compacité qui sont à la base de la méthode de représentation intégrale des fonctions excessives relatives à une famille résolvante $(V_\lambda)_{\lambda\geq 0}$ de noyaux positifs, satisfaisant à la condition (L) de Meyer.

<u>Notations, définitions</u> : Soit $(X,\mathfrak{B})$ un espace mesurable. On désignera par

- $B(X)$ l'espace des fonctions numériques $\mathfrak{B}$-mesurables bornées sur X.
- $B^+(X)$ le sous-ensemble de $B(X)$ formé des fonctions positives.
- $\mathfrak{M}(X)$ l'ensemble des mesures σ-additives bornées sur X.
- $\mathfrak{M}^+(X)$ la partie positive de $\mathfrak{M}$.

On supposera toujours que $B(X)$ est muni de la topologie de la convergence uniforme.

Soient $(X_1,\mathfrak{B}_1)$, $(X_2,\mathfrak{B}_2)$ des espaces mesurables.

Dans ce travail, on appellera noyau de $B(X_1)$ dans $B(X_2)$ un opérateur linéaire borné V de $B(X_1)$ dans $B(X_2)$ tel que pour tout $\alpha\in\mathfrak{M}^+(X_2)$, αV soit une mesure sur $(X_1,\mathfrak{B}_1)$. Il suffit pour cela que, pour tout $y\in X_2$, l'application $\varepsilon_y V : f \to Vf(y)$ définisse une mesure sur $(X_1,\mathfrak{B}_1)$.

On dira qu'un noyau V de $B(X_1)$ dans $B(X_2)$ est <u>compact</u> si c'est un opérateur linéaire compact de $B(X_1)$ dans $B(X_2)$. On prendra garde qu'un opérateur compact de $B(X_1)$ dans $B(X_2)$ n'est pas nécessairement un noyau.

Soit $\alpha\in\mathfrak{M}^+(X_2)$ et soient U et V deux noyaux de $B(X_1)$ dans $B(X_2)$. On dira qu'ils sont <u>α-équivalents</u> si pour tout $f\in B(X_1)$, $Vf = Uf$ α-presque partout.

Enfin, pour $\alpha\in\mathfrak{M}^+(X)$, on désignera par ρ_α et τ_α les injections canonique de $B(X)$ dans $L^\infty(X,\alpha)$ et $L^1(X,\alpha)$.

Soient $(X_i, \mathfrak{B}_i)$ des espaces mesurables.

<u>Définition 1</u> : On dira qu'un noyau V de $B(X_1)$ dans $B(X_2)$ est <u>absolument mesurable</u> ou <u>basique</u> s'il existe $\mu \in \mathfrak{M}^+(X_1)$ tel que pour tout $x \in X_2$, $\varepsilon_x V$ soit absolument continue par rapport à μ. On dit alors que le noyau V est de base μ.
On retrouve là une formulation de la condition (L) de Meyer.

<u>Exemples</u> :
a) $X_1 = X_2 = \mathbb{N}$ et V est le noyau identité de $B(\mathbb{N})$.
b) X_1, X_2 sont des espaces compacts et V est un opérateur linéaire faiblement compact de $\mathcal{C}(X_1)$ dans $\mathcal{C}(X_2)$.

<u>Définition 2</u> : On dira qu'un noyau V de $B(X_1)$ dans $B(X_2)$ est <u>complètement mesurable</u> s'il est absolument mesurable et s'il existe une sous-tribu à base dénombrable $\mathfrak{B}_1' \subset \mathfrak{B}_1$ telle que, pour toute $f \in B(X_1)$, il existe une fonction f' bornée sur X_1, $\mathfrak{B}_1'$-mesurable telle que $Vf = Vf'$.

<u>Définition 3</u> : On dira qu'un noyau V de $B(X_1)$ dans $B(X_2)$ est σ-compact s'il existe une suite (U_n) de noyaux compacts de $B(X_1)$ dans $B(X_2)$ et une constante $M > 0$ telle que pour tout $f \in B(X_1)$ on ait

$$\sum_n |U_n f| \leq M \|f\| \quad \text{et} \quad Vf = \sum_n U_n f \quad .$$

§ 1.

Nous établirons les résultats suivants dans cette 1ère partie:
- Tout noyau σ-compact est complètement mesurable
- Le composé de deux noyaux absolument mesurables est un noyau σ-compact.
- Pour toute mesure $\alpha \in \mathfrak{M}^+(X_2)$ et tout noyau V absolument mesurable de $B(X_1)$ dans $B(X_2)$, $\tau_\alpha \circ V$ est un opérateur nucléaire de $B(X_1)$ dans $L^1(X_2, \alpha)$.

Ces résultats sont des conséquences de lemmes intemédiaires et de propositions qui ont leur intérêt propre.

Proposition 4 : Soit V un noyau complètement mesurable de base μ de $B(X_1)$ dans $B(X_2)$. Il existe une sous-tribu à base dénombrable $\mathfrak{B}_1' \subset \mathfrak{B}_1$ telle que pour tout $f \in B(X_1)$ $Vf = V(E_\mu(f|\mathfrak{B}_1'))$ où E_μ désigne l'opérateur d'espérance conditionnelle relatif à μ et $\mathfrak{B}_1'$.

Démonstration : Par hypothèse, il existe une sous-tribu $\mathfrak{B}_1'' \subset \mathfrak{B}_1$ telle qu'en posant $U(.) = V(E_\mu(.|\mathfrak{B}_1''))$ on ait $U(B(X_1)) = V(B(X_1))$ et U est un noyau de base μ. Désignons par K la boule unité de $B(X_1)$. L'ensemble U(K) est alors compact métrisable pour la topologie de la convergence simple sur X_2. En effet U, étant de base μ, peut être considéré comme défini sur $L^\infty(X_1, \mathfrak{B}_1'', \mu)$ et U(K) est aussi l'image continue de la boule unité de $L^\infty(X_1, \mathfrak{B}_1'', \mu)$, ensemble qui est métrisable pour la topologie $\sigma(L^\infty(X_1, \mathfrak{B}_1'', \mu), \quad L^1(X_1, \mu))$. On en déduit l'existence d'une suite $(x_n) \subset X_2$ qui sépare U(K), en particulier pour $f \in U(K)$ les relations $(f \equiv 0)$ et $(f(x_n) = 0 \quad \forall\, n)$ sont équivalentes. Si l'on identifie les mesures de la forme αV, où $\alpha \in \mathfrak{M}^+(X_2)$, à des éléments de $L^1(X_1, \mu)$, on en conclut que pour tout $\alpha \in \mathfrak{M}^+(X_2)$ αV appartient à l'espace vectoriel fermé E engendré par la suite $(\varepsilon_{x_n} V)$ dans $L^1(X_1, \mu)$. Ceci implique que E est à base dénombrable et qu'il existe une sous-tribu à base dénombrable $\mathfrak{B}_1' \subset \mathfrak{B}_1$ telle que tout élément de E puisse se représenter par une fonction $\mathfrak{B}_1'$-mesurable. Cette sous-tribu vérifie bien

$$V(f) = V(E_\mu(f|\mathfrak{B}_1')) \qquad \text{pour tout} \quad f \in B(X_1).$$

Nous pouvons maintenant énoncer la proposition :

Proposition 5 : Soit V un noyau absolument mesurable, de base μ, de $B(X_1)$ dans $B(X_2)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) V est complètement mesurable

b) il existe une fonction numérique G sur $X_1 \times X_2$, $(\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2)$-mesurable et telle que

i) pour tout $y \in X_2$, $G(.,y) \in \mathcal{L}^1(X_1,\mu)$

ii) pour tout $f \in B(X_1)$, tout $y \in X_2$, $Vf(y) = \int G(x,y)\, f(x)\, d\mu(x)$.

Démonstration :

1) $a \Rightarrow b$. D'après la proposition précédente, il existe une sous-tribu séparable $\mathfrak{B}_1' \subset \mathfrak{B}_1$ telle que $Vf = V(E_\mu(f|\mathfrak{B}_1'))$, et l'on est ramené à supposer que $\mathfrak{B}_1$ est à base dénombrable, un résultat classique dont on peut trouver une démonstration dans Meyer [3] , permet de conclure.

2) $b \Rightarrow a$. Si G est $(\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2)$-mesurable, il existe deux sous-tribu à base dénombrable $\mathfrak{B}_1' \subset \mathfrak{B}_1$ et $\mathfrak{B}_2' \subset \mathfrak{B}_2$ telles que G soit aussi $(\mathfrak{B}_1' \times \mathfrak{B}_2')$-mesurable ; pour tout $f \in B(X_1)$ on aura alors

$$Vf = V(E_\mu(f|\mathfrak{B}_1')) .$$

Corollaire 6 : Soit V un noyau complètement mesurable de $B(X_1)$ dans $B(X_2)$. L'opérateur V^+ défini pour $f \in B(X_1)$, $x \in X_2$ par $V^+f(x) = \langle(\varepsilon_x V)^+, f\rangle$ est un noyau complètement mesurable de $B(X_1)$ dans $B(X_2)$, V^+ et $V^- = V^+ - V$ sont positifs.

Corollaire 7 : Soit V un noyau complètement mesurable de $B(X_1)$ dans $B(X_2)$. Pour toute mesure $\alpha \in \mathfrak{M}^+(X_2)$, l'opérateur $\tau_\alpha \circ V$ de $B(X_1)$ dans $L^1(X_2,\alpha)$ est nucléaire.

Démonstration : On peut écrire $Vf(.) = \int G(.,y)\, f(y)\, d\mu(y)$ où la fonction G appartient à $L^1(\mu \otimes \alpha)$.

Proposition 8 : Tout noyau σ-compact est complètement mesurable.

Démonstration : On s'appuie sur un lemme dont la démonstration est immédiate.

Lemme :

a) tout noyau compact est complètement mesurable

b) un noyau V, qui est limite simple d'une suite V_n de noyaux complètement mesurables, est aussi complètement mesurable.

Démonstration :

a) Soit U un noyau compact de $B(X_1)$ dans $B(X_2)$, la famille $(\varepsilon_x U)_{x \in X_2}$ est fortement relativement compacte dans $\mathfrak{M}^+(X_1)$, par conséquent il existe $\mu \in \mathfrak{M}^+(X_1)$ telle que $\varepsilon_x U$ soit de base μ pour tout $x \in X_2$. Selon un argument déjà utilisé, l'espace vectoriel E engendré par la famille $(\varepsilon_x U)_{x \in X_2}$ est à base dénombrable dans $L^1(X_1, \mu)$ et il existe une sous-tribu à base dénombrable $\mathfrak{B}_1' \subset \mathfrak{B}_1$ telle que

$$u\ f = U(E_\mu(f \mid \mathfrak{B}_1')) \quad \forall\ f \in B(X_1).$$

b) Supposons que V_n soit de base $\mu_n \in \mathfrak{M}^+(X_1)$ et que $V_n(f) = V_n(E_\mu(f \mid \mathfrak{B}^n))$ où $\mathfrak{B}^n$ est une sous-tribu à base dénombrable.

Par hypothèse $Vf = \lim$ simple $V_n\ f$ pour toute $f \in B(X_1)$, le noyau V est donc de base $\mu = \Sigma \frac{1}{2^n} \frac{\mu_n}{\|\mu_n\|}$ et la tribu $\mathfrak{B}_1'$ engendrée par la réunion $(\bigcup_n \mathfrak{B}^n)$ satisfait aux conditions requises.

La proposition suivante et son corollaire montrent en quel sens on peut se ramener à considérer des noyaux complètement mesurables.

Proposition 9 : Soit V un noyau absolument de base μ de $B(X_1)$ dans $B(X_2)$. Pour toute mesure $\alpha \in \mathfrak{M}^+(X_2)$, il existe une sous-tribu à base dénombrable $\mathfrak{B}_1^\alpha \subset \mathfrak{B}_1$ telle que $Vf = V(E_\mu(f \mid \mathfrak{B}_1^\alpha))$, α-presque partout $\forall\ f \in B(X_1)$.

Démonstration : Montrons que l'opérateur $T : g \to (g\ .\ \alpha)V$ définit un opérateur compact de $B(X_2)$ dans $L^1(X_1, \mu)$. Il revient au même de vérifier que $\tau_\alpha \circ V$ est un opérateur compact de $B(X_1)$ dans $L^1(X_2, \alpha)$, autrement dit que de toute suite (Vf_n), $\|f_n\| \leq 1$, on peut extraire une suite convergente dans $L^1(X_1,\alpha)$. Le noyau V étant de base μ, on peut extraire une suite (Vf'_n) qui converge simplement partout sur X_2, donc converge dans $L^1(X_2,\alpha)$ fort. On en déduit l'existence d'une sous-tribu à base dénombrable $\mathfrak{B}_1^\alpha \subset \mathfrak{B}_1$ telle que pour toute $g \in B(X_2)$, $(g \cdot \alpha)V$ possède un représentant $\mathfrak{B}_1^\alpha$-mesurable dans $\mathcal{L}^1(X_1,\mu)$. On aura alors $Vf = V(E_\mu(f\,|\,\mathfrak{B}_1^\alpha))$ α-presque partout $\forall\, f \in B(X_1)$.

<u>Corollaire 10</u> : Le composé de deux noyaux absolument mesurables peut être représenté comme le composé de deux noyaux complètement mesurables.

Dans ce qui suit on ne considèrera, pour simplifier, que des espaces mesurables $(X,\mathfrak{B})$ dont les tribus sont à base dénombrable et tous les noyaux considérés seront positifs.

Bien que nous disposions des théorèmes de Grothendieck sur les opérateurs nucléaires à valeurs dans les espaces de type L^1, il nous sera utile de refaire une étude élémentaire.

<u>Définition 11</u> (Grothendieck [2]) : Soit $\alpha \in \mathfrak{M}^+(X)$ et soit H un ensemble de fonctions numériques $\mathfrak{B}$-mesurables sur X.
On dira que H est <u>α-équimesurable</u> s'il existe une suite $(A_n) \subset \mathfrak{B}$ telle que
a) $\alpha(\bigcup_n A_n) = \alpha(X)$;
b) pour tout n et tout $f \in H$, $1_{A_n} f$ est α-essentiellement bornée et $\rho_\alpha(1_{A_n} . H)$ est relativement compact dans $L^\infty(X_o,\alpha)$ muni de la norme usuelle.
Cette définition s'étend naturellement à un ensemble de classes de fonctions α-mesurables, donc en particulier à tous les espaces $L^p(X,\alpha)$.

<u>Lemme 12</u> : Soit H un ensemble α-équimesurable de fonctions numériques sur X. S'il existe $f \in \mathcal{L}^1_+(X,\alpha)$ telle que $|h| \le f$ $\forall\, h \in H$, alors il existe $g \in \mathcal{L}^1_+(X,\alpha)$, $g \ge f$, telle que $\rho_\alpha(\frac{1}{g} . H)$ soit relativement compact dans $L^\infty(X,\alpha)$ muni de la norme usuelle.

<u>Démonstration</u> : On peut supposer que la suite $(A_n) \subset \mathfrak{B}$ de la définition précédente est formée d'ensembles deux à deux disjoints. Posons alors $B_n = \complement(\bigcup_{m\leq n} A_m)$. On doit avoir $\inf_n \int f \,.\, 1_{B_n} \, d\alpha = 0$, il existe donc une suite (n_p) telle que $\int f \,.\, 1_{B_{n_p}} \, d\alpha \leq \frac{1}{2^p}$. Posons alors $g = f + f \,.\, \sum_p 1_{B_{n_p}}$, on a $g \in \mathcal{L}^1_+(X,\alpha)$, et si $x \in B_{n_p}$, $f(x) \leq \frac{1}{p} g(x)$, par suite $\rho_\alpha(\frac{1}{g} \,.\, H)$ est relativement compact dans $L^\infty(X,\alpha)$.

La proposition qui suit peut être considérée comme une généralisation du théorème d'Egoroff.

<u>Proposition 13</u> : Soit H un ensemble de fonctions numériques finies $\mathfrak{B}$-mesurables sur X. Si H est compact métrisable pour la topologie de la convergence simple sur X. alors H est α-équimesurable pour toute $\alpha \in \mathfrak{M}^+(X_o)$. Plus précisément, il existe une suite $(A_n) \subset \mathfrak{B}$, dépendant de α, telle que

a) $\alpha(\bigcup_n A_n) = \alpha(X)$;

b) $1_{A_n}.H$ est compact pour la topologie de la convergence uniforme sur X.

<u>Démonstration</u> : Soit $(x_n) \subset X_o$ une suite de points séparant H et soit H_1 H un sous-ensemble dénombrable dense dans H pour la topologie de la convergence simple.

Posons $h_n = \sup\{(f-g) ; f,g \in H \text{ et } |f(x_k)-g(x_k)| < \frac{1}{2^n} \ \forall\, k \leq n\}$. L'ensemble H_1 étant dense dans H, l'enveloppe supérieure peut être prise avec f, g parcourant H_1 de sorte que h_n est $\mathfrak{B}$-mesurable puisque H_1 est dénombrable.

Chacune des fonctions h_n est partout finie, on a $h_{n+1} \leq h_n$ et $\inf_n h_n = 0$. Enfin pour toute suite $(g_p) \subset H$ convergeant simplement vers $g \in H$, on a la propriété suivante : $\forall\, n$, $\exists\, p_o$ tel que $(p \geq p_o) \Rightarrow |g - g_p| \leq h_n$. On en déduit que pour tout ensemble $A \in \mathfrak{B}_o$ tel que la suite $(1_A.h_n)$ converge uniformément vers 0, l'ensemble $1_A.H$ est compact pour la topologie de la convergence uniforme sur X_o . D'après le théorème d'Egoroff, il existe une suite $(A_n) \subset \mathfrak{B}$ telle que $\alpha(\bigcup_n A_n) = \alpha(X)$ et telle que

$\lim_p \|1_{A_n} \cdot h_\rho\| = 0$. Une telle suite (A_n) répond aux conditions cherchées.

<u>Lemme 14</u> : Soient $(X,\mathfrak{B})$ un espace mesurable, H un ensemble borné de $B(X)$ compact métrisable pour la topologie de la convergence simple. Il existe un sous-ensemble $H' \subset B(X)$, $H \subset H'$, tel que H' soit convexe, stable par enveloppes supérieure et inférieure de sous-familles quelconques, compact métrisable pour la topologie de la convergence simple sur X.

<u>Démonstration</u> : Soit H_1 un sous-ensemble dénombrable dense de H et soit $(x_n) \subset X$ une suite séparant H. On peut aussi supposer que H sépare X et que $\mathfrak{B}$ est la tribu la moins fine rendant mesurables les éléments de H_1.

Posons comme précédemment $h_n = \sup\{(f-g); f,g \in H \text{ et } |f(x_k)-g(x_k)| < 2^{-n}\ \forall k \leq n\}$ et considérons le compactifié (métrisable) $\tilde{X}$ de X pour la topologie la mons fine rendant continus les éléments de H_1 et toutes les fonctions h_n. L'ensemble X se plonge canoniquement dans $\tilde{X}$ et toute fonction $f \in H$ se prolongent en une fonction continue sur $\tilde{X}$ que nous désignerons par $\tilde{f}$, de même h_n se prolonge (c'est là une définition) en $\tilde{h}_n$ sur $\tilde{X}$. Posons alors $Y = \{\inf \tilde{h}_n = 0\}$. L'ensemble Y est un G_δ de $\tilde{X}$ et l'ensemble $\tilde{H}$ est équicontinu en chaque point de Y.

Considérons la distance d sur Y, compatible avec la topologie de Y, $d(x,y) = \sup_{f \in H} |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)|$. Considérons maintenant, pour $x_0 \in X$, l'ensemble $F = \{g \in \mathcal{C}(Y); |g(x) - g(y)| < d(x,y)\ \forall x,y \in Y \text{ et } |g(x_0)| \leq \sup_{f \in H} |f(x_0)|\}$.
Pour tout $g \in F$, la trace de g sur X est $\mathfrak{B}$-mesurable, et F est compact métrisable pour la topologie de la convergence simple sur Y, donc aussi pour la topologie de la convergence simple sur X. Enfin F est convexe, stable par enveloppes supérieure et inférieure de sous-familles quelconques.

L'ensemble H' des restrictions à X des éléments de F répond donc à la question.

La proposition précédente doit être rapprochée du théorème de Phillips sur les mesures définies sur un compact faible d'un espace de Fréchet, théorème qu'on peut formuler de la façon suivante, cf. [2].

<u>Théorème</u> : Soit X un espace compact, et soit H un ensemble faiblement compact de $\mathcal{C}(X)$. Pour toute mesure de Radon $\alpha \geq 0$ sur X, il existe une suite (K_n) de compacts de X telle que

a) $\alpha(\bigcup_n K_n) = \alpha(X)$;

b) $1_{K_n}.H$ est compact pour la topologie de la convergence uniforme.

<u>Lemme 15</u> : Soit V un noyau complètement mesurable de base μ de $B(X_1)$ dans $B(X_2)$ et soit K_1 la boule unité de $B(X_1)$. L'ensemble $V(K_1)$ est compact métrisable pour la topologie de la convergence simple sur X_2.

<u>Démonstration</u> : Soit $\mathfrak{B}_1'$ une sous-tribu à base dénombrable telle que $Vf = V(E_\mu(f|\mathfrak{B}_1'))$ pour tout $f \in B(X_1)$. La boule unité K de $L^\infty(X_1, \mathfrak{B}_1', \mu)$ est alors compacte métrisable pour la topologie faible $\sigma(L^\infty, L^1)$, le noyau V peut être défini sur K et l'on a $V(K_1) = V(K)$ de sorte que $V(K)$ est l'image d'un compact métrisable par une application continue de K dans $B(X)$ muni de la topologie de la convergence simple.

<u>Proposition 16</u> : Le composé de deux noyaux absolument mesurables est un noyau σ-compact.

<u>Démonstration</u> : Soient $(X_i, \mathfrak{B}_i)$ des espaces mesurables pour $i = 1,2,3$, $V : B(X_1) \to B(X_2)$ et $W : B(X_2) \to B(X_3)$ deux noyaux absolument mesurables de bases μ et α respectivement. On a vu qu'on pouvait supposer toutes les tribus séparables et tous les noyaux positifs.
D'après la proposition 13 et le lemme 15, il existe une suite $(A_n) \subset \mathfrak{B}_2$, telle que

a) $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $m \neq n$, $\alpha(\bigcup_n A_n) = \alpha(X_2)$

b) pour tout n le noyau $1_{A_n} . V$ est compact. Posons alors $T_n = W \circ (1_{A_n} . V)$, les noyaux T_n sont compacts, pour tout $f \in B(X_1)$, on a
$\sum_p T_n(|f|) \leq \|W\| . \|V\| . \|f\|$ et $W \circ V = \sum_n T_n$.

§ 2. PROPRIETES DES OPERATEURS A NOYAU

Dans ce qui suit nous supposerons que tous les espaces mesurables considérés sont munis de tribus à base dénombrable. Soient $(X_1, \mathfrak{B}_1)$, $(X_2, \mathfrak{B}_2)$ des espaces mesurables.

Proposition 17 : Soit V un noyau ≥ 0 complètement mesurable de $B(X_1)$ dans $B(X_2)$. On suppose que V est de base μ. Pour toute mesure $\alpha \in \mathfrak{M}^+(X_2)$, il existe $h \geq 1$, $h \in \mathcal{L}^1_+(X_1,\mu)$ vérifiant les conditions suivantes:

a) pour tout $u \in \mathcal{L}^1_+(X_1,\mu)$, $V(\frac{u}{h}) \in \mathcal{L}^1_+(X_2,\alpha)$

b) l'opérateur U défini sur $L^1(X_1,\mu)$ par $U(u) = \tau_\alpha(V(\frac{u}{h}))$ est un opérateur linéaire compact de $L^1(X_1\ \mu)$ dans $L^1(X_2,\alpha)$.

Démonstration : D'après la proposition n°5 , il existe une fonction numérique G sur $X_1 \times X_2$, qui est $\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2$-mesurable et telle que pour tout $f \in B(X_1)$ et $x \in X_2$ on ait

$$Vf(x) = \int G(x,y)\ f(y)\ d\mu(y)$$

Le noyau V étant borné, on a: $\int G(x,y)\ d\mu\ (y)\ d\alpha(x) < +\infty$.
Posons $h_0(y) = \int G(x,y)\ d\alpha(x)$. La fonction h_0 appartient à $\mathcal{L}^1(X_1,\mu)$ de sorte qu'en posant $D = \{h_0 = +\infty\}$ on peut définir un noyau borné T de base α, défini sur $B(X_2)$ par $Tg(y) = 1_{\complement D} . h_0(y)^{-1} \int G(x,y) g(x) d\alpha(x)$.
Le noyau T est complètement mesurable, l'ensemble

$$H = \{h_0 . Tg;\ g \in B_+(X_2),\ \|g\| \leq 1\}$$

est μ-équimesurable. D'après le lemme n°12, il existe donc $h \in \mathcal{L}^1_+(X_1,\mu)$ tel que l'ensemble $\frac{1}{h}.H$ soit borné et relativement compact dans $B(X_1)$.
Par dualité, on en déduit que le noyau $U : u \mapsto \tau_\alpha[V(\frac{u}{h})]$ est un opérateur compact de $L^1(X_1,\mu)$ dans $L^1(X_2,\alpha)$.

Corollaire 18 : Si l'on a $\alpha V \leq \mu$, l'opérateur V peut se prolonger en un opérateur linéaire continu de $L^1(X_1,\mu)$ dans $L^1(X_2,\alpha)$ qui transforme toute partie faiblement compacte en partie fortement compacte. Ce corollaire peut se démontrer directement à l'aide de la proposition précédente et nous en laisserons le soin au lecteur. Nous démontrerons des résultats plus fins dont l'utilité est plus grande en théorie du potentiel.

Proposition 19 : Soit $(X,\mathfrak{B})$ un espace mesurable et soit $\mu \in \mathfrak{M}^+(X)$. Pour un filtre de Cauchy faible $\mathfrak{F}$ sur $L^1_+(X,\mu)$ les conditions suivantes sont équivalentes:

a) $\mathfrak{F}$ est faiblement convergent sur $L^1_+(X\ \mu)$ (pour $\sigma(L^1(\mu),\ L^\infty(\mu))$ vers $f \in L^1_+(X,\mu)$.

b) pour toute suite décroissante $(A_n) \subset \mathfrak{B}$, le filtre $\mathfrak{F}$ converge uniformément vers f sur l'ensemble $(\mu_{|A_n})$, identifié à un sous-ensemble de $L^\infty(\mu)$.

c) Si X est un espace compact, et $\mathfrak{B}$ sa tribu borelienne, on peut dans la condition b) précédente ne considérer que des suites décroissantes de compacts.

Démonstration : L'espace $L^\infty(X,\mu)$ est isomorphe pour sa structure d'espace vectoriel ordonné à un espace $\mathcal{C}(\tilde{X})$ où $\tilde{X}$ est un espace compact stonien, et en supposant $L^\infty(X,\mu)$ plongé dans $L^1(X,\mu)$, la mesure μ se transporte en une mesure $\tilde{\mu}$ sur $\tilde{X}$ et les espaces $L^1(X,\mu)$ et $L^1(\tilde{X},\tilde{\mu})$ sont isomorphes. Pour faciliter la démonstration, nous nous placerons sur $\tilde{X}$. Pour tout $f \in L^1(\tilde{X},\tilde{\mu})$, $f.\tilde{\mu}$ est une mesure ν_f sur $\tilde{X}$. Dire que $\mathfrak{F}$ est un filtre de Cauchy faible sur $L^1(\tilde{X},\mu)$ équivaut à dire que $\lim\limits_{\mathfrak{F}} \nu_f = \nu$ existe pour la topologie vague sur $\mathfrak{M}^+(\tilde{X})$ et la condition b) implique que ν ne charge pas les compacts $K \subset \tilde{X}$ qui sont $\tilde{\mu}$-négligeables, par suite ν est de base $\tilde{\mu}$ et il existe $f_o \in L^1_+(X,\mu)$ telle que:

$$\lim_{\mathfrak{F}} \int hfd\mu = \int f_o \cdot d\mu \qquad \forall\ h \in L^\infty(X,\mu).$$

Montrons maintenant que non b $\Rightarrow$ non a.
On remarque immédiatement qu'on peut énoncer la condition b) avec des suites décroissantes $(A_n) \subset \mathfrak{B}$ telles que $\inf \mu(A_n) = 0$.
Supposons donc qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une suite décroissante $(A_n) \subset \mathfrak{B}$ vérifiant les conditions suivantes: $\inf \mu(A_n) = 0$ et $\forall M \in \mathfrak{F}$, il existe $f_{n,M} \in M$ satisfaisant à

$$\int f_{n,M} \cdot 1_{A_n} \, d\mu \geq \varepsilon.$$

On aura donc aussi $\int f_{n,M} \cdot 1_{A_m} \, d\mu \geq \varepsilon$ pour $m \leq n$. Si le filtre $\mathfrak{F}$ convergeait vers $f_o \in L^1_+(X,\mu)$, on aurait, pour tout $n, \int f_o . 1_{A_n} d\mu = \lim_{\mathfrak{F}} \int f . 1_{A_n} d\mu \geq \varepsilon$, ce qui vient en contradiction avec $\inf_n \int f . 1_{A_n} d\mu = 0$.

<u>Corollaire 20</u> : Soit H une partie nucléaire de $L^1(\mu)$, contenue dans $L^\infty(\mu) \cap L^1(\mu)$, bornée dans $L^\infty(\mu)$.
Tout filitre $\mathfrak{F}$ sur $L^1_+(\mu)$ faiblement convergent vers $f_o \in L^1_+(\mu)$, converge uniformément sur H vers f_o.

<u>Démonstration</u> : On sait qu'il existe une sente décroissante $(B_n) \subset \mathfrak{B}$ telle que

a) $\inf \mu(B_n) = 0$;

b) $1_{\complement B_n} . H$ est relativement compact dans $L^\infty(X,\mu)$ avec sa norme usuelle.

Supposons pour simplifier que $\int f_o d\mu \leq 1$.
D'après le théorème précédent, pour $0 < \varepsilon < 1$, il existe $M \in \mathfrak{F}$ tel que :

$$\int f . 1_{B_n} \, d\mu \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{pour tout } f \in M.$$

D'autre part, il existe une famille finie $(g_i)_{i \leq k}$ d'éléments de $L^\infty(\mu)$ telle que pour tout $g \in H$, il existe g_i vérifiant

$$\| 1_{\complement B_n} (g - g_i) \| < \frac{\varepsilon}{8}$$

L'ensemble

$$N = \{f \in L^1_+ (\mu) \mid |\int (f-f_o) \cdot g_i \cdot 1_{\complement B_n} d\mu| < \frac{\varepsilon}{8} \ \forall i < k \text{ et} |\int (f-f_o) d\mu| < \varepsilon\}$$

appartient au filtre $\mathfrak{F}$ et pour tout $f \in M \cap N$ et tout $g \in H$ on a :

$$|\int_{\complement B_n} (f - f_o) g d\mu| < \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8}(2\int f_o \, d\mu + \varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Enfin pour tout $f \in M$, on a par hypothèse :

$$\int f \cdot 1_{B_n} d\mu \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{d'où finalement}$$

$$|\int (f - f_o) g d\mu| < \varepsilon \text{ pour tout } f \in M \cap N.$$

Soit V un noyau complètement mesurable positif, de base μ, appliquant $B(X_1)$ dans $B(X_2)$ et soit $\alpha \in \mathfrak{M}^+(X_2)$ telle que $\alpha V \leq \mu$.
L'opérateur V se prolonge en un opérateur linéaire $\tilde{V}$ continu de $L^1(X_1,\mu)$ dans $L^1(X_2,\alpha)$ en posant pour $f \in L^1_+(X_1,\mu)$, $Vf = \sup\limits_{p>0} V(\inf(p,f))$

puis en posant $\tilde{V}f$ = classe de Vf dans $L^1(X_2,\alpha)$.
Le théorème qui suit s'énonce sous les conditions ci-dessus.

<u>Théorème 21</u> : 1) $\tilde{V}$ transforme toute partie bornée pour l'ordre dans $L^1(X_1,\mu)$ en partie nucléaire de $L^1(X_2,\alpha)$

2) pour toute partie $M \subset L^1_+(X_1,\mu)$, faiblement relativement compacte, la fonction numérique

$$g_M = \inf \{Vf;\ f \in M\} \text{ est } \mathfrak{B}_2\text{-mesurable.}$$

3) pour tout filtre $\mathfrak{F}$ à base dénombrable sur $L^1_+(X_1,\mu)$ faiblement convergent, on a

$$\liminf_{\mathfrak{F}} Vf \geq V(\lim_{\mathfrak{F}}) \text{ et}$$

$$\inf_{M \in \mathfrak{F}} \int^* (V(\lim_{\mathfrak{F}}) - g_M)^+ \, d\alpha = 0 \qquad \text{où } g_M = \inf_{f \in M} Vf.$$

4) $\tilde{V}$ transforme tout filtre faiblement convergent $\mathfrak{F}$ sur $L^1_+(X_1,\mu)$ en filtre fortement convergent dans $L^1_+(X_2,\alpha)$

5) $\tilde{V}$ transforme toute suite de Cauchy faible dans $L^1(X_1,\mu)$ en suite fortement convergente, et toute partie faiblement compacte en partie fortement compacte.

6) $\tilde{V}$ transforme toute suite de Cauchy faible de $L^1(X_1,\mu)$, bornée pour l'ordre, en suite convergeant simplement α-presque partout.

<u>Démonstration</u> : 1) Soient $f_o \in L^1_+(X_1,\mu)$, $h_o = Vf_o$ et $D = \{h_o = +\infty\}$. Considérons le noyau V' défini sur $B(X_1)$ par $V'f = 1_D \cdot \frac{1}{h_o} \cdot V(f.f_o)$.

Le noyau V' est borné, de base μ, l'ensemble $H = \{V'f;\ \|f\| \leq 1\}$ est α-équimesurable et borné pour l'ordre dans $L^1(X_2,\alpha)$, et il en est de même pour l'ensemble $h_o.H$.

2) pour toute mesure $\beta \in \mathfrak{M}^+(X_1)$, β de base μ, l'application $f \mapsto \int f d\beta$ est semi-continue inférieurement sur $L^1_+(X_1,\mu)$, muni de la topologie faible.
Une adaptation du théorème du minimax donne le résultat suivant : Si (β_n) est une suite croissante de mesures ≥ 0 et si $\beta = \sup \beta_n$ alors pour toute partie faiblement compacte $M \subset L^1_+(X_1,\mu)$, on a

$$\sup_n \left(\inf_{f\in M} \int f d\beta_n\right) = \inf_{f\in M} \int f d\beta$$

On a vu précédemment qu'il existe une fonction numérique $G \geq 0$, $(\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2)$-mesurable sur $X_1 \quad X_2$ telle que pour tout $f \in B(X_1)$, tout $y \in X_2$,

$$Vf(y) = \int G(x,y)\ f(x)\ d\mu(x)$$

Définissons alors un noyau V_p de B_1 dans B_2 par la formule

$$V_p f(y) = \int \inf\ (p, G(x,y))\ f(x)\ d\mu(x)$$

et posons $g_M^p = \inf\ \{V_p f;\ f\in M\}$. Si M est faiblement compacte dans $L_+^1\ (X_1, \mu)$, on aura alors $g_M = \sup_p g_M^p$. Montrons que g_M^p est $\mathfrak{B}_2$-mesurable. L espace $L^1(X_1, \mu)$ est à base dénombrable, il existe donc une suite $(f_n) \subset M$, fortement dense dans M et pour toute $\mu' \in \mathfrak{M}^+(X_1)$, $0 \leq \mu' \leq \mu$, on aura

$$\inf\ \{<\mu', f>;\ f \in M\} = \inf <\mu', f_n>.$$

Pour tout p et tout $y \in X_2$ $\varepsilon_y V_p \leq p.\mu$, par suite $g_M^p = \inf_n f V_p f_n$ est $\mathfrak{B}_2$-mesurable.

3) pour tout $y \in X_2$, l'appication $f \to Vf(y) = <\varepsilon_y V, f>$ est s.c.i sur $\underset{\sim}{L}_+^1(X_1\ \mu)$ faible, par suite $\liminf_{\mathfrak{J}} Vf \geq V(\lim_{\mathfrak{J}})$. D'autre part, V étant continu de $L^1(X_1 . \mu)$ dans $L^1(X_2, \alpha)$ le filtre $\mathfrak{U} = V(\mathfrak{J})$ est faiblement convergent vers $V(\lim_{\mathfrak{J}})$. Pour toute partie $M \in \mathfrak{J}$, il existe alors une suite $(h_n) \subset V(M)$ telle que $\inf h_n \leq V(\lim_{\mathfrak{J}})$ α-presque partout et par conséquent $g_M \leq V(\lim_{\mathfrak{J}})$ α-presque partout. Reprenons les noyaux V_p introduits dans la démonstration de la partie 2) de ce théorème.
Soit (M_n) une base du filtre $\mathfrak{J}$ et posons, pour $y \in X_2$,

$$g_n^p(y) = \inf\ \{V_p f(y);\ f \in M_n\}$$

$$g_n(y) = \inf\ \{Vf(y);\ f \in M_n\}$$

Les fonctions g_n^p sont $\mathfrak{B}_2$-mesurables, car si M_n^o est un ensemble dénombrable fortement dense dans M_n, on a $g_n^p = \inf \{V_p f;\ f \in M_n^o\}$.

On a les inégalités:

$$g_n^p \leq g_n \leq V\ (\lim_{\mathfrak{F}}) \quad \alpha\text{-presque partout}$$

et $$\sup_n g_n^p = V_p(\lim_{\mathfrak{F}}),\ \sup_p V_p(\lim_{\mathfrak{F}}) = V(\lim_{\mathfrak{F}}).$$

On en conclut que $\inf_n \int [\ V(\lim_{\mathfrak{F}}) - g_n]\ d\alpha = 0$

4) Reprenons la fonction G sur $X_1 \times X_2$ associée à V dans la question 2) ci-dessus et posons

$$h_o(x) = \int G(x,y)\ d\alpha(y).$$

En raison de la relation $\alpha V \leq \mu$, on a $h_o \leq 1$ μ-presque partout et l'ensemble $H = \{(g.\alpha)V,\ \|g\| \leq 1\}$ est μ-équimesurable, d'après la proposition n°19, le filtre $\mathfrak{F}$ faiblement convergent sur $L_+^1(X_1,\mu)$, vers $f \in L_+^1(X_1,\mu)$, converge uniformément vers f sur H, ou ce qui revient au même, $V(\mathfrak{F})$ converge fortement dans $L^1(X_2,\alpha)$.

5) Soit (f_n) une suite de Cauchy faible dans $L^1(X_1,\mu)$; cette suite converge simplement et on peut trouver une sous-suite $(f'_n) \subset (f_n)$ telle que les suites (f'^+_n) et (f'^-_n) convergent faiblement; on termine alors en utilisant les propriétés 3) ou 4) vérifiées par $\tilde{V}$, puis un résultat classique de Grothendieck. [2].

6) il suffit d'utiliser la propriété 1) de l'énoncé du théorème.

Le théorème qui suit est une légère amélioration du précédent.

Soient $(X_i,\ \mathfrak{B}_i)$ des espaces mesurables i = 1,2,3.

<u>Théorème 22</u> : Soient V, U des noyaux positifs complètement

mesurables de $B(X_1)$ dans $B(X_2)$ et de $B(X_2)$ dans $B(X_3)$ respectivement. On suppose V de base μ et soit $\alpha \in \mathfrak{M}^+(X_2)$ tel que $\alpha W \leq \mu$, avec $W = U_\circ V$.

Alors la propriété 3 du théorème 21 est satisfaite par le noyau W pour tout filtre $\mathfrak{F}$ faiblement convergent dans $L^1_+(X_0,\mu)$.

Démonstration : On sait qu'il existe une suite croissante de noyaux (V_p) de $B(X_1)$ dans $B(X_2)$ telle que $V = \sup_p V_p$ et telle que pour tout $f \in B(X_1)$, $|V_p f| \leq p \int |f| d\mu$.

Le noyau U étant complètement mesurable, il existe une suite $(A_n) \in \mathfrak{B}_2$ telle que:

1°) $A_n \cap A_m = \emptyset$ pour $m \neq n$ et $\alpha(\bigcup_n A_n) = \alpha(X_2)$

2°) L'ensemble $1_{A_n} . U(K_2)$ est compact pour la topologie de la convergence uniforme sur X_3, K_2 étant la boule unité de $B(X_2)$.

On en déduit que pour tout p et tout n, le noyau $W_{n,p} = 1_{A_n} . U_\circ V_p$ est un opérateur positif compact de $L^1(X_0,\mu)$ dans $B(X_3)$, muni de la norme uniforme.

Soit alors $\mathfrak{F}$ un filtre faiblement convergent sur $L^1_+(X_0,\mu)$. Pour tout $M \in \mathfrak{F}$ posons $g^{n,p}_M = \inf \{W_{n,p} f ; f \in M\}$ et $g_M = \inf \{U_\circ V f ; f \in M\}$.

Les fonctions $g^{n,p}_M$ sont $\mathfrak{B}_3$-mesurables et $\inf_{M \in \mathfrak{F}} \|W_{n,p}(\lim_{\mathfrak{F}}) - g^{n,p}_M\| = 0$ ou $\| \ \|$ désigne la norme uniforme de $B(X_3)$. On a encore les inégalités $g^{n,p}_M \leq g_M \leq (U_\circ V)(\lim_{\mathfrak{F}})$ α-presque partout et $(U_\circ V)(\lim_{\mathfrak{F}}) = \sup_{n,p} W_{n,p}(\lim_{\mathfrak{F}})$

On conclut alors comme précédemment que :

$$\inf \int^* [(U_\circ V)(\lim_{\mathfrak{F}}) - g_M] \, d\alpha = 0.$$

Remarque : Le théorème précédent est encore vrai pour des noyaux de la forme $W = \sum_n U_n \circ V_n$ où (U_n) et (V_n) sont des suites de noyaux absolument mesurables positifs.

Caractérisation des opérateurs à noyau.

Soient $(X_1, \mathfrak{B}_1)$, $(X_2, \mathfrak{B}_2)$ des espaces mesurables, $\mu \in \mathfrak{M}^+(X_1)$ $\alpha \in \mathfrak{M}^+(X_2)$

Proposition 24 : Pour un opérateur linéaire continu T de $L^1(X_1,\mu)$ dans $L^1(X_2,\alpha)$, les conditions suivantes sont équivalentes.

a) il existe $G \in \mathcal{L}^1(X_1 \times X_2, \mu \otimes \alpha)$ telle que pour $f \in L^1(X_1,\mu)$, $y \mapsto \int G(x,y)\, f(x)\, d\mu(x)$ soit un élément de $\mathcal{L}^1(X_2,\alpha)$ dont la classe dans $L^1(X_2,\alpha)$ est égale à Tf, autrement dit T est un opérateur à noyau.

b) T transforme toute suite $(f_n) \subset L^1(X_1,\mu) \cap L^\infty(X_1,\mu)$ bornée en norme L^∞, faiblement convergente pour $\sigma(L^1,L^\infty)$, en une suite vérifiant:

$$\liminf T f_n = \limsup T f_n = T(\lim f_n).$$

Démonstration : 1) l'implication a $\Rightarrow$ b a été démontrée dans le cadre du théorème 21.

2) Montrons que b $\Rightarrow$ a. Soit K la boule unité de $L^\infty(X_1,\mu)$; pour tout voisinage faible ω de 0 dans K, on définit :

$$\varphi_n(\omega) = \sup \{ \int \sup (Tf_1,\ldots,Tf_n)\, d\alpha \mid ,f_1,f_2,\ldots,f_n \in \omega\}$$

puis $\varphi(\omega) = \sup_n \varphi_n(\omega)$.

On commencera par remarquer que T est différence de deux opérateurs linéaires positifs continus de $L^1(X_1,\mu)$ dans $L^1(X_2,\alpha)$ ceci de façon très générale dès que T est continu. Puis on remarquera que T(K) est compact fort dans $L^1(X_2,\alpha)$ de sorte qu'on peut supposer les tribus $\mathfrak{B}_1$ et $\mathfrak{B}_2$ à base dénombrable.

Soit alors (ω_p) une suite fondamentale décroissante de voisinages faibles de 0 dans K.

Montrons que l'on a $\inf_p \varphi(\omega_p) = 0$.

Si ce n'était pas le cas, il existerait $\varepsilon > 0$, et pour tout p un ensemble fini A_p tel que

$$\int \sup \{Tf;\ f \in A_p\}\, d\alpha > \varepsilon.$$

Soit alors $(f_n) = \bigcup_p A_p$ une énumération de $A = \bigcup_p A_p$. Par construction la suite (f_n) converge faiblement vers 0 dans K, et par conséquent on devrait avoir $\limsup T f_n = \liminf T f_n = 0$ ce qui est contraire à l'hypothèse faite sur la suite (f_n).

Posons alors, $g_p = \sup \{Tf,\ f \in \omega_p\}$, l'enveloppe supérieure étant prise dans l espace complètement réticulé $L^1(X_2,\alpha)$.

On a vu que $\inf_p \int g_p\, d\alpha = 0$ et $g_{p+1} \leq g_p$.

Pour une sous-suite convenable g_{p_n}, on a :

$$\sum_n \int g_{p_n}\, d\alpha < +\infty \text{ et } g = \sum_n g_{p_n} \in L^1(X_2,\alpha).$$

Comme cela a été déjà fait pour la proposition 13, on remarque que l'ensemble $H = \{\frac{Tf}{g} \mid \|f\|_\infty \leq 1\}$ est essentiellement borné et compact dans $L^\infty(X_2,\alpha)$ avec sa norme usuelle et par suite l'ensemble g.H est nucléaire dans $L^1(X_2,\alpha)$.

Considérons l'opérateur T' de $L^\infty(X_1,\mu)$ dans $L^\infty(X_2,\alpha)$ défini par $T'f = \frac{1}{g} . Tf$.

L opérateur T' est compact et pour toute suite décroissante $(f_n) \subset L^\infty_+(X_1,\mu)$ telle que $\inf f_n = 0$, on a $\inf \|T'f_n\|_\infty = 0$.

Soit alors ρ un relèvement de $L^\infty(X_2,\alpha)$ (cf. Meyer [3]). L'opérateur $V = \rho \circ T'$ est un vrai noyau complètement mesurable, de base μ, il existe alors $G' \in \mathcal{L}^1(\mu \otimes \alpha)$ permettant de représenter T', puis l'on passe aisément à l'opérateur T lui-même.

<u>Applications à la théorie du potentiel.</u>

Soit $(X, \mathfrak{B})$ un espace mesurable, (V_λ) $\lambda \geq 0$, une famille résolvante sous-markovienne de noyaux positifs sur B telle que

$V = V_0$ soit un noyau borné. (cf. Meyer [3]).
On suppose de plus que V est un noyau absolument mesurable de base μ.

<u>Proposition</u> : Le noyau V est σ-compact.

<u>Démonstration</u> : L'équation résolvante $V = V_\lambda + \lambda V_\lambda V$ montre que chacun des noyaux V_λ est absolument mesurable de base μ. Par conséquent le noyau $U_\lambda = \lambda V_\lambda V$ est σ-compact et $\|V_\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda}$.
On peut alors écrire :

$$V = V_1 V + \sum_n (2^n V_{2^n} V - 2^{n+1} V_{2^{n+1}} V)$$

et

$$\|2^n V_{2^n} V - 2^{n+1} V_{2^{n+1}} V\| \leq \frac{1}{2^{n-1}} ,$$

ce qui montre que V est σ-compact car $V_\lambda V = \sum_n U_n$ où les U_n sont des noyaux compacts et ≥ 0.

<u>Corollaire</u> : Pour tout $\alpha > 0$ le noyau V_λ est σ-compact.

<u>Démonstration</u> : Considérer la famille résolvante $(U_\lambda)_{\lambda \geq 0}$ où $U_\lambda = V_{\lambda+\alpha}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Grothendieck : Espaces vectoriels topologiques; cours de Saô-Paulo.

[2] A. Grothendieck : Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires; Memoirs of the American Math. Society.

[3] P. A. Meyer : Probabilités et potentiels; Hermann, Paris.

[4] G. Mokobodzki : Noyaux absolument mesurables et opérateurs nucléaires; Note aux C. R. Acad. Sc. Paris Tome 270, Série A, n°25 (22 Juin 1970) .