

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

C. BARDOS

Prolongements maximaux positifs d'opérateurs positifs et problèmes de perturbations singulières

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1971-1972), exp. n° 26,
p. 1-12

http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1971-1972___A26_0

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1971-1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDICIS 11-77
(633)

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 1 - 1 9 7 2

PROLONGEMENTS MAXIMAUX POSITIFS D'OPERATEURS POSITIFS

ET PROBLEMES DE PERTURBATIONS SINGULIERES

par C. BARDOS

Exposé N° XXVI

3 Mai 1972

On désignera par H un espace de Hilbert, on note (\cdot, \cdot) et $|\cdot|$ le produit scalaire et la norme sur H . On considèrera un opérateur B non borné de domaine $D(B)$ dense dans H , et on supposera que B est strictement positif ; c'est-à-dire que l'on a $\operatorname{Re}(Bu, u) \geq \delta |u|^2$, $\forall u \in D(B)$. Il existe alors au moins un opérateur \mathfrak{B} maximal positif prolongeant B , et on sait que pour que \mathfrak{B} soit maximal positif il faut et il suffit que, pour tout λ ($\operatorname{Re} \lambda > 0$), $\lambda + \mathfrak{B}$ soit un isomorphisme de $D(\mathfrak{B})$ sur H . Soit d'autre part A un opérateur maximal positif, de domaine $D(A)$; on suppose que A domine fortement B (cf. Kato [8], P. 190), alors, pour tout $\varepsilon > 0$, $(\varepsilon A + B)$ est un opérateur maximal (strictement) positif. On se propose de faire tendre ε vers zéro, et de montrer que dans certains cas $(\varepsilon A + B)$ converge vers un prolongement maximal \mathfrak{B} de B , ou plus précisément que $(\varepsilon A + B)^{-1}$ converge vers \mathfrak{B}^{-1} .

Bien entendu, si \mathfrak{B} est maximal positif, $-\mathfrak{B}$ est générateur d'un semi-groupe fortement continu à contraction dans H . On peut alors montrer que si $(\varepsilon A + B)^{-1}$ converge vers \mathfrak{B}^{-1} , $u_\varepsilon(t)$, solution du problème d'évolution $u'_\varepsilon + (\varepsilon A + B)u_\varepsilon = f$ ($t > 0$), $u_\varepsilon(0) = u_0$, converge vers u solution du problème $u' + \mathfrak{B}u = f$, $u(0) = u_0$ (cf. Kato [8], ou dans un cadre plus général Fattorini [6]).

Si on prend pour espace H l'espace $(L^2(\Omega))^m$ où Ω désigne un ouvert de \mathbb{R}^n et pour opérateur B un opérateur différentiel formellement positif, (on posera $D(B) = (\mathfrak{D}(\Omega))^m$), construire des prolongements maximaux revient à déterminer des familles de conditions aux limites rendant l'opérateur maximal positif, (ou telles que le problème $\lambda u + Bu = f$ soit bien posé, lorsque u vérifie ces conditions aux limites). De même, si A est défini par un opérateur différentiel d'ordre plus élevé, il apparaîtra des conditions aux limites supplémentaires pour la solution de l'équation $\varepsilon Au_\varepsilon + Bu_\varepsilon = f$ et le problème consiste à étudier ce que deviennent ces conditions lorsque ε tend vers zéro, on retrouve ici l'aspect perturbations singulières. Enfin si $\overline{B}|_{D(A)}$ est un opérateur maximal positif il est évident (cf. Trotter [12]) que

$(\varepsilon A + B)^{-1}$ converge vers $(\bar{B}|_{D(A)})^{-1}$: aussi ce cas trivial sera écarté dans la suite. On remarque que lorsque ε tend vers zéro, u_ε solution de l'équation $\varepsilon A u_\varepsilon + B u_\varepsilon = f$ est uniformément borné ($|u_\varepsilon| \leq \frac{1}{\delta} \|f\|$), on en déduit alors le théorème très faible suivant :

Théorème 1 : On suppose que $D(A^*) \cap D(B^*)$ est dense dans H , alors il existe une suite ε_n convergeant vers zéro et un opérateur \mathfrak{B} prolongement maximal positif de B tel que $(\varepsilon_n A + B)^{-1}$ converge dans $\mathfrak{L}(H)$ faible vers \mathfrak{B}^{-1} .

Démonstration : On pose $\mathfrak{J}_\varepsilon = (\varepsilon A + B)^{-1}$, \mathfrak{J}_ε est une famille d'opérateurs équibornés par $\frac{1}{\delta}$. on utilise ensuite la faible compacité de la boule unité de $\mathfrak{L}(H)$ pour construire une application \mathfrak{J} et une suite $\mathfrak{J}_{\varepsilon_n}$ telle que $\mathfrak{J}_{\varepsilon_n}$ converge dans $\mathfrak{L}(H)$ faible vers \mathfrak{J} . De la relation

$$(1) \quad \begin{aligned} (f, v^*) &= (\varepsilon_n A u_{\varepsilon_n} + B u_{\varepsilon_n}, v^*) = (u_{\varepsilon_n}, A^* v^* + B^* v^*) \\ &= (\mathfrak{J}_{\varepsilon_n} (f), A^* v^* + B^* v^*) \quad \forall v^* \in D(A^*) \cap D(B^*) \end{aligned}$$

on déduit, par passage à la limite, que \mathfrak{J} est injective. On définit alors \mathfrak{B} en posant $D(\mathfrak{B}) = \mathfrak{J}(H)$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{J}^{-1}$. Montrons que \mathfrak{B} est positif et prolonge B . On a, pour tout $u \in D(\mathfrak{B})$ ($u = \mathfrak{J}f$), les relations

$$(2) \quad \begin{aligned} \operatorname{Re}(\mathfrak{B}u, u) &= \operatorname{Re}(f, \mathfrak{J}f) = \lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} (f, \mathfrak{J}_{\varepsilon_n} (f)) \\ &= \lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} \operatorname{Re}(f, u_{\varepsilon_n}) \geq 0 . \end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $u \in D(A)$, on a la relation :

$$(3) \quad \varepsilon A(u_\varepsilon - u) + B(u_\varepsilon - u) = \varepsilon \Lambda u ,$$

dont on déduit que $u_{\varepsilon_n} = \mathfrak{J}_{\varepsilon_n} (Bu)$ converge vers u , soit que $\mathfrak{J}(Bu) = u$, ce qui prouve que \mathfrak{J}^{-1} prolonge B .

Voici une première classe d'exemples où les résultats sont assez forts, en raison des hypothèses faites sur B. On dit qu'un opérateur B de domaine D(B) est sectoriel s'il vérifie la relation $|\operatorname{Im}(Bu, u)| \leq c \operatorname{Re}(Bu, u) \quad \forall c > 0$. On sait alors qu'il existe un unique espace de Hilbert V tel que : (i) $D(B) \subset V \subset H$, chaque espace étant dense dans le suivant,

(ii) l'opérateur B linéaire continu de D(B) dans H se prolonge en un opérateur \hat{B} linéaire continu de V dans V^* antidual de V. En injectant canoniquement H dans V^* , on définit la restriction de \hat{B} à H. $\hat{B}|_H$ (également noté \hat{B}) est alors un prolongement maximal positif de B. Ce procédé s'appelle l'extension de Friedrichs, il est décrit dans Dunford-Schwartz [4], p.1240, et pour B non symétrique dans Faris [5]. On a alors le résultat suivant :

Proposition 1 : On suppose que B (défini sur D(A)) est sectoriel, on désigne par V et \hat{B} , l'espace de Hilbert et l'opérateur canoniquement associés à B par l'extension de Friedrichs. Alors :

(i) Si B est strictement positif et si $D(A) \cap D(A^*)$ est dense dans H, $(\varepsilon A + B)^{-1}$ converge dans $\mathcal{L}(H, V)$ fort vers \hat{B} .

(ii) Si A est auto-adjoint et B symétrique, pour tout $\delta > 0$, $(\varepsilon A + iB + \delta)^{-1}$ converge vers $(i\hat{B} + \delta)^{-1}$.

On trouvera les démonstrations de ces résultats, qui généralisent un peu les résultats usuels sur les perturbations singulières (Huet [7], Lions [10]), dans [3]. Voici des exemples d'application :

Exemple 1 : u_ε solution du problème $\varepsilon \Delta^2 u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon + u_\varepsilon = f$,

$u_\varepsilon|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} = 0$, converge dans $H_0^1(\Omega)$ vers u solution du problème

$-\Delta u + u = f$; de même $u_\varepsilon(t)$ ($t > 0$) solution du problème

$u'_\varepsilon + \varepsilon \Delta^2 u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon = 0$, $u_\varepsilon(0) = u_0$, $u_\varepsilon|_{\partial\Omega \times \mathbb{R}_+} = \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu}|_{\partial\Omega \times \mathbb{R}_+} = 0$, converge

vers u(t) solution du problème $u' - \Delta u = 0$, $u|_{\partial\Omega \times \mathbb{R}_+} = 0$, $u(0) = u_0$.

Exemple 2 : u_ε solution du problème

$$\varepsilon \Delta^2 u_\varepsilon - i \Delta u_\varepsilon + u_\varepsilon = f, \quad u_\varepsilon|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \text{converge dans } H_0^1(\Omega) \text{ vers } u$$

solution du problème $-\Delta u + u = f$: de même $u_\varepsilon(t)$ ($t > 0$) solution du

$$\text{problème } u'_\varepsilon + \varepsilon \Delta^2 u_\varepsilon - i \Delta u_\varepsilon = 0, \quad u_\varepsilon|_{\partial\Omega \times \mathbb{R}_+} = 0, \quad u_\varepsilon(0) = u_0 \quad \text{converge}$$

vers u solution du problème $u' - i \Delta u = 0$. $u|_{\partial\Omega \times \mathbb{R}_+} = 0, \quad u(0) = u_0$.

Cet exemple est remarquable, car on voit que la régularité de l'opérateur $i\Delta$ permet de passer d'un problème d'évolution défini pour $t > 0$ à un problème d'évolution défini pour tout t . On approche le générateur d'un groupe unitaire par celui d'un semi-groupe analytique. Dans les exemples qui vont suivre, cette circonstance ne se produira plus, bien qu'on parle d'opérateurs antisymétriques, ou presque antisymétriques. On se place maintenant dans l'espace $H = (L^2(\Omega))^m$ et on considère un opérateur différentiel B défini dans $(\mathcal{D}(\bar{\Omega}))^m$ par $Bu = \sum_{i=1}^n A_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$, où les A_i désignent des matrices hermitiennes de classe C^1 . Si u et v appartiennent à $(\mathcal{D}(\bar{\Omega}))^m$, on peut écrire la formule de Green

$$(3) \quad \left(\sum_{i=1}^n A_i \frac{\partial u}{\partial x_i}, v \right) = - \left(u, \sum_{i=1}^n A_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) + (u, \operatorname{div} A v) + \int_{\partial\Omega} (v \cdot A u, \nu) d\sigma$$

Il est alors évident que, pour $\lambda > 0$ assez grand, $\lambda + B$ défini sur $(\mathcal{D}(\bar{\Omega}))^m$ un opérateur positif, soit \mathfrak{B} un prolongement maximal de B , on montre que l'on a :

$$D(\mathfrak{B}) \subset \{u \in H \mid Bu \in H\}, \quad \mathfrak{B}u = \lambda u + Bu$$

Ainsi les conditions qui rendent maximal positif l'opérateur \mathfrak{B} sont des conditions maximales rendant positive l'expression $\int_{\partial\Omega} (v \cdot Au, u) d\sigma$ et

$$\operatorname{div} A = \sum_{i=1}^n \frac{\partial A_i}{\partial x_i}, \quad v \cdot A = \sum_{i=1}^n v_i \cdot A_i$$

on cherche des conditions locales, on est amené à introduire les sous-espaces maximaux rendant positif la matrice $\nu.A$. On dira qu'un sous-espace $M \subset \mathbb{C}^m$ est positif s'il vérifie la relation $(\nu.A \xi, \xi) \geq 0 \quad \forall \xi \in M$, il est dit maximal positif si tout sous-espace M' tel que $(\nu.A \eta, \eta) < 0$. En diagonalisant la matrice $\nu.A$, on introduit des sous-espaces M_+ , M_- , $M_0 = \text{Ker } \nu.A$ correspondant aux valeurs propres positives négatives ou nulles. Bien entendu $M_+ \oplus M_0$ fournit un exemple de sous-espace maximal. on en verra d'autres, néanmoins on remarque les propriétés suivantes :

- (i) Tout sous-espace maximal positif M contient M_0 et vérifie la relation $\dim M_+ + \dim M_0 = \dim M$.
- (ii) Les projecteurs orthogonaux P_+ , P_0 et P_- sur M_+ , M_0 , M_- , commutent avec $\nu.A$. On peut d'ailleurs montrer que $M_+ \oplus M_0$ est l'unique sous-espace maximal positif tel que la projection orthogonale de \mathbb{C}^m sur $M_+ \oplus M_0$ commute avec $\nu.A$.

Remarquons enfin que si $u \in M$ vérifie $Bu \in H$, il en est de même de φu , pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Il est alors commode de localiser la relation $Bu = f$ au voisinage de tout point $x_0 \in \partial\Omega$; puis en supposant $\partial\Omega$ régulière au voisinage de x_0 , d'introduire un voisinage θ de x_0 dans \mathbb{R}^n et un difféomorphisme T possédant les propriétés suivantes :

- (i) $T(\theta \cap \Omega) \subset \{y = (\hat{y}, y_n) \mid 0 < y_n < 1\}$
- (ii) $T(\theta \cap \partial\Omega) \subset \{y = (\hat{y}, 1)\}$
- (iii) sur $\partial\Omega \quad \frac{\partial T_n}{\partial x_i} = \nu_i$.

L'opérateur $\sum A_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ se transforme alors en l'opérateur

$$\nu.T \cdot A \frac{\partial}{\partial y_n} + \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{A}_i \frac{\partial}{\partial y_i}.$$

On dira que x_0 est régulier si T peut être choisi de manière à ce que les projections orthogonales sur les sous-espaces canoniques, positifs, négatifs ou nuls de $\nu_i A$ soient de classe C^1 ♦. cela entraîne

♦ ou C^s lorsque cela sera nécessaire.

en particulier que ces sous-espaces sont de dimension constante au voisinage de tout point régulier.

Proposition 2 : Soit $u \in H$, vérifiant la relation $Bu \in H$. alors/de
tout point régulier, on peut définir la trace de u sur les sous-espaces
canoniques positif et négatif de $v_T A$ (dans $H^{1/2}(\partial(\Omega))$). De plus si M
est un sous-espace maximal positif, variant régulièrement (cf. [3]),
on peut donner un sens à l'expression $u|_{\partial\Omega} \in M$, au voisinage de tout
point régulier.

Démonstration : En désignant par P_{\pm}^T le projecteur orthogonal sur les sous-espaces maximaux positif et négatif de $v_T A$, on écrit la relation :

$$(4) \quad P_{\pm}^T \left(v_T A \frac{\partial u}{\partial y_n} + \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{\Lambda}_i \frac{\partial u}{\partial y_i} \right) \\ = \left(v_T A \frac{\partial P_{\pm}^T u}{\partial y_n} + P_{\pm}^T \left(\sum_{i=1}^n \tilde{\Lambda}_i \frac{\partial u}{\partial y_i} \right) - \frac{\partial P_{\pm}^T}{\partial y_n} v_T A u \right)$$

Comme $v_T A$ restreint à $P_{\pm}^T(\mathbb{C}^m)$ est continûment inversible on en déduit que $\frac{\partial}{\partial y_n} P_{\pm}^T u$ appartient à $L^2([0,1]; (H^{-1}(\mathbb{R}^{n+1}))^{n+1})$. On définit donc $P_{\pm}^T u|_{\partial\Omega} = P_{\pm}^T u|_{\partial\Omega}$ par les théorèmes de trace usuels. La deuxième partie de la proposition s'obtient en remarquant que, comme $P_0(\mathbb{C}^n) \subset M$, la condition $u \in M$ ne porte en fait que sur $P_{\pm}^T u$ qui sont bien définis.

Il est facile de voir que si l'opérateur défini par $D(\mathfrak{B}) = \{u \in M \mid Bu \in M : u|_{\partial\Omega} \in M, \text{ (au voisinage de tout point régulier.)}, Bu - Bu + \lambda u$, est positif, il est maximal positif. Ceci est vrai en particulier si tout point de $\partial\Omega$ est régulier, mais aussi dans d'autres cas (cf. Lax-Phillips [9], Bardos [3], Phillips-Sarason [11], etc...) aussi nous allons énoncer le théorème essentiel sous l'aspect suivant.

Théorème 2 : Soit A un opérateur uniformément elliptique, avec des conditions aux limites du type Dirichlet :

$$D(A) = H_0^s(\Omega) \cap H^{2s}(\Omega), \quad Au = \sum_{|\alpha| \leq 2s} a_\alpha D^\alpha u,$$

$$\operatorname{Re} [(-1)^s \sum_{|\alpha|=2s} a_\alpha \xi^\alpha] \geq c |\xi|^{2s} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

On désigne par u_ε la solution du problème :

$$(5) \quad \varepsilon Au_\varepsilon + Bu_\varepsilon + \lambda u_\varepsilon = f \quad (f \in H).$$

Alors si $u \in H$ est limité dans H faible d'une suite u_n extraite de la famille u_ε , u est solution du problème

$$(6) \quad Bu + \lambda u = f, \quad P^- u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (\text{au vois. de tout p. r.}).$$

Corollaire 1 : On suppose que l'opérateur défini par $D(\mathfrak{B}) = \{u \in H \mid Bu \in H, P^- u|_{\partial\Omega} = 0, \text{ au vois. de tout p. r.}\}$, et $\mathfrak{B}u = Bu + \lambda u$ est positif, alors u_ε solution de (5) converge dans H faible vers l'unique solution u du problème : $Bu + \lambda u = f, P^- u|_{\partial\Omega} = 0$ (au vois. de tout p. r.).

Démonstrations : Le corollaire se déduit immédiatement du théorème. Pour prouver le théorème, on remarque d'abord que u_ε est non seulement borné dans H , mais vérifie de plus la majoration :

$$(7) \quad \|u_\varepsilon\|_{2s-1} = O(\varepsilon^{-(1 - \frac{1}{2s})}).$$

Puis on localise ; on considère u_ε comme défini dans la bande $G = \{(\hat{y}, \hat{y}_n), 0 < y_n < 1\}$, on peut supposer que u_ε est nul en dehors d'un voisinage du point $(0, 1)$ et en particulier nul pour $y_n < 1/2$. On obtient alors la relation :

$$(8) \quad \varepsilon \tilde{a}_{2s} \frac{\partial^{2s} u_\varepsilon}{\partial y_n^{2s}} + v^T A \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y_n} = g_\varepsilon.$$

D'après (7), g_ε est borné dans $L^2(]0,1[; (H^{-1}(\mathbb{R}^{n-1}))^m)$. Enfin on peut multiplier par P_T^- . car P_T^- commute avec $v^T A$ et est supposé de classe C^s . On obtient, en posant $v_\varepsilon = P_T^- u_\varepsilon$, la relation :

$$(9) \quad (-1)^s \frac{\partial^{2s} v_\varepsilon}{\partial y_n^{2s}} + C(y) \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y_n} = k_\varepsilon \text{ borné dans } L^2(0,T; (H^{-1}(\mathbb{R}^{n-1}))^m),$$

où $C(y)$ désigne une matrice strictement négative ($C(y)$ est la restriction à $P_T^-(\mathbb{C}^m)$ de $\frac{(-1)^s}{\tilde{a}_{2s}} v^T A$). Pour terminer, il suffira de prouver que

$\frac{\partial v}{\partial y_n}$ demeure dans un borné de $L^2(0,T; (H^{-1}(\mathbb{R}^{n-1}))^s)$. ($s = \dim P_T^-(\mathbb{C}^m)$).

On pose $\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y_n} = (\mu - \hat{\Delta}) h_\varepsilon$ ($\hat{\Delta}$ est le laplacien en les variables y_1, y_2, \dots, y_{n-1} et μ est choisi assez grand). Comme v_ε est nul au voisinage de $y_n = 0$, on a

$$\operatorname{Re} (-1)^{s-1} \int_G \left(\frac{\partial^{2s-1} (\mu - \hat{\Delta}) h_\varepsilon}{\partial y_n^{2s-1}}, h_\varepsilon \right) dy \geq 0.$$

On en déduit la relation :

$$(10) \quad - \int_G (C(y) (\mu - \hat{\Delta}) h_\varepsilon, h_\varepsilon) dy \leq \int_G (k_\varepsilon, h_\varepsilon) dy.$$

Comme $C(y)$ est un opérateur strictement négatif, il est alors facile de conclure que h_ε est borné dans $L^2(]0,1[; (H^1(\mathbb{R}^{n-1}))^s)$. Ceci termine la démonstration du théorème.

Remarques :

1 - On peut remplacer l'opérateur A scalaire par un opérateur vectoriel, défini par $D(A) = (H_0^s(\Omega) \times H^{2s}(\Omega))^m$.

$$Au = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq s} (-1)^s D^\alpha E_{\alpha\beta} D^\beta v, \text{ où les } E_{\alpha\beta} \text{ désignent}$$

des matrices $m \times m$ telles que la forme $\int_\Omega \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq s} (E_{\alpha\beta} \cdot D^\beta u, D^\alpha v) dx$

soit coercive sur $H_0^s(\Omega)^m$. On définit alors sur $\partial\Omega$ la matrice $E.v$ en

posant $E.v = \sum_{|\alpha|, |\beta|=s} (-1)^s E_{\alpha\beta} v^{\alpha+\beta}$. Il convient de supposer que cette

matrice est hermitienne ; on supposera même plus précisément qu'au voisinage de tout point régulier il existe un difféomorphisme T tel

que $\frac{\partial T_n}{\partial x_i} \Big|_{\partial\Omega} = v_i$, tel que de plus, la matrice :

$$E^T.v = \sum_{|\alpha|, |\beta|=s} (-1)^s E_{\alpha, \beta} \left(\frac{\partial T_n}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1 + \beta_1} \dots \left(\frac{\partial T_n}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n + \beta_n}$$

soit hermitienne. On montre alors que si u est limite faible d'une suite de solution du problème $\varepsilon A u_\varepsilon + B u_\varepsilon + \lambda u_\varepsilon = f$, u vérifie les relations : $Bu + \lambda u = f$, $P^- E_v^{1/2} u \Big|_{\partial\Omega} = 0$, au vois. de tout p. r..

On en déduirait de même un résultat analogue au corollaire 1.

2 - Dans la majoration (7), on utilise le fait que A est coercif sur l'espace $H_0^s(\Omega)^m$ (cf. [2] pour les détails). En fait on obtiendrait des résultats analogues en remplaçant A par un opérateur elliptique variationnel sur un espace $V = (H^1(\Omega))^m$, pourvu que, pour tout $v \in V$, on ait $P^- v \Big|_{\partial\Omega} = 0$.

3 - L'hypothèse que les matrices A_i soient hermitiennes n'intervient vraiment qu'à la frontière de Ω . On pourrait vraisemblablement généraliser ceci au cas où l'opérateur $B = \sum A_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ est hyperbolique à l'intérieur de Ω et symétrique au voisinage de $\partial\Omega$, cf. Agranovic [1].

Enfin il est intéressant de comparer sur des exemples les résultats obtenus ici avec ceux du théorème 1.

Exemple 3 : L'équation de Laplace $-\Delta u + u = f$ s'écrit en introduisant $U = (u_0, u_1, \dots, u_n) = (u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n})$, sous la forme :

$$(11) \quad \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \bigcirc & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial}{\partial x_n} & & & \bigcirc \end{bmatrix} U + P U = \begin{bmatrix} f \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = F$$

On a $v.A = \begin{bmatrix} 0, v_1, \dots, v_n \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$, les sous-espaces maximaux positifs sont de

codimension 1, en particulier celui qui correspond au problème de Dirichlet est donné par $u_0 = 0$! Si on note B l'opérateur figurant au premier membre de (11), on sait alors que U_ε solution de

$$(12) \quad -\varepsilon \Delta U_\varepsilon + B U_\varepsilon + U_\varepsilon = F$$

converge dans $(L^2(\Omega))^{n+1}$ faible vers U solution de

$$(13) \quad B U + U = F, \quad P^- U = 0;$$

on vérifie sans mal que (12) est équivalent à

$$(14) \quad -\varepsilon \Delta u_\varepsilon - \sum_{i=1}^n \frac{c}{\partial x_i} (I - \varepsilon \Delta)^{-1} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} + u_\varepsilon = f, \quad u_\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0,$$

et que (13) est équivalent au problème (14) $-\Delta u + u = f, \frac{\partial u}{\partial \nu} + u|_{\partial\Omega} = 0$.

Bien entendu on peut alors considérer la solution du problème parabolique associé à (12) :

$$(15) \quad \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial t} - \varepsilon \Delta U_\varepsilon + B U_\varepsilon = 0, \quad U_\varepsilon(0) = U_0,$$

$$U_\varepsilon|_{\partial\Omega \times \mathbb{R}_+} = 0.$$

U_ε converge alors dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}_+; (L^2(\Omega))^{n+1})$ faible vers U solution de :

$$(16) \quad \frac{\partial U}{\partial t} + BU = 0, \quad P^-U|_{\partial\Omega \times \mathbb{R}_+} = 0, \quad U(0) = U_0.$$

On vérifie facilement que (16) est équivalent à l'équation des ondes :

$$(17) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} + u|_{\partial\Omega \times \mathbb{R}_+} = 0,$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = v_0.$$

On remarque que, contrairement à l'exemple 1, le caractère parabolique de (15) s'est dans un certain sens maintenu lors du passage à la limite, le problème (16) ou (17) n'est bien posé que pour les $t > 0$. Au lieu d'avoir une égalité de l'énergie on a pour (17) une inégalité. Enfin on peut voir que (17) possède certaines propriétés régularisantes (à la frontière). On trouvera dans [3] d'autres exemples, en particulier un consacré à la perturbation des équations de Maxwell où se produit un phénomène analogue.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. S. Agranovic : Positive problems of mixed type for certain hyperbolic systems, Doklady, 1966, T. 167, No 6.
- [2] C. Bardos : Problèmes aux limites ..., Ann. Sc. E. N. S., 4^{ème} série, t. 3, 1970, p. 185-233.
- [3] C. Bardos, D. Brézis et H. Brézis : à paraître.
- [4] N. Dunford et J. T. Schwartz : Linear operators, Intersciences, New York, 1958 et 1963.
- [5] W. G. Faris : The product formula ..., Pacific J. of Math., 21, 1967, p. 47-70.
- [6] H. O. Fattorini : A representation theorem ..., J. of Funct. Analysis, 6, 1970, p. 85-96.

- [7] D. Huet : Perturbations singulières, C. R. Acad. Sc., 259, 1964, p. 4213-4215.
 - [8] T. Kato : Perturbation theory, Springer Verlag, t. 132.
 - [9] P. D. Lax et R. S. Phillips : Local boundary conditions ..., Comm. Pure App., Vol. XIII, 1960, p. 427-455.
 - [10] J. L. Lions : Singular perturbations ..., Lecture at the Symposium on Non linear Functionnal Analysis, Avril 1971.
 - [11] R. S. Phillips et L. Sarason : Sing. Symm. positive ..., J. of Math. and Mech., Vol. 15, No 2, 1966, p. 235-271.
 - [12] H. F. Trotter : Approximation of semi-groups ..., Pacific J. Math., 8, 1958, p. 887-919.
-