Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

L. Schwartz

Désintégration régulière d'une mesure par rapport à une famille de tribus

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1971-1972), exp. n° 24, p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1971-1972____A24_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

SEMINAIRE GOULAOUIC-SCHWARTZ 1971-1972

DESINTEGRATION REGULIERE D'UNE MESURE PAR RAPPORT A UNE FAMILLE DE TRIBUS

par L. SCHWARTZ

Exposé N° XXIV

19 Avril 1972

§ 1. DEFINITION, EXISTENCE ET UNICITE

Soient Ω un ensemble, $\mathcal{O}$ une tribu sur Ω, λ une mesure ≥ 0 sur Ω, $(\mathcal{T}^t)_{t\in\mathbb{R}}$ une famille de sous-tribus de la tribu λ-mesurable, indexée par $\mathbb{R}$ (considérée comme axe des temps), croissante ($\mathcal{T}^s \subset \mathcal{T}^t$ pour $s \leq t$) et continue à droite ($\mathcal{T}^t = \bigcap_{t'>t} \mathcal{T}^{t'}$).

On suppose en outre que la restriction de λ à chaque $\mathcal{T}^t$ est σ-finie.

Cette situation se présente dans l'étude des processus stochastiques. Un processus, à espace d'états E, est une application X de $\mathbb{R} \times \Omega$ dans E; appelons X^t la fonction $\omega \to X(t,\omega)$ et X_ω la fonction $t \to X(t,\omega)$; on écrira donc aussi X_ω^t pour $X(t,\omega)$. E sera supposé être muni d'une tribu $\mathcal{E}$ (en général, ce sera un espace topologique assez simple, $\mathcal{E}$ sera sa tribu borélienne ou universellement mesurable). Alors, si on appelle $\mathcal{U}^t$ la tribu sur Ω engendrée par les X^s, $s \leq t$ (c'est-à-dire engendrée par les $(X^s)^{-1}(B)$, $B \in \mathcal{E}$, $s \leq t$), les $\mathcal{U}^t$, $t \in \mathbb{R}$, forment bien une famille croissante de tribus indexée par $\mathbb{R}$; $\mathcal{U}^t$ est "la tribu du passé de l'instant t". Si tous les $X^t : \Omega \to \mathcal{E}$, sont λ-mesurables, $\mathcal{U}^t$ est λ-mesurable. Mais la famille $(\mathcal{U}^t)_{t\in\mathbb{R}}$ n'est pas continue à droite; qu'à cela ne tienne, on prendra $\mathcal{T}^t = \bigcap_{t'>t} \mathcal{U}^{t'}$.

Supposons vérifiées les conditions de Jirina (exposé XXIII, théorème 2.2). Alors, pour chaque t, λ possède une désintégration, $\omega \to \overline{\lambda}_\omega^{\mathcal{T}^t}$, que nous noterons $\omega \to \overline{\lambda}_\omega^t$. Chacune est déterminée à un ensemble λ-négligeable près; il s'agit de savoir si, compte tenu de la condition de continuité à droite de la famille des tribus, on peut faire un choix des désintégrations pour les diverses valeurs du temps, de manière à obtenir aussi des conditions de continuité à droite pour les λ_ω^t.

Définition 1.1 : On appelle désintégration régulière de λ pour la famille de tribus $(\mathcal{T}^t)_{t\in\mathbb{R}}$ une famille de mesures sur Ω, $(t,\omega)\mapsto\lambda^t_\omega$, indexée par $\mathbb{R}\times\Omega$ ayant les propriétés suivantes :

1) Pour tout t, $\omega\mapsto\lambda^t_\omega$ est une désintégration de λ relativement à $\mathcal{T}^t$

2) Pour toute fonction f sur Ω, ≥ 0 et λ-mesurable, où à valeurs banachiques et λ-intégrable, pour λ-presque tout ω, la fonction $\omega\mapsto\lambda^t_\omega(f)$ est réglée et continue à droite.

Théorème 1.2 : Si $(\Omega,\mathcal{O},\lambda)$ vérifient les conditions de Jirina (théorème XXIII.2.2), il existe des désintégrations régulières et deux d'entre elles sont λ-presque partout égales (autrement dit, pour λ-presque tout ω elles sont égales pour tout $t\in\mathbb{R}$). En outre, une désintégration régulière peut être caractérisée par la propriété 1) de 1.1, et la propriété

2') Pour λ-presque tout ω, $t\mapsto\lambda^t_\omega$ est une fonction sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans l'espace $\mathcal{P}(\Omega)$ des probabilités de Radon sur Ω, réglée et continue à droite, quand on munit $\mathcal{P}(\Omega)$ de la topologie de la convergence étroite.

Nous admettrons ce théorème, comme d'ailleurs tous les suivants : il sera un cas particulier du théorème 2.7

On a une proposition analogue au théorème 4.1 de XXIII :

Proposition 1.3 : Soit $(t,\omega)\mapsto\lambda^t_\omega$ une désintégration régulière. Pour toute $A\in\mathcal{T}^s$, pour λ-presque tout ω, pour tout $t\geq s$, λ^t_ω est portée par A ou $\complement A$ selon que $\omega\in A$ ou $\omega\in\complement A$.

(L'intéressant est que "pour λ-presque tout ω" précède "pour tout $t\geq s$").

Dans le même ordre d'idées :

Proposition 1.4 : Soit $(t,\omega) \mapsto \lambda_\omega^t$ une désintégration régulière. Si $B \subset \Omega$ est λ-négligeable, pour λ presque tout ω, pour tout t, B est λ_ω^t-négligeable. Si $f : \Omega \to E$ est une fonction sur Ω à valeurs dans un espace topologique, λ-mesurable-Lusin, alors, pour λ-presque tout ω, pour tout t, f est λ_ω^t-mesurable-Lusin.

Ces deux propositions sont presque évidentes.

Théorème 1.5 : Soit $(t,\omega) \mapsto \lambda_\omega^t$ une désintégration régulière. Pour λ-presque tout ω, pour tout s, pour tout t : $\int \lambda_{\omega'}^t \, d\lambda_\omega^s(\omega') = \lambda_\omega^{\mathrm{Min}(s,t)}$.

Admis. L'intérêt de ces théorèmes est que le "pour λ-presque tout ω" est placé au début de la liste des quantificateurs.

Le théorème le plus difficile est le suivant :

Théorème 1.6 : Soit $(t,\omega) \mapsto \lambda_\omega^t$ une désintégration régulière. Soit X un processus à valeurs dans un espace topologique E souslinien complètement régulier : $\mathbb{R} \times \Omega \to E$. On suppose que, pour tout t, X^t est $\mathcal{T}^t$-mesurable, et que, pour λ-presque tout ω, $t \mapsto X(t,\omega)$ est continue à droite. Alors, pour λ-presque tout ω, pour tout t, λ_ω^t est portée par l'ensemble des ω' pour lesquels la trajectoire $s \mapsto X(s,\omega')$, pour $s \leq t$, coïncide avec celle de ω.

§ 2 SURMARTINGALES REGULIERES

Définition 2.1 : Soit X une fonction ≥ 0 (finie ou non) sur $\mathbb{R} \times \Omega$. On dit que c'est une surmartingale relativement à la mesure λ et la famille de tribus $\mathcal{T}^t$, si elle vérifie les propriétés suivantes :

1) pour tout t, X^t est $\mathcal{T}^t$-mesurable.
2) Pour $s \leq t$, et $A \in \mathcal{T}^s$:

$$\int_A X^s \, d\lambda \geq \int_A X^t \, d\lambda$$

Appelons $(X^t)^{\mathcal{T}^s}$ une espérance conditionnelle de X^t pour la tribu $\mathcal{T}^s$; elle est $\mathcal{T}^s$-mesurable ainsi que X^s, de sorte que la dernière inégalité, valable pour $A \in \mathcal{T}^s$, équivaut à :

$$X^s \geq (X^t)^{\mathcal{T}^s}$$

(valable λ-presque partout, puisque, de toute façon, $(X^t)^{\mathcal{T}^s}$ n'est définie qu'à un ensemble λ négligeable près).

Définition 2.2 : Soit Y une deuxième surmartingale. On dit que c'est une modification de la première si pour tout t, $X^t = Y^t$ λ-presque partout. On dit qu'une surmartingale X est régulière si, pour λ-presque tout ω, $t \to X(t,\omega)$ est réglée et continue à droite.

Posons $J^t = \int_\Omega X^t \, d\lambda$. Comme $\Omega \in \mathcal{T}^s$ pour tout s, $t \mapsto J^t$ est une fonction décroissante

Théorème fondamental des surmartingales 2.3 (Doob) : Soit X une surmartingale à intégrale $t \mapsto J^t$ continue à droite. Elle admet des modifications régulières, et deux d'entre elles sont λ-presque partout égales

Soit maintenant une fonction sur $\mathbb{R} \times \Omega$ à valeurs mesures ≥ 0 sur $(Y, \mathcal{Y})$, $(t,\omega) \mapsto \nu_\omega^t$

Définition 2.5 : On dit que $(t,\omega) \mapsto \nu_\omega^t$ est une surmartingale, si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

1) Pour tout t, $\omega \mapsto \nu_\omega^t$ (fonction sur Ω à valeur mesures sur $(Y,\mathcal{Y})$ est $\mathcal{T}$-mesurable

2) Pour $A \in \mathcal{T}^s$, et $s \leq t$:

$$\int_A \nu_\omega^s \, d\lambda(\omega) \geq \int_A \nu_\omega^t \, d\lambda(\omega).$$

Cela revient à dire que, pour toute fonction $\varphi \geq 0$ sur Y, $\mathcal{Y}$-mesurable, $(t,\omega) \mapsto \nu_\omega^t(\varphi)$ est une surmartingale.

Considérons alors $J^t = \int_\Omega \nu_\omega^t \, d\lambda(\omega)$, mesure sur $(Y,\mathcal{Y})$. On supposera toujours que, pour tout t, J^t est σ-finie, et que $\mathcal{Y}$ est J^t-dénombrablement engendrée (il existe $Y' \in \mathcal{Y}$, portant J^t, tel que la tribu intersection de $\mathcal{Y}$ avec Y' soit dénombrablement engendrée).

La fonction $t \mapsto J^t$, fonction sur $\mathbb{R}$ à valeurs mesures sur $(Y,\mathcal{Y})$ est alors décroissante. Elle sera dite continue à droite si, pour tout $B \in \mathcal{Y}$, $t \mapsto J^t(B)$ est continue à droite.

Définition 2.6 : La surmartingale $(t,\omega) \mapsto \nu_\omega^t$ est dite régulière, si, pour toute fonction φ sur Y, ≥ 0 et $\mathcal{Y}$-mesurable, la surmartingale $(t,\omega) \mapsto \nu_\omega^t(\varphi)$ est régulière.

On a alors le théorème fondemental suivant, qui utilise naturellement le théorème 2.3 mais aussi d'autres propriétés des surmartingales :

Théorème 2.7 : Si $(t,\omega) \mapsto \nu_\omega^t$ est une surmartingale à intégrale $t \mapsto J^t$ continue à droite, elle admet des modifications régulières et deux d'entre elles sont λ-presque partout égales, dans l'un quelconque des 2 cas suivants :

1) Y est un espace topologique, $\mathcal{Y}$ sa tribu borélienne, et chaque J^t est portée par une réunion dénombrable de compacts métrisables de J^t-mesures finies;

2) Ω est un espace topologique, $\mathcal{O}$ sa tribu borélienne, et λ est portée par une réunion dénombrable de compacts métrisables de λ-mesures finies.

Le théorème 1.2 est une conséquence immédiate de celui-ci. Prenons $(\Omega,\mathcal{O}) = (Y,\mathcal{Y})$, et soit, pour tout t, $\omega \mapsto \overline{\lambda_\omega^t}$ une désintégration de λ pour la tribu $\mathcal{T}^t$. Alors $(t,\omega) \mapsto \overline{\lambda_\omega^t}$ est une surmartingale (et même une martingale) à valeurs mesures sur $(\Omega,\mathcal{O})$. En effet, si $A \in \mathcal{T}^s$, $s \leq t$, on a $\int_A \overline{\lambda_\omega^s}\, d\lambda(\omega) = \int_A \overline{\lambda_\omega^t}\, d\lambda(\omega) = \int_A \delta_{(\omega)} d\lambda(\omega) = 1_A \lambda$. L'intégrale ici est constante, $\int_\Omega \overline{\lambda_\omega^t}\, d\lambda(\omega) = \lambda$. Donc il existe une modification régulière, qui sera une désintégration régulière de λ.

Le théorème 2.7 est au théorème 2.3 ce qu'est le théorème 3.2 de l'exposé XXIII à la proposition 1.1 de XXIII. Mais les difficultés à vaincre sont plus importantes.

§ 3. TRIBUS FORTES.

Définition 3.1 : Soit $\mathcal{T}$ une sous-tribu de la tribu λ-mesurable. On dit que $\mathcal{T}$ est λ-forte si elle a les propriétés suivantes :

1) $\mathcal{T}$ est contenues dans la tribu universellement mesurable;

2) Si $\omega \mapsto \lambda_\omega^{\mathcal{T}}$ est une désintégration de λ relativement à $\mathcal{T}$, alors, pour λ-presque tout ω, $\lambda_\omega^{\mathcal{T}}$ donne à tout ensemble élément de $\mathcal{T}$ la mesure 0 ou 1.

Il y a des tribus qui ne sont pas λ-fortes. Néanmoins :

1° Une tribu dénombrablement engendrée et universellement mesurable est λ-forte.

2° Une intersection dénombrable de tribus λ-fortes est λ-forte.

3° Si $\mathcal{T}$ est λ-forte, $\bar{\mathcal{T}} = \cap \hat{\mathcal{T}}_\mu$, où μ parcourt l'ensemble de toutes les mesures de Radon sur Ω, est λ-forte.

Les tribus intervenant dans les processus stochastiques sont λ-fortes. Reprenons en effet ce qui a été dit au début du § 1. Chaque $\mathcal{U}^t$ est dénombrablement engendrée, si l'on suppose (comme il est usuel) que E est un espace souslinien complètement régulier, $\mathcal{E}$ sa tribu borélienne, et que chaque trajectoire $t \mapsto X(t,\omega)$ est continue à droite, donc chaque $\mathcal{U}^t$ est λ-forte; alors chaque $\mathcal{T}^t = \bigcap_{t'>t} \mathcal{U}^{t'}$ est λ-forte, et même chaque $\overline{\mathcal{T}^t}$ est λ-forte.

On a alors les deux théorèmes très intéressants suivants :

Théorème 3.2 : Soit $\mathcal{T}$ une tribu λ-forte sur Ω, et soit $\omega \mapsto \lambda_\omega^{\mathcal{T}}$ une désintégration de λ relativement à $\mathcal{T}$. Soit $\mathcal{S}$ une sous-tribu de $\mathcal{T}$, et soit $\omega \to \lambda_\omega^{\mathcal{S}}$ une désintégration de λ relativement à $\mathcal{S}$. Alors, pour λ-presque tout ω, $\lambda_\omega^{\mathcal{S}}$ admet, comme désintégration relativement à $\mathcal{T}$, la même que λ, soit $\omega' \mapsto \lambda_{\omega'}^{\mathcal{T}}$.

Généralisation :

Théorème 3.3 : Soit $(t,\omega) \mapsto \lambda_\omega^t$ une désintégration régulière de λ relativement à $(\mathcal{T}^t)_{t\in\mathbb{R}}$, et supposons toutes les $\mathcal{T}^t$ λ-fortes.
Alors, pour λ-presque tout ω, pour tout s, λ_ω^s admet, comme désintégration régulière relativement à $(\mathcal{T}^t)_{t\in[s,+\infty[}$, la même que λ, à savoir $(t,\omega') \mapsto \lambda_{\omega'}^t$.

BIBLIOGRAPHIE

Surmartingales régulières à valeurs mesures et désintégrations régulières d'une mesure. A paraître au Journal d'Analyse, de Jérusalem.
