L. Boutet de Monvel

Utilisation des opérateurs pseudo-différentiels et des opérateurs trace dans certains problèmes aux limites (suite)

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1971-1972), exp. n° 3, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1971-1972____A3_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11 77
(633)

SEMINAIRE GOULAOUIC-SCHWARTZ 1971-1972

UTILISATION DES OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS ET DES OPERATEURS TRACE DANS CERTAINS PROBLEMES AUX LIMITES

(Suite)

par L. BOUTET DE MONVEL

Exposé N° III

26 Octobre 1971

§ 2. OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS

Nous nous plaçons toujours dans le demi-espace $R^n_+ = X$, et nous notons la variable $x = (y,t)$, avec $y \in R^{n+1}$, $t > 0$. Mais tout ce qui suit reste vrai pour une variété à bord C^∞, avec quelques modifications évidentes.

1. Propriété de transmission.

Soit P un opérateur pseudo-différentiel défini sur R^n (ou au moins au voisinage du demi-espace fermé $\bar{R}^n_+$).

Nous noterons $\mathcal{D}(\bar{R}^n_+)$ l'espace des fonctions à support compact dans le demi-espace fermé $\bar{R}^n$ dont chaque dérivée (définie dans le demi espace ouvert) se prolonge continûment au demi-espace fermé.

Si $f \in \mathcal{D}(\bar{R}^n_+)$, nous noterons $\tilde{f}$ la fonction qui prolonge f par 0 pour tout $t < 0$.

Nous définissons l'opérateur $P_X : \mathcal{D}(\bar{R}^n_+) \to \mathcal{D}'(R^n_+)$ par

$$P_X(f) = P(f) / R^n_+ \qquad (/ \text{ désigne la restriction}).$$

Nous dirons que P a la propriété de transmission s'il se décompose en une somme :

$$P = P_1 + P_2 + R \tag{2.1}$$

où R est un opérateur à noyau C^∞, P^2 est indéfiniment divisible à gauche par t, autrement dit pour tout N il existe un opérateur pseudo-différentiel P^N (de même ordre que P_2) tel que $P_2 \;\; t^N P^N$, et P_1 est défini par une intégrale de Fourier :

$$P_1(u) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix.\xi} \hat{u}(\xi)\, d\xi$$

où la fonction $p(x,\xi)$ admet la décomposition en série :

$$(2.2) \qquad p(x,\xi) = \sum_{k=o}^{m} a_k(x,\xi)\,\xi^k + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k(x,\xi) \frac{(<\eta> + i\tau)^k}{(<\eta> - i\tau)^{k+1}} \quad (\bullet) \; .$$

Ici m est l'ordre de P ; les a_k sont des symboles de degré m-k, et les b_k forment une suite à décroissance rapide de symboles de degré m+1 (on a noté η la variable duale de y, et τ celle de t ; et on a posé $<\eta> = \sqrt{1+|\eta|^2}$).

La propriété de transmission est une condition nécessaire et suffisante pour que P_X soit en fait continu : $\mathcal{D}(\bar{R}^n_+) \to C^\infty(\bar{R}^n_+)$ (autrement dit si $f \in \mathcal{D}(\bar{R}^n_+)$, $P_X f$ est une fonction C^∞ dans le demi-espace ouvert, dont toutes les dérivées se prolongent continûment au demi-espace fermé).

P_X se prolonge alors continûment : $H^s_{comp}(R^n_+) \to H^{s-m}_{loc}(R^n_+)$ pour $s > -1/2$. (cf. [3]).

2. Opérateurs de Poisson.

On appelle ainsi un opérateur K qui à $u \in \mathcal{D}(R^{n-1})$ fait correspondre $P(u\,\delta(t))/R^n_+$, où P a la propriété de transmission comme au N° 1. ($u\,\delta\,(t)$ désigne le produit tensoriel de la fonction $u(y)$ par la masse de Dirac $\delta(t)$; c'est donc une mesure portée par le bord R^{n-1}, de densité C^∞ par rapport à la mesure de Lebesgue du bord). Un tel opérateur a la propriété suivante : il est en fait continu : $\mathcal{D}(R^{n-1}) \to C^\infty(\bar{R}^n_+)$, et il se prolonge continûment de $\mathcal{E}'(R^{n-1})$ dans l'espace $\mathcal{D}'(R^{n-1}) \hat{\otimes} C^\infty(R)$ des distributions qui dépendent de façon C^∞ de t (cf. [3], [4]). En particulier, pour toute distribution $u \in \mathcal{E}'(R^{n-1})$ on a $K(u) \in E_\infty$.

K se prolonge aussi continûment : $H^s_{comp}(R^{n-1}) \to H^{s-m+1/2}_{loc}(\bar{R}^n_+)$ pour tout s (cf. [3]), si degré (K) = degré (P) + 1 = m.

($\bullet$) Ceci exprime de façon précise que $p(\eta,\tau)$, considérée comme fonction de τ seule, se comporte comme une fonction méromorphe à l'infini.

On peut montrer qu'il se prolonge aussi continûment :

$$H^{-k-1/2}_{comp}(R^{n-1}) \to t^{-m-k} L^2_{loc}(\bar{R}^n_+) \qquad \text{(cf. [5])}.$$

3. Opérateurs trace.

On appelle ainsi un opérateur T qui à $f \in \mathcal{D}(\bar{R}^n_+)$ fait correspondre $QP_X(f)/R^{n-1}$, où Q est un opérateur pseudo-différentiel sur le bord R^{n-1}, et P un opérateur pseudo-différentiel qui a la propriété de transmission comme au N° 1.

Un tel opérateur peut toujours se mettre sous la forme

$$T = {}^tK + \sum_{j=o}^{N} Q_j \, \gamma_j$$

où K est un opérateur de Poisson, Q_j un opérateur pseudo-différentiel sur le bord R^{n-1} $(j = 1,2,\ldots,m)$, et γ_j est l'opérateur qui à une fonction C^∞ fait corresponder la trace de sa dérivée normale j-ième.

Il est continu : $\mathcal{D}(\bar{R}^n_+) \to C^\infty(R^{n-1})$ et se prolonge continûment $H^s_{comp}(R^n_+) \to H^{s-m-1/2}_{loc}(R^{n-1})$ si m = degré(T) (= degré (Q) + degré (P) dans la définition ci-dessus), pour s assez grand.

Nous dirons que T est de classe k s'il se prolonge continûment : $E_k \to \mathcal{D}'(R^{n-1})$. En particulier nous dirons qu'il est de classe $-\infty$ s'il se prolonge continûment à E_k pour tout k : pour celà il faut et il suffit (cf. [5]) que T soit adjoint d'un opérateur de Poisson et soit indéfiniment divisible par t, autrement dit pour tout N il existe un opérateur de Poisson K_N (de degré N + degré (T) - 1) tel que $T = t^N \, {}^tK_N$.

Si T est de classe $-\infty$, il se prolonge continûment à l'espace $\mathcal{D}'_{pr}(R^n_+)$ des distributions à support relativement compact dans le demi-espace fermé et qui se prolongent à l'espace R^n tout entier.

Il se prolonge aussi continûment : $H^s_{comp}(R^n_+) \to H^{s-m-1/2}_{loc}(R^{n-1})$ pour tout s, et aussi :

$$t^{-k} L^2_{comp}(R^n_+) \to H^{-m-k-1/2}(R^{n-1})$$

(cf. [5] ; ces assertions sont à peu de choses près les transposées des assertions ci-dessus pour les opérateurs de Poisson).

4.

Enfin on appelle opérateur de Green singulier la somme d'une série $G = \Sigma K_p \circ T_p$, où K_p et T_p sont deux suites à décroissance rapide d'opérateurs de Poisson (resp. opérateurs trace).

L'intérêt de ces opérateurs est le suivant : l'opérateur qui décrit un problème aux limites s'exprime au moyen de ces opérateurs, la paramétrix aussi quand il s'agit d'un problème elliptique ; en outre l'ensemble des opérateurs A sur $\mathcal{D}(\bar{R}^n_+) \oplus \mathcal{D}(R^{n-1})$ de matrice :

$$A = \begin{pmatrix} P_X+G & K \\ T & Q \end{pmatrix}$$

(où P, G, K, T sont comme aux N° 1, 2, 3, 4 ci-dessus, et Q est un opérateur pesudo-différentiel sur la bord) est une "algèbre" autrement dit le composé de deux tels opérateurs en est un autre.

Cette affirmation contient plusieurs assertions sur la façon dont les divers opérateurs introduits jusqu'ici se composent entre eux. La plus substantielle est la suivante : si P^1 et P^2 sont deux opérateurs pseudo-différentiels (et s'ils ont la propriété de transmission), alors l'opérateur $P^1_X \circ P^2_X - (P^1P^2)_X$ est un opérateur de Green singulier, de degré degré (P^1) + degré (P^2) exactement. Tout ceci est démontré dans [4].

(Ces opérateurs donnent lieu à un calcul symbolique, un peu analogue à celui des opérateurs pseudo-différentiels, mais plus compliqué. Nous ne le décrivons pas ici. L'idée est en gros de faire une transformation de Fourier partielle par rapport à la variable tangentielle, et de se ramener ainsi à une équation différentielle dépendant d'un paramètre dans le cas de l'opérateur décrivant un problème aux limites aux dérivées partielles, et à un problème de Wiener-Hopf dans le cas général).

5.

Revenons maintenant au problème aux limites : soit A un opérateur différentiel (ou un système d'opérateurs différentiels) et soient B_j des opérateurs différentiels définis près du bord.

Considérons le problème aux limites :

$$(*) \qquad \begin{cases} A\,f = g & \text{(à l'intérieur)} \\ B_j f = u_j & \text{(sur le bord)}\ (j = 1,2,\dots,\mu). \end{cases}$$

Supposons A de degré m, et limitons-nous à la recherche de solutions prolongeables. Si g est dans l'espace E_k, de toute solution de l'équation $A\,f = g$ est dans l'espace E_{k+m} d'après la proposition 1.6 du N° 1 (pourvu que le bord soit non caractéristique). Si B_j est d'ordre m_j, et si on a $m_j \leq k+m$ pour tout j, les $B_j f/R^{n-1}$ sont bien définis, et on a donné un sens au problème. Il convient de remarquer que la condition porte sur g seul, et qu'elle dépend seulement des ordres des opérateurs A, B_j.

Si le problème (*) est elliptique, il possède une parametrix .

$$f = ((A^{-1})_X + G + K_j u_j + R(f)$$

où A^{-1} désigne une parametrix de A (au voisinage du demi-espace fermé)

G est un opérateur de Green singulier, et les K_j sont des opérateurs de Poisson. On vérifie immédiatement que si R (et G) a été choisi de façon à ne pas faire intervenir de trace de dérivée normale qui ne figure pas déjà dans le problème (*), cette parametrix se prolonge continûment : $E_k \oplus (\mathcal{D}(R^{n-1}))^{\mu} \to E_{k+m}$ si $k \geq m - \sup m_j$.

Le théorème suivant précise ce résultat ; il est démontré dans [5].

2.3 Théorème : Soit P un opérateur pseudo-différentiel de degré m , qui a la propriété de transmission. Alors P se prolonge continûment $\mathcal{E}_k \to E_{k-m}$.

(Rappelons que $\mathcal{E}_k$ est un espace de distributions sur R^n, à support dans le demi-espace fermé : de sorte que si $f \in \mathcal{E}_k$, P f et la restriction Pf/R^n_+ sont bien définis).

Nous ne démontrons pas ici le théorème, et nous nous contenterons de donner des indications dans le cas d'une variable.

P admet une décomposition : $P = P_1 + P_2 + R$ comme au N° 1 : l'assertion du théorème est évidente pour R qui transforme toute distribution en une fonction C^∞ ; et elle est facile pour P_2 qui transforme toute distribution en un élément de E_∞ (nul à l'ordre infini au bord). Dans le cas $n = 1$, P_1 admet une représentation par intégrale de Fourier :

$$P_1 u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{it\xi}\, p(t,\xi)\, \hat{u}(\xi)\, d\xi$$

où la fonction $p(t,\xi)$ admet la décomposition en série (2.2). A la partie polynômiale de p correspond un opérateur différentiel à coefficients C^∞ qui vérifie l'assertion du théorème. A la série infinie de (2.2) correspond un opérateur :

$$L(u) = \int F(t,s)\, u(s)\, ds$$

où la fonction F est C^∞ de part et d'autre de la diagonale, et n'a que des sauts de première espèce le long de la diagonale $t = s$, ainsi que de chacune de ses dérivées. Et il est immédiat de vérifier que cet opérateur a la propriété annoncée dans le théorème.

En particulier si P est de degré 0, si f est continue (resp. ou admet une discontinuité de première espèce à l'origine), il en est de même de Pf.

(En général un opérateur pseudo-différentiel ne préserve pas la continuité ; il en est ainsi par exemple de la convolution par la distribution vp $1/x$, qui ne préserve ni de la continuité, ni l'espace L^1, ni l'espace L^∞. Quand on impose la propriété de transmission, on élimine tous les opérateurs analogues à la convolution par vp $1/x$).

Dans le cas général ($n \geq 2$) il est faux que P respecte la continuité (quand il est de degré 0). Cependant il respecte la continuité partielle par rapport à t (i.e. si T est définie par une fonction continue : $t \mapsto f(y,t) \in \mathcal{D}'(R^{n-1})$, il en est de même de Pf), il respecte aussi une discontinuité de première espèce par rapport à t (i.e. si T est définie par une fonction $t \mapsto f(y,t) \in \mathcal{D}'(R^{n-1})$, continue sauf à l'origine où elle a une discontinuité de première espèce en tant que fonction à valeurs distributions, il en est de même de Pf). Ceci est presque une version "avec paramère" du cas $n = 1$. A partir de ce résultat, on prouve facilement le théorème par des manipulations formelles -par exemple commutation de P et de $t^k(d/dt)^l$.

<u>Exemple</u> : considérons les équations de Navier Stokes linéarisées :

$$(2.4) \qquad \begin{cases} \Delta F + \operatorname{grad} p = G \\ \operatorname{div} p = q \end{cases}$$

(F, G sont des fonctions à valeurs dans R^3, p et q des fonction numériques).

Ce système est elliptique au sens de Agmon, Douglis et Nirenberg. et on obtient un problème aux limites elliptique (au sens de Agmon, Douglis et Niremberg) en adjoignant la condition limite :

$F = F_0$ pour $t = 0$ (t est une des trois variables de R^3).

Or le système d'opérateurs qui décrit (2.4) possède une paramétrix de la forme

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} B_{-2} & C_{-1} \\ D_{-1} & E_0 \end{pmatrix}$$

où B, C, D, E sont des opérateurs pseudo-différentiels de degrés respectifs -2, -1, -1, 0.

De sorte que si $G \in E_{-2}$ et $q \in E_{-1}$ on a $F \in E_0$ et $p \in E_{-1}$ pour toute solution prolongeable de (2.4), et le problème aux limites a un sens ; sa solution est alors donnée par les mêmes formules que dans le cas où G et q sont assez régulières.

6. Utilisation d'opérateurs trace

On peut, pour étudier un problème aux limites tel que (*) (quand l'opérateur A est elliptique), commencer par étudier le problème

$$(**) \qquad \begin{cases} Af = g & \text{(à l'intérieur)} \\ T_j f = u_j & \text{(sur le bord)} \end{cases}$$

(on n'a pas changé l'opérateur A, mais on a modifié les conditions limites). On est alors amené, pour comparer la solution (*) à celle de (**) à résoudre un système d'équations pseudo-différentielles sur le bord. Il peut être intéressant dans le problème (**) de choisir les T_j de classe $-\infty$: il n'y a alors aucune condition sur g pour que le problème ait un sens. Qu'un tel choix soit possible résulte de la proposition suivante :

2.9 <u>Proposition</u> : Soit A un opérateur elliptique (ou un système elliptique). Il existe des opérateurs trace T_j $(j = 0,1,\dots)$ de degré j et de classe $-\infty$ tels que pour toute solution f de $Af = 0$, on ait

$\gamma_j f = \dfrac{\partial^j f}{\partial t^j} \Big/_{t=0} = T_j f + R_j f$ où R_j est un opérateur à noyau C^∞.

Je ne démontre pas ici la proposition, qui résulte simplement du calcul symbolique des opérateurs trace. Dans le cas $n = 1$, la proposition se réduit à l'assertion évidente suivante : si A est un opérateur différentiel d'ordre m, et si 0 est point régulier de A (le coefficient de $(d/dt)^m$ est non nul à l'origine) alors pour tout j il existe une fonction $\varphi_j \in \mathcal{D}(R_+)$ telle que pour toute solution f de l'équation $Af = 0$ on ait

$$f^{(j)}(0) = \int_0^\infty f(t)\, \varphi_j(t)\, dt .$$

L'assertion de la proposition (2.5) est encore vraie quand A est un opérateur strictement hyperbolique dans la direction de t. On le voit dans ce cas en représentant les solutions de $Af = 0$ par des opérateurs Fourier-intégraux du type décrit par Hörmander (cf. [6], [7]). Je ne sais pas ce qui en subsiste dans le cas général (où le bord est non caractéristique).

Le N° 5 et la proposition (2.5) permettent de ramener un bon nombre de questions concernant la régularité de la solution de (*) à des questions de continuité des opérateurs pseudo-différentiels, trace etc... dans des espaces H^s, ou H^s avec poids, ou dans des espaces de type L^p, souvent faciles à démontrer.

Pour illustrer ceci, et terminer cet exposé, je redémontre le résultat connu suivant :

Soit A un opérateur elliptique (ou un système elliptique). Les trois assertions suivantes sont équivalentes pour une solution f de $Af = 0$:

(i) $f \in H^{-s}$ (au voisinage de tout point du bord) (avec $s > 0$)

(ii) $t^s f \in L^2$ (au voisinage de tout point du bord)

(iii) $\gamma_j f \in H^{-s-1/2-j}$ (au voisinage de tout point du bord).

Que (i) ou (ii) implique (iii) résulte du fait que pour les solutions de $Af = 0$, on a $\gamma_j f = T_j f$ (mod. une fonction C^∞), où T_j est un opérateur trace de degré $-j$, de classe $-\infty$, donc continu de H^{-s} ou de $t^{-s}L^2$ dans $H^{-s-j-1/2}$.

Que (ii) implique (i) ou (ii) résulte du fait que si f est solution de $Af = 0$, les $\gamma_j f$ sont bien définis, et on a $f = \Sigma K_j \gamma_j f$ (mod. une fonction C^∞), où K_j est un opérateur de Poisson de degré $-j$, et des propriétés de continuité des opérateurs de Poisson rappelés au N° 2.

(Une telle représentation par opérateurs de Poisson de f est obtenue comme suit : pour les distribution $f \in E_{m-1}$ (où m est le degré de A) on a la formule de Green :

$$A(\tilde{f}) = \widetilde{A(f)} + \Sigma B_{jk}(\gamma_j f)\, \delta^{(k)}(t)$$

où B_{jk} est un opérateur différentiel de degré $m-j-k-1$, et $\tilde{u}$ désigne le prolongement de u par 0 pour $t < 0$.

Alors si $Af = 0$, et si A^{-1} est une parametrix de A, on a $f = \Sigma A^{-1}(B_{jk}\, \gamma_j f\, \delta^{(k)}(t)) + R(f)$ où R est un opérateur à noyau C^∞. Or l'opérateur qui à u fait correspondre $A^{-1}(B_{jk} u\, \delta^{(k)}(t))$ est un opérateur de Poisson de degré $-j-k$).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Baouendi M. S. et Geymonat G. : Résultats de dualité dans les problèmes aux limites elliptiques, à paraître dans J. Diff. Equations et C. R. Acad. Sc. Paris 270 (1970), 370-373.

[2] Baouendi M. S. et Geymonat G. : conférence au congrès sur les équations hypoelliptiques, C. I. M. Rome 1971 (à paraître dans les Symposia Mathematica).

[3] Boutet de Monvel L. : Comportement d'un opérateur pseudo-différentiel sur une variété à bord, I et II, J. d'Analyse (Jérusalem) 26 (1966), 241-304.

[4] Boutet de Monvel L. : Boundary problems for pseudo-differential operators, Acta Math. 126 (1971), 11-51.

[5] Boutet de Monvel L. et Geymonat G. : Solutions irrégulières d'un problème aux limites elliptique (C. I. M. Rome 1971), à paraître dans Symposia Mathematica.

[6] Hörmander L. : The spectral function of an elliptic operator. Acta Math. 121 (1968), 193-218.

[7] Hörmander L. : Fourier integral operators I, Acta Math. 127 (1971), 79-182.

[8] Lions J. L. et Magenes E. : Remarques sur les problèmes aux limites elliptiques, C. R. Acad. Nat. dei Lincei, ser. 8, 32, 6 (1962), 873-883.

[9] Lions J. L. et Magenes E. : Problèmes aux limites non homogènes et applications, Dunod (Paris).

[10] Lojasiewicz S. : Sur la valeur et la limite d'une distribution en point, Studia Math. 16 (1957), 1-36.