Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

C. Bardos

Prolongements maximaux positifs d'opérateurs positifs et problèmes de perturbations singulières

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1971-1972), exp. n° 26, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1971-1972____A26_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

SEMINAIRE GOULAOUIC-SCHWARTZ 1971-1972

PROLONGEMENTS MAXIMAUX POSITIFS D'OPERATEURS POSITIFS ET PROBLEMES DE PERTURBATIONS SINGULIERES

par C. BARDOS

Exposé N° XXVI

3 Mai 1972

On désignera par H un espace de Hilbert, on note $(\, , \,)$ et $| \, . \, |$ le produit scalaire et la norme sur H. On considèrera un opérateur B non borné de domaine D(B) dense dans H, et on supposera que B est strictement positif ; c'est-à-dire que l'on a $\mathrm{Re}(Bu,u) \geq \delta |u|^2$, $\forall\, u \in D(B)$. Il existe alors au moins un opérateur $\mathfrak{B}$ maximal positif prolongeant B, et on sait que pour que $\mathfrak{B}$ soit maximal positif il faut et il suffit que, pour tout λ $(\mathrm{Re}\,\lambda > 0)$, $\lambda + \mathfrak{B}$ soit un isomorphisme de $D(\mathfrak{B})$ sur H. Soit d'autre part A un opérateur maximal positif, de domaine D(A) ; on suppose que A domine fortement B (cf. Kato [8], P. 190), alors, pour tout $\varepsilon > 0$, $(\varepsilon A + B)$ est un opérateur maximal (strictement) positif. On se propose de faire tendre ε vers zéro, et de montrer que dans certains cas $(\varepsilon A + B)$ converge vers un prolongement maximal $\mathfrak{B}$ de B, ou plus précisément que $(\varepsilon A + B)^{-1}$ converge vers $\mathfrak{B}^{-1}$.

Bien entendu, si $\mathfrak{B}$ est maximal positif, $-\mathfrak{B}$ est générateur d'un semi-groupe fortement continu à contraction dans H. On peut alors montrer que si $(\varepsilon A + B)^{-1}$ converge vers $\mathfrak{B}^{-1}$, $u_\varepsilon(t)$, solution du problème d'évolution $u'_\varepsilon + (\varepsilon A + B)u_\varepsilon = f$ $(t > 0)$, $u_\varepsilon(0) = u_0$, converge vers u solution du problème $u' + \mathfrak{B}u = f$, $u(0) = u_0$ (cf. Kato [8], ou dans un cadre plus général Fattorini [6]).

Si on prend pour espace H l'espace $(L^2(\Omega))^m$ où Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et pour opérateur B un opérateur différentiel formellement positif, (on posera $D(B) = (\mathcal{D}(\Omega))^m$), construire des prolongements maximaux revient à déterminer des familles de conditions aux limites rendant l'opérateur maximal positif, (ou telles que le problème $\lambda u + Bu = f$ soit bien posé, lorsque u vérifie ces conditions aux limites). De même si A est défini par un opérateur différentiel d'ordre plus élevé, il apparaîtra des conditions aux limites supplémentaires pour la solution de l'équation $\varepsilon A u_\varepsilon + B u_\varepsilon = f$ et le problème consiste à étudier ce que deviennent ces conditions lorsque ε tend vers zéro, on retrouve ici l'aspect perturbations singulières. Enfin si $\overline{B}_{|D(A)}$ est un opérateur maximal positif il est évident (cf. Trotter [12]) que

$(\varepsilon A+B)^{-1}$ converge vers $(\overline{B}_{|D(A)})^{-1}$: aussi ce cas trivial sera écarté dans la suite. On remarque que lorsque ε tend vers zéro, u_ε solution de l'équation $\varepsilon A u_\varepsilon + B u_\varepsilon = f$ est uniformément borné ($|u_\varepsilon| \le \frac{1}{\delta}|f|$), on en déduit alors le théorème très faible suivant :

<u>Théorème 1</u> : <u>On suppose que</u> $D(A^*) \cap D(B^*)$ <u>est dense dans</u> H, <u>alors il existe une suite</u> ε_n <u>convergeant vers zéro et un opérateur</u> $\mathfrak{B}$ <u>prolongement maximal positif de</u> B <u>tel que</u> $(\varepsilon_n A+B)^{-1}$ <u>converge dans</u> $\mathcal{L}(H)$ <u>faible vers</u> $\mathfrak{B}^{-1}$.

<u>Démonstration</u> : On pose $\mathfrak{J}_\varepsilon = (\varepsilon A+B)^{-1}$, $\mathfrak{J}_\varepsilon$ est une famille d'opérateurs équibornés par $\frac{1}{\delta}$, on utilise ensuite la faible compacité de la boule unité de $\mathcal{L}(H)$ pour construire une application $\mathfrak{J}$ et une suite $\mathfrak{J}_{\varepsilon_n}$ telle que $\mathfrak{J}_{\varepsilon_n}$ converge dans $\mathcal{L}(H)$ faible vers $\mathfrak{J}$. De la relation

$$(1) \qquad (f,v^*) = (\varepsilon_n A u_{\varepsilon_n} + B u_{\varepsilon_n}, v^*) = (u_{\varepsilon_n}, A^* v^* + B^* v^*)$$

$$= (\mathfrak{J}_{\varepsilon_n}(u), A^* v^* + B^* v^*) \qquad \forall\, v^* \in D(A^*) \cap D(B^*))$$

on déduit, par passage à la limite, que $\mathfrak{J}$ est injective. On définit alors $\mathfrak{B}$ en posant $D(\mathfrak{B}) = \mathfrak{J}(H)$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{J}^{-1}$. Montrons que $\mathfrak{B}$ est positif et prolonge B. On a, pour tout $u \in D(\mathfrak{B})$ $(u = \mathfrak{J}f)$, les relations

$$(2) \qquad \mathrm{Re}(\mathfrak{B}u,u) = \mathrm{Re}(f,\mathfrak{J}f) = \lim_{\varepsilon_n \to 0} (f, \mathfrak{J}_{\varepsilon_n}(f))$$

$$= \lim_{\varepsilon_n \to 0} \mathrm{Re}(f, u_{\varepsilon_n}) \ge 0 .$$

D'autre part, pour tout $u \in D(A)$, on a la relation :

$$(3) \qquad \varepsilon A(u_\varepsilon - u) + B(u_\varepsilon - u) = \varepsilon A u ,$$

dont on déduit que $u_{\varepsilon_n} = \mathfrak{J}_{\varepsilon_n}(Bu)$ converge vers u, soit que $\mathfrak{J}(Bu) = u$, ce qui prouve que $\mathfrak{J}^{-1}$ prolonge B.

Voici une première classe d'exemples où les résultats sont assez forts, en raison des hypothèses faites sur B. On dit qu'un opérateur B de domaine D(B) est sectoriel s'il vérifie la relation $|\operatorname{Im}(Bu,u)| \leq c \operatorname{Re}(Bu,u) \ \forall\, c>0$. On sait alors qu'il existe un unique espace de Hilbert V tel que : (i) $D(B) \subsetneq V \subsetneq H$, chaque espace étant dense dans le suivant,

(ii) l'opérateur B linéaire continu de D(B) dans H se prolonge en un opérateur $\hat{B}$ linéaire continu de V dans V* antidual de V. En injectant canoniquement H dans V*, on définit la restriction de $\hat{B}$ à H. $\hat{B}_{|H}$ (également noté $\hat{B}$) est alors un prolongement maximal positif de B. Ce procédé s'appelle l'extension de Friedrichs, il est décrit dans Dunford-Schwartz [4], p.1240, et pour B non symétrique dans Faris [5]. On a alors le résultat suivant :

Proposition 1 : On suppose que B (défini sur D(A)) est sectoriel, on désigne par V et $\hat{B}$, l'espace de Hilbert et l'opérateur canoniquement associés à B par l'extension de Friedrichs. Alors :

(i) Si B est strictement positif et si $D(A) \cap D(A^*)$ est dense dans H, $(\varepsilon A + B)^{-1}$ converge dans $\mathcal{L}(H,V)$ fort vers $\hat{B}$.

(ii) Si A est auto-adjoint et B symétrique, pour tout $\delta > 0$, $(\varepsilon A + i B + \delta)^{-1}$ converge vers $(i \hat{B} + \delta)^{-1}$.

On trouvera les démonstrations de ces résultats, qui généralisent un peu les résultats usuels sur les perturbations singulières (Huet [7], Lions [10]), dans [3]. Voici des exemples d'application :

Exemple 1 : u_ε solution du problème $\varepsilon \Delta^2 u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon + u_\varepsilon = f$, $u_\varepsilon|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} = 0$, converge dans $H_0^1(\Omega)$ vers u solution du problème $-\Delta u + u = f$; de même $u_\varepsilon(t)$ $(t>0)$ solution du problème $u'_\varepsilon + \varepsilon \Delta^2 u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon = 0$, $u_\varepsilon(0) = u_0$, $u_\varepsilon|_{\partial\Omega\times \mathbb{R}_+} = \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu}|_{\partial\Omega\times\mathbb{R}_+} = 0$, converge vers u(t) solution du problème $u' - \Delta u = 0$, $u|_{\partial\Omega\times\mathbb{R}_+} = 0$, $u(0) = u_0$.

Exemple 2 : u_ε solution du problème

$\varepsilon\Delta^2 u_\varepsilon - i\Delta u_\varepsilon + u_\varepsilon = f$, $u_\varepsilon|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial\nu}|_{\partial\Omega} = 0$, converge dans $H_0^1(\Omega)$ vers u solution du problème $-\Delta u + u = f$: de même $u_\varepsilon(t)$ $(t > 0)$ solution du problème $u'_\varepsilon + \varepsilon\Delta^2 u_\varepsilon - i\Delta u_\varepsilon = 0$, $u_\varepsilon|_{\partial\Omega\times\mathbb{R}_+} = 0$, $u_\varepsilon(0) = u_0$ converge vers u solution du problème $u' - i\Delta u = 0$. $u|_{\partial\Omega\times\mathbb{R}_+} = 0$, $u(0) = u_0$.

Cet exemple est remarquable, car on voit que la régularité de l'opérateur $i\Delta$ permet de passer d'un problème d'évolution défini pour $t > 0$ à un problème d'évolution défini pour tout t. On approche le générateur d'un groupe unitaire par celui d'un semi-groupe analytique. Dans les exemples qui vont suivre, cette circonstance ne se produira plus, bien qu'on parte d'opérateurs antisymétriques, ou presque antisymétriques.

On se place maintenant dans l'espace $H = (L^2(\Omega))^m$ et on considère un opérateur différentiel B défini dans $(\mathcal{D}(\overline{\Omega}))^m$ par $Bu = \sum_{i=1}^n A_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$, où les Ai désignent des matrices hermitiennes de classe C^1. Si u et v appartiennent à $(\mathcal{D}(\overline{\Omega}))^m$, on peut écrire la formule de Green

$$(3) \qquad (\sum_{i=1}^n A_i \frac{\partial u}{\partial x_i}, v) = -(u, \sum_{i=1}^n A_i \frac{\partial v}{\partial x_i}) + (u, \operatorname{div} A\, v) + \int_{\partial\Omega} (\nu \,.\, Au, v)\, d\sigma^{\blacklozenge} .$$

Il est alors évident que, pour $\lambda > 0$ assez grand, $\lambda + B$ définit sur $(\mathcal{D}(\Omega))^m$ un opérateur positif, soit $\mathfrak{B}$ un prolongement maximal de B, on montre que l'on a :

$$D(\mathfrak{A}) \subset \{u \in H \mid Bu \in H\}, \quad \mathfrak{A}u = \lambda u + Bu .$$

Ainsi les conditions qui rendent maximal positif l'opérateur $\mathfrak{A}$ sont des conditions maximales rendant positive l'expression $\int_{\partial\Omega} (\nu \,.\, Au, u)\, d\sigma$, si

---

♦ $\operatorname{div} A = \sum_{i=1}^n \frac{\partial A_i}{\partial x_i}$, $\nu \,.\, A = \sum_{i=1}^n \nu_i \,.\, A_i$.

on cherche des conditions locales, on est amené à introduire les sous-espaces maximaux rendant positif la matrice $.A$. On dira qu'un sous-espace $M \subset \mathbb{C}^m$ est positif s'il vérifie la relation $(\nu A \xi, \xi) \geq 0 \quad \forall\, \xi \in M$, il est dit maximal positif si tout sous-espace M' tel que $M \subset M'$ $\mathbb{C}^m$ contienne un vecteur tel que $(\nu A \eta, \eta) < 0$. En diagonalisant la matrice $\nu.A$, on introduit des sous-espaces M_+. M_-, $M_0 = \operatorname{Ker} \nu A$ correspondant aux valeurs propres positives négatives ou nulles. Bien entendu $M_+ \oplus M_0$ fournit un exemple de sous-espace maximal. on en verra d'autres, néanmoins on remarque les propriétés suivantes :

(i) Tout sous-espace maximal positif M contient M_0 et vérifie la relation $\dim M_+ + \dim M_0 = \dim M$.

(ii) Les projecteurs orthogonaux P_+, P_0 et P_- sur M_+, M_0, M_-, commutent avec $\nu.A$. On peut d'ailleurs montrer que $M_+ \oplus M_0$ est l'unique sous-espace maximal positif tel que P projection orthogonale de $\mathbb{C}^m$ sur $M_+ \oplus M_0$ commute avec $\nu.A$.

Remarquons enfin que si $u \in M$ vérifie $Bu \in H$, il en est de même de φu, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Il est alors commode de localiser la relation $Bu = f$ au voisinage de tout point $x_0 \in \partial\Omega$; puis en supposant $\partial\Omega$ régulière au voisinage de x_0 , d'introduire un voisinage θ de x_0 dans $\mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme T possédant les propriétés suivantes :

(i) $T(\theta \cap \Omega) \subset \{y = (\hat{y}, y_n) \mid 0 < y_n < 1\}$

(ii) $T(\theta \cap \partial\Omega) \subset \{y = (\hat{y}, 1)\}$

(iii) sur $\partial\Omega$ $\quad \dfrac{\partial T_n}{\partial x_i} = \nu_i$.

L'opérateur $\Sigma A_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ se transforme alors en l'opérateur

$$\nu_T \cdot A \frac{\partial}{\partial y_n} + \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{A}_i \frac{\partial}{\partial y_i} .$$

On dira que x_0 est <u>régulier</u> si T peut être choisi de manière à ce que les projections orthogonales sur les sous-espaces canoniques. positifs, négatifs ou nuls de $\nu_T A$ soient de classe C^1 ◆. cela entraîne

---

◆ ou C^s lorsque cela sera nécessaire.

en particulier que ces sous-espaces sont de dimension constante au voisinage de tout point régulier.

Proposition 2 : Soit $u \in H$, vérifiant la relation $Bu \in H$, alors au voisinage de tout point régulier, on peut définir la trace de u sur les sous-espaces canoniques positif et négatif de $\nu.A$ (dans $H^{-1/2}(\partial(\Omega))$). De plus si M est un sous-espace maximal positif, variant régulièrement (cf. [3]), on peut donner un sens à l'expression $u_{|\partial\Omega} \in M$, au voisinage de tout point régulier.

Démonstration : En désignant par $P^T_{\pm}$ le projecteur orthogonal sur les sous-espaces maximaux positif et négatif de $\nu_T A$, on écrit la relation :

(4)
$$P^T_{\pm}\left(\nu_T A \frac{\partial u}{\partial y_n} + \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{A}i \frac{\partial u}{\partial y_i}\right)$$
$$= \nu_T A \frac{\partial P^T_{+} u}{\partial y_n} + P^T_{\pm}\left(\sum_{i=1}^{n} \tilde{A}i \frac{\partial u}{\partial y_i}\right) - \frac{\partial P^T_{+}}{\partial y_n} \Gamma A u .$$

Comme $\nu_T A$ restreint à $P^T_{\pm}(\mathbb{C}^m)$ est continûment inversible on en déduit que $\frac{\partial}{\partial y_n} P^T_{\pm} u$ appartient à $L^2([0,1];(H^{-1}(\mathbb{R}^{n-1}))^{n_+ , n_-}$. On définit donc $P^T_{\pm} u_{|\partial\Omega} = P_{\pm} u_{|\partial\Omega}$ par les théorèmes de trace usuels. La deuxième partie de la proposition s'obtient en remarquant que, comme $P_0(\mathbb{C}^n) \subset M$, la condition $u \in M$ ne porte en fait que sur $P_{\pm} u$ qui sont bien définis.

Il est facile de voir que si l'opérateur défini par $D(\mathfrak{B}) = \{u \in M \mid Bu \in M \; ; \; u_{|\partial\Omega} \in M$, (au voisinage de tout point régulier.$\}$, $\mathfrak{B}u = Bu + \lambda u$, est positif, il est maximal positif. Ceci est vrai en particulier si tout point de $\partial\Omega$ est régulier, mais aussi dans d'autres cas (cf. Lax-Philips [9], Bardos [3], Phillips-Sarason [11], etc...) aussi nous allons énoncer le théorème essentiel sous l'aspect suivant.

Théorème 2 : Soit A un opérateur uniformément elliptique, avec des conditions aux limites du type Dirichlet :

$$D(A) = H_0^s(\Omega) \cap H^{2s}(\Omega), \quad Au = \sum_{|\alpha| \leq 2s} a_\alpha D^\alpha u,$$

$$\operatorname{Re}[(-1)^s \sum_{|\alpha|=2s} a_\alpha \xi^\alpha] \geq c\,|\xi|^{2s} \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n .$$

On désigne par u_ε la solution du problème :

(5) $$\varepsilon A u_\varepsilon + B u_\varepsilon + \lambda u_\varepsilon = f \quad (f \in H) .$$

Alors si $u \in H$ est limité dans H faible d'une suite u_n extraite de la famille u_ε, u est solution du problème

(6) $$Bu + \lambda u = f, \quad P^- u|_{\partial\Omega} = 0 \ , \ \text{(au vois. de tout p. r.)}.$$

Corollaire 1 : On suppose que l'opérateur défini par $D(\mathfrak{B}) = \{u \in H \mid Bu \in H,\ P^- u|_{\partial\Omega} = 0$, au vois. de tout p. r.$\}$, et $\mathfrak{B}u = Bu + \lambda u$ est positif, alors u_ε solution de (5) converge dans H faible vers l'unique solution u du problème : $Bu + \lambda u = f$, $P^- u|_{\partial\Omega} = 0$ (au vois. de tout p. r.).

Démonstrations : Le corollaire se déduit immédiatement du théorème. Pour prouver le théorème, on remarque d'abord que u_ε est non seulement borné dans H, mais vérifie de plus la majoration :

(7) $$\|u_\varepsilon\|_{2s-1} = 0(\varepsilon^{-(1-\frac{1}{2s})}) .$$

Puis on localise ; on considère u_ε comme défini dans la bande $G = \{(\hat{y}, \hat{y}_n) .\ 0 < y_n < 1\}$, on peut supposer que u_ε est nul en dehors d'un voisinage du point (0,1) et en particulier nul pour $y_n < 1/2$. On obtient alors la relation :

(8) $$\varepsilon\, \tilde{a}_{2s} \frac{\partial^{2s} u_\varepsilon}{\partial y_n^{2s}} + \nu^T A \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y_n} = g_\varepsilon \quad .$$

D'après (7), g_ε est borné dans $L^2(]0,1[\,;(H^{-1}(\mathbb{R}^{n-1}))^m)$. Enfin on peut multiplier par P_T^- . car P_T^- commute avec $\nu^T A$ et est supposé de classe C^s. On obtient, en posant $v_\varepsilon = P_T^- u_\varepsilon$, la relation :

$$(9) \quad (-1)^s \frac{\partial^{2s} v_\varepsilon}{\partial y_n^{2s}} + C(y)\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y_n} = k_\varepsilon \text{ borné dans } L^2(0,T;(H^{-1}(\mathbb{R}^{n-1}))^m) ,$$

où $C(y)$ désigne une matrice strictement négative ($C(y)$ est la restriction à $P_T^-(\mathbb{C}^m)$ de $\frac{(-1)^s}{\tilde{a}_{2s}} \nu^T A$). Pour terminer, il suffira de prouver que $\frac{\partial v}{\partial y_n}$ demeure dans un borné de $L^2(0,T\,;(H^{-1}(\mathbb{R}^{n-1}))^s)$. ($s = \dim P_T^-(\mathbb{C}^m)$).

On pose $\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y_n} = (\mu - \hat{\Delta})h_\varepsilon$ ($\hat{\Delta}$ est le laplacien en les variables $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ et μ est choisi assez grand). Comme v_ε est nul au voisinage de $y_n = 0$, on a

$$\mathrm{Re}(-1)^{s-1}\int_G \left(\frac{\partial^{2s-1}(\mu-\hat{\Delta})h_\varepsilon}{\partial y_n^{2s-1}}, h_\varepsilon\right) dy \geq 0 .$$

On en déduit la relation :

$$(10) \qquad -\int_G (C(y)(\mu - \hat{\Delta})h_\varepsilon , h_\varepsilon)\,dy \leq \int_G (k_\varepsilon , h_\varepsilon)\,dy .$$

Comme $C(y)$ est un opérateur strictement négatif, il est alors facile de conclure que h_ε est borné dans $L^2(]0,1[\,;(H^1(\mathbb{R}^{n-1}))^s)$. Ceci termine la démonstration du théorème.

<u>Remarques</u> :

1 - On peut remplacer l'opérateur A scalaire par un opérateur vectoriel, défini par $D(A) = (H_0^s(\Omega) \cap H^{2s}(\Omega))^m$,

$$Au = \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq s} (-1)^s D^\alpha E_{\alpha\beta} D^\beta ,$$ où les $E_{\alpha\beta}$ désignent des matrices $m\times m$ telles que la forme $\int_\Omega \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq s} (E_{\alpha\beta} . D^\beta u, D^\alpha v)\,dx$

soit coercive sur $H_0^s(\Omega)^m$. On définit alors sur $\partial\Omega$ la matrice $E.\nu$ en posant $E.\nu = \sum_{|\alpha|\ |\beta|=s} (-1)^s E_{\alpha\beta}\, \nu^{\alpha+\beta}$. Il convient de supposer que cette matrice est hermitienne ; on supposera même plus précisément qu'au voisinage de tout point régulier il existe un difféomorphisme T tel que $\left.\frac{\partial T_n}{\partial x_i}\right|_{\partial\Omega} = \nu_i$, tel que de plus, la matrice :

$$E^T.\nu = \sum_{|\alpha|,|\beta|=s} (-1)^s E_{\alpha,\beta} \left(\frac{\partial T_n}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1+\beta_1} \cdots \left(\frac{\partial T_n}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n+\beta_n}$$

soit hermitienne. On montre alors que si u est limite faible d'une suite de solution du problème $\varepsilon A u_\varepsilon + B u_\varepsilon + \lambda u_\varepsilon = f$, u vérifie les relations : $B u + \lambda u = f$, $P^- E_\nu^{1/2} u|_{\partial\Omega} = 0$, au vois. de tout p. r. . On en déduirait de même un résultat analogue au corollaire 1.

2 - Dans la majoration (7), on utilise le fait que A est coercif sur l'espace $(H_0^s(\Omega))^m$ (cf. [5] pour les détails). En fait on obtiendrait des résultats analogues en remplaçant A par un opérateur elliptique variationnel sur un espace V $(H^1(\Omega))^m$, pourvu que, pour tout $v \in V$, on ait $P^- v|_{\partial\Omega} = 0$.

3 - L'hypothèse que les matrices Ai soient hermitiennes n'intervient vraiment qu'à la frontière de Ω. On pourrait vraisemblablement généraliser ceci au cas où l'opérateur $B = \sum A_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ est hyperbolique à l'intérieur de Ω et symétrique au voisinage de $\partial\Omega$, cf. Agranovic [1].

Enfin il est intéressant de comparer sur des exemples les résultats obtenus ici avec ceux du théorème 1.

Exemple 3 : L'équation de Laplace $-\Delta u + u = f$ s'écrit en introduisant $U = (u_0, u_1, \ldots, u_n) = (u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n})$, sous la forme :

$$
(11) \qquad \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \; \ldots , & \frac{\partial}{\partial x_n} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & & \\ \vdots & \bigcirc & \\ \frac{\partial}{\partial x_n} & & \end{bmatrix} U + U = \begin{bmatrix} f \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} = F
$$

On a $\nu . A = \begin{bmatrix} 0 , & \nu_1 , \ldots , \nu_n \\ \nu_1 & \\ \vdots & \bigcirc \\ \nu_n & \end{bmatrix}$, les sous-espaces maximaux positifs sont de codimension 1, en particulier celui qui correspond au problème de Dirichlet est donné par $u_o = 0$! Si on note B l'opérateur figurant au premier membre de (11), on sait alors que U_ε solution de

$$
(12) \qquad - \varepsilon \Delta U_\varepsilon + B U_\varepsilon + U_\varepsilon = F
$$

converge dans $(L^2(\Omega))^{n+1}$ faible vers U solution de

$$
(13) \qquad B U + U = F , \quad P^- U = 0 \; ;
$$

on vérifie sans mal que (12) est équivalent à

$$
(14) \qquad - \varepsilon \Delta u_\varepsilon - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} (I - \varepsilon \Delta)^{-1} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} + u_\varepsilon = f, \quad u_\varepsilon |_{\partial\Omega} = 0 ,
$$

et que (13) est équivalent au problème (14) $- \Delta u + u = f$, $\frac{\partial u}{\partial \nu} + u |_{\partial\Omega} = 0$.

Bien entendu on peut alors considérer la solution du problèma parabolique associé à (12) :

$$
(15) \qquad \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial t} - \varepsilon \Delta U_\varepsilon + B U_\varepsilon = 0, \quad U_\varepsilon(0) = U_o
$$

$$
U_\varepsilon |_{\partial\Omega \times \mathbb{R}_+} = 0 .
$$

U_ε converge alors dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}_+ ; (L^2(\Omega))^{n+1})$ faible vers U solution de :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + BU = 0, \quad P^- U_{|\partial\Omega\times\mathbb{R}_+} = 0, \quad U(0) = U_0 . \tag{16}$$

On vérifie facilement que (16) est équivalent à l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 , \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} + u_{|\partial\Omega\times\mathbb{R}_+} = 0 , \tag{17}$$

$$u(0) = u_0 , \quad u'(0) = v_0 .$$

On remarque que, contrairement à l'exemple 1, le caractère parabolique de (15) s'est dans un certain sens maintenu lors du passage à la limite, le problème (16) ou (17) n'est bien posé que pour les $t > 0$. Au lieu d'avoir une égalité de l'énergie on a pour (17) une inégalité. Enfin on peut voir que (17) possède certaines propriétés régularisantes (à la frontière). On trouvera dans [3] d'autres exemples, en particulier un consacré à la perturbation des équations de Maxwell où se produit un phénomène analogue.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. S. Agranowic : Positive problems of mixed type for certain hyperbolic systems, Doklady, 1966, T. 167, No 6.

[2] C. Bardos : Problèmes aux limites ..., Ann. Sc. E. N. S., 4 ème série, t. 3, 1970, p. 185-233.

[3] C. Bardos, D. Brézis et H. Brézis : à paraître.

[4] N. Dunford et J. T. Schwartz : Linear operators, Intersciences, New York, 1958 et 1963.

[5] W. G. Faris : The product formula ..., Pacific J. of Math., 21, 1967. p. 47-70.

[6] H. O. Fattorini : A representation theorem ..., J. of Funct. Analysis, 6, 1970. p. 85-96.

[7] D. Huet : Perturbations singulières, C. R. Acad. Sc., 259, 1964, p. 4213-4215.

[8] T. Kato : Perturbation theory, Springer Verlag, t. 132.

[9] P. D. Lax et R. S. Phillips : Local boundary conditions ..., Comm. Pure App., Vol. XIII, 1960, p. 427-455.

[10] J. L. Lions : Singular perturbations ..., Lecture at the Symposium on Non linear Functionnal Analysis, Avril 1971.

[11] R. S. Phillips et L. Sarason : Sing. Symm. positive ..., J. of Math. and Mech., Vol. 15, No 2, 1966, p. 235-271.

[12] H. F. Trotter : Approximation of semi-groups ..., Pacific J. Math., 8, 1958, p. 887-919.
