SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

B. MALGRANGE

Sur les points singuliers des équations différentielles (fin)

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1971-1972), exp. n° 22, p. 1-15

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1971-1972____A22_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

SEMINAIRE GOULAOUIC-SCHWARTZ 1971-1972

SUR LES POINTS SINGULIERS DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

(fin)

par B. MALGRANGE

Exposé N° XXII

22 Mars 1972

§ 7. LE CAS $\mathcal{C}^\infty$: ENONCE DU THEOREME PRINCIPAL

Soit k un entier; soit d'autre part Φ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ des m + 1 variables x et $Y = (y_1,\ldots,y_m)$, définie au voisinage de $(0,Y^o)$, et à valeurs dans $\mathbb{R}^m$; notons $\hat{\Phi}$ son développement de Taylor en $(0,Y^o)$.

Theorème 7.1 : Supposons qu'il existe $H \in \hat{\mathcal{O}}^m$, à coefficients réels, avec $H(0) = Y^o$, qui vérifie l'équation $x^{k+1}\frac{dH}{dx} = \hat{\Phi}(x,H)$. Alors il existe $F \in \mathcal{E}^m$, à valeurs réelles vérifiant $\hat{F} = H$, $x^{k+1}\frac{dF}{dx} = \Phi(x,F)$.

Nous allons d'abord indiquer comme ce théorème peut être déduit d'un lemme sur les équations linéaires, lemme qui sera démontré dans les paragraphes suivants. Soient $a > 0$, et p entier ≥ 0; nous désignerons par $B(p;a)$ l'espace des fonctions f continues sur $]0,a]$ à valeurs complexes, et telles que $x^{-p}f(x)$ soit bornée sur cet intervalle; on posera $|f|_p = \sup_{x \in]0,a]} |x^{-p}f(x)|$. Pour $f \in B(p;a)^m$, $F = (f_1,\ldots,f_m)$ on posera par exemple $|F|_p = \sup|f_i|_p$.

Lemme fondamental 7.2 : Soit $D = x^{k+1}\frac{d}{dx} - M$, avec $M \in \mathrm{End}(\mathcal{E}^m)$ et $k \in \mathbb{Z}$; on peut trouver $l \in \mathbb{Z}$, $p_o \in \mathbb{N}$, et $a_o > 0$, possédant les propriétés suivantes :
Pour $0 < a \leq a_o$, il existe une application linéaire $K : B(p_o,a)^m \to B(p_o-1,a)^m$ inverse à droite de D (i.e. $DKG = G$), et telle que, pour tout $p \geq p_o$, la restriction de K à $B(p,a)^m$ soit une application linéaire continue $B(p,a)^m \to B(p-1,a)^m$.

Remarquons que l'on peut aussi supposer la norme de $K : B(p;a)^m \to B(p-1;a)^m$ majorée par une quantité indépendante de a (mais non de p), pourvu qu'on ait supposé $p_o - 1 \geq 0$, ce qu'on fera par la suite; en effet, supposons K obtenu pour $a = a_o$, et notons le K_{a_o} ; pour obtenir un K_a, on peut opérer ainsi : soit $\tilde{G}$ le prolongement à $]0, a_o]$ d'une fonction G continue sur $]0,a]$ obtenu en posant $\tilde{G}(x)=G(a), a\leq x\leq a_o$; on a évidemment $|\widetilde{G}|_p = |G|_p$, et l'on posera simplement $K_a G$ = (restriction à $]0,a]$ de $K_{a_o}\widetilde{G}$).

Montrons comment ce théorème 7.1 résulte du lemme précédent (appliqué aux fonctions à valeurs réelles). Comme au § 6, on se ramène d'abord au cas où $Y^o = 0$, $H = 0$; on a alors $\hat{\Phi}(x,0) = 0$, et on cherche F plat; il suffit de trouver F à droite de 0 (on le trouvera ensuite à gauche de la même manière, en changeant x en -x); écrivons alors $\Phi(x,Y) = \Phi(x,0) + M(x)Y + \Psi(x,Y)(Y,Y)$ avec $M \in \mathrm{End}(\mathcal{E}^m)$, Ψ une forme quadratique à coefficients $\mathcal{C}^\infty(x,Y)$; on applique le lemme précédent, et l'on cherche $F \in B(p,a)^m$ (p et a à déterminer), solution de l'équation $F = K[\Phi(x,0) + \Psi(x,F)(F,F)]$.

Notons L(F) le second membre de l'équation précédente, et choisissons $p \geq p_o$, et vérifiant $p - 1 \geq 1$. Supposons $a \leq 1$; on a alors, puisque $\Phi(x,0)$ est plat $|\Phi(x,0)|_{p+1} \leq C(a)$, avec $C(a) \to 0$ si $a \to 0$; d'autre part, si $|F|_p \leq 1$, on a $|F|_o \leq 1$ donc $\Psi(X,F)$ est borné, et par suite on a, avec C indépendant de a :

$$|(\Psi(x,F)(F,F)|_{2p} \leq C|F|_p^2, \text{ donc } |\Psi(x,F)(F,F)|_{p+1} \leq C\,|F|_p^2$$

il résulte de là, et de la remarque qui suit l'énoncé du lemme que, pour a assez petit, L envoie la boule unité Σ de $B^m(p,a)$ dans elle-même.

Un calcul analogue montre que pour $|F|_p \leq 1$, $|G|_p \leq 1$, on a

$$|\Psi(x,F)(F,F) - \Psi(x,G)(G,G)|_{2p} \leq C|F - G|_p$$

d'où

$$|\Psi(x,F)(F,F) - \Psi(x,G)(G,G)|_{p+1} \leq Ca|F-G|_p$$

on en déduit que, pour a assez petit, L est contractante sur Σ; alors l'équation $F = L(F)$ a une solution et une seule dans Σ; comme F vérifie $x^{k+1}\frac{dF}{dx} = \Phi(x,F)$ dans $]0,a]$, F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,a]$. Reste à montrer que F est plate en 0.

Tout d'abord, montrons que $x^{-q}F$ est borné sur $]0,a]$, quel que soit $q \geq p$; ceci est vrai pour p, donc par récurrence, il suffit de le montrer pour $q+1$, en supposant le résultat établi pour q; or, on a alors $F \in B(q;a)^m$, donc $\Psi(x,F)(F,F) \in B(2q;a)^m$; a fortiori $\Psi(x,F) \in B(q+l+1,a)^m$ et, par hypothèse x, $\Phi(x,0) \in B(q+l+1,a)^m$; donc $L(F) \in B(q+1,a)^m$, ce qui démontre le résultat; en utilisant l'équation différentielle $x^{k+1}\frac{dF}{dx} = \Phi(x,0) + M(x)F + \Psi(x,F)(F,F)$, et le résultat précédent, on voit que $x^{-q}\frac{dF}{dx}$ est encore borné pour tout q; en dérivant l'équation, on voit que $x^{-q}\frac{d^2F}{dx^2}$ est encore borné pour tout q, et ainsi de suite. Par conséquent modulo le lemme 7.2, le théorème 7.1 est complètement démontré.

<u>Proposition 7.3</u> : <u>Si</u> D <u>a un point singulier régulier en</u> 0, <u>le lemme</u> 7.2 <u>est vrai.</u>

Il est clair que, si le lemme garde un sens lorsqu'on suppose $M \in End(K\mathcal{E}^m)$, et que d'autre part, on ne change rien (sauf les valeurs éventuelles de p_0 et l) en multipliant D par $x^p (p \in \mathbb{Z})$ et en faisant une transformation du type $F = AF_1$, $G = AG_1$, avec $A \in Gl(m,K\mathcal{E})$. D'après le corollaire (6.4), on peut donc supposer $k = 1$, et M constant ; on peut même supposer que M est triangulaire inférieure; alors en raisonnant par récurrence, on est ramené à démontrer le résultat lorsque D est l'opérateur différentiel scalaire $x\frac{d}{dx} - \lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$; ce cas peut être laissé au lecteur. (ici, on pourra même prendre $l = 0$, mais peu importe).

§ 8. LE CAS FAVORABLE

La proposition suivante est classique :

<u>Proposition 8.1 : Avec les notations du lemme</u> 7.2, <u>supposons</u> $k \geq 1$, <u>et supposons que les valeurs propres</u> λ_j <u>de</u> $M(0)$ <u>vérifient</u> $\mathrm{Re}(\lambda_j) \neq 0$. <u>Alors le lemme 7.2 est vrai avec</u> $l = 0$.

<u>Démonstration</u>

i) Il suffit de démontrer la proposition pour $M = M(0)$; en effet, supposons le résultat établi dans ce cas; soit $K^o : B(p;a)^m \to B(p;a)^m$ l'inverse à droite de $x^{k+1}\frac{d}{dx} - M(0)$ (K^o dépend de a, mais non de $p \geq p_o$); on pose alors $M(x) = M(0) + xN(x)$, $N \in \mathrm{End}(\mathcal{E}^m)$, et on note L l'application $F \mapsto xNK^oF$; il suffit de trouver K^1, inverse de $I - L$, car alors $K^oK^1 = K$ sera un inverse à droite de D.

Or, pour $a \leq a_o$, on a $|K_oF|_{p_o} \leq C|F|_{p_o}$ (cf remarque suivant l'énoncé du lemme 7.2), d'où, par un calcul analogue à ceux du § 7 : $|LF|_{p_o} \leq C'a|F|_{p_o}$; en choisissant a pour qu'on ait $C'a < 1$, on voit que la série $K^1 = \Sigma L^n$ converge dans l'espace des applications linéaires continues de $B(p_o;\, a)^m$ dans lui-même.

Montrons par récurrence sur $p \geq p_o$ que K^1 envoie continuement $B(p;a)^m$ dans lui-même; supposons donc le résultat acquis pour $p - 1$; l'équation $H = K^1G$ équivaut à $H = G + LH$; si G parcourt un borné de $B(p,a)^m$, H parcourt un borné de $B(p-1;a)^m$ par hypothèse de récurrence; donc $LH = xNK^oH$ parcourt un borné de $B(p-1;a)^m$; donc $H = G + LH$ parcourt un borné de $B(p;a)^m$, ce qui démontre le résultat.

Il est alors clair que $K = K^oK^1$ répond à la question; d'où la proposition.

ii) Démontrons maintenant le résultat pour M constant; on peut supposer M triangulaire inférieure; alors par récurrence sur m, on est ramené à établir le résultat pour l'opérateur différentiel scalaire $x^{k+1}\frac{d}{dx} - \lambda$, avec $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\,\lambda \neq 0$; posons $\lambda = k(\mu + i\nu)$; la transformation $f = \exp($[illegible]$^{-1})\, f_1$ nous ramène au cas où $\nu = 0$; alors la solution générale de l'équation

$x^{k+1}\frac{df}{dx} - k\mu f = g$ s'écrit

$$f(x) = \int_{x_0}^{x} t^{-k-1}\exp[\mu(t^{-k}-x^{-k})]g(t)dt.$$

Pour $\mu > 0$, on choisira $x_0 = a$ (par exemple $x_0 = 1$), et pour $\mu < 0$, on choisira $x_0 = 0$; dans les deux cas, on doit démontrer que pour $p \in \mathbb{N}$, et x tendant vers 0, on a

$$\int_{x_0}^{x} t^{p-k-1} \exp[\mu(t^{-k}-x^{-k})]g(t)dt = 0(x^p)$$

Faisons la démonstration pour $\mu > 0$ (le cas $\mu < 0$ est analogue et un peu plus simple); par le changement de variables $s = t^{-k}$, $y = x^{-k}$, $p/k = q$, on est ramené à démontrer qu'on a, pour $y \to +\infty$,

$$\int_1^y s^{-q} \exp \mu(s-y)dy = 0(y^{-q})$$

En intégrant par parties, on trouve que le terme tout intégré est de l'ordre voulu, et il reste à évaluer $\int_1^y s^{-q-1}\exp \mu(s-y)dy$; supposant $y > 2$, on coupe la dernière intégrale en $\int_1^{y/2}$ et $\int_{y/2}^{y}$; on majore $\int_1^{y/2}$ en y remplaçant s^{-q-1} par 1, et $\int_{y/2}^{y}$ en y remplaçant $\exp \mu(s-y)$ par 1; nous laissons les détails au lecteur. (en fait, en continuant les intégrations par parties, on obtiendrait un développement asymptotique de l'intégrale envisagée; cela correspond en fait à démontrer le théorème 7.1 pour l'équation $x^{k+1}\frac{df}{dx} - k\mu f = x^p$, et la solution formelle évidente de cette équation!). La proposition est donc démontrée.

<u>Corollaire 8.2</u> (cf. Wasow [1]) : <u>Dans les hypothèses du théorème 7.1, supposons en outre qu'on ait $k \geq 1$, et que la matrice $\frac{\partial\Phi}{\partial Y}(0,Y^0)$ ait toutes ses valeurs propres de partie réelle non nulle. Alors le théorème (7.1) est vrai.</u>

Cela résulte de la démonstration de l'implication (7.2) ⇒ (7.1).

<u>Remarque 8.3</u> : Dans les hypothèses précédentes, et même dans l'hypothèse plus faible " $\Phi(0,Y^o) = 0$, $\frac{\partial\Phi}{\partial Y}(0,Y^o)$ inversible", il existe une et une seule série formelle H vérifiant $H(0) = Y^o$ et $x^{k+1}\frac{dH}{dx} = \hat{\Phi}(x,H)$. Cela se voit par le même calcul que le théorème des fonctions implicites pour les séries formelles (puisque l'application $H \to x^{k+1}\frac{dH}{dx}$ augmente strictement le degré des monômes).

Donnons maintenant une application des résultats précédents qui jouera un rôle essentiel dans la suite.

<u>Proposition 8.4</u> (Sibuya ; cf. Wasow [1]) : <u>Soit</u> $D = x^{k+1}\frac{d}{dx} - M$, <u>avec</u> $M \in \mathrm{End}(\mathcal{E}^m)$. <u>Supposons qu'on ait une décomposition de</u> $M(0)$ <u>en deux blocs</u> $M(0) = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$, $P \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^p)$, $Q \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^q)$, $p + q = m$; <u>désignons par</u> λ_i (resp μ_j) <u>les valeurs propres de</u> P (resp de Q) <u>et supposons que, pour tout</u> (i,j), <u>on ait</u> $\mathrm{Re}(\lambda_i) \neq \mathrm{Re}(\mu_j)$. <u>Alors il existe</u> $A \in Gl(m,\mathcal{E})$, <u>avec</u> $A(0) = I$ <u>tel que la transformation</u> $F = AF$, <u>transforme</u> D <u>en</u> $x^{k+1}\frac{d}{dx} - N$, <u>avec</u> $N = \begin{pmatrix} N' & 0 \\ 0 & N'' \end{pmatrix}$, $N' \in \mathrm{End}(\mathcal{E}^p)$, $N'' \in \mathrm{End}(\mathcal{E}^q)$.

Posons $M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$ avec $M_{11} \in \mathrm{End}(\mathcal{E}^p)$, etc...; on cherche a priori A sous la forme $A = I + \begin{pmatrix} 0 & A' \\ A'' & 0 \end{pmatrix}$, $A'(0) = 0$, $A''(0) = 0$; on doit avoir $x^{k+1}\frac{dA}{dx} = MA - AN$; en annulant les blocs d'indice (11) et (21) dans cette équation, on trouve

$$\begin{cases} M_{11} + M_{12}A'' = N' \\ M_{21} + M_{22}A'' = A''N' + x^{k+1}\dfrac{dA''}{dx} \end{cases}$$

En tirant N' de la première équation, on trouve l'équation suivante pour A'' : $x^{k+1}\frac{dA''}{dx} = M_{21} + M_{22}A'' - A''M_{11} - A''M_{12}A''$.

Nous allons appliquer à cette équation la remarque 8.3 et le corollaire 8.2 (le fait que notre équation soit à coefficients complexes n'est pas gênant, il suffirait de séparer les parties réelles et imaginaires); on prend ici $\Phi(x,A") = M_{21} + M_{22}A" - A"M_{11} - A"M_{12}A"$; on a bien $\Phi(0,0) = M_{21}(0) = 0$; et $\frac{\partial\Phi}{\partial A"}(0,0)$ est l'application $\alpha \mapsto M_{22}(0)\alpha - \alpha M_{11}(0) = Q\alpha - \alpha P$, $\alpha \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^p,\mathbb{C}^q)$; le lemme (6.2) montre que les valeurs propres de cette application sont les $\mu_j - \lambda_i$, donc ont leur partie réelle non nulle; la remarque 8.3 donne alors l'existence d'une solution formelle $\widehat{A"}$, et le corollaire 8.2 l'existence de A"; on opère de même avec les blocs (1 2) et (2 2) pour trouver A'.

<u>Remarque 8.5</u> : Si l'on affaiblit les hypothèses de la proposition 8.4 en supposant seulement qu'on a, pour tout (i,j) $\lambda_i \neq \mu_j$, la partie formelle du raisonnement précédent montre qu'on peut trouver A, avec $A(0) = I$, tel que $\widehat{N}$ soit de la forme $\widehat{N} = \begin{pmatrix} \widehat{N}' & 0 \\ 0 & \widehat{N}" \end{pmatrix}$. Cela jouera un rôle important dans la suite (en fait, le théorème (7.1) montrera finalement que la proposition 8.4 reste vraie sous cette hypothèse affaiblie; mais, au point où nous en sommes, nous n'avons pas encore le droit d'utiliser ce résultat; comme on va le voir, cela va nous obliger à quelques contorsions!).

§ 9. DEMONSTRATION DU LEMME FONDAMENTAL

A. Démontrons d'abord le résultat pour m = 1; soit $D = x^{k+1}\frac{d}{dx} - m$, $m \in \mathcal{E}$; si $\mathrm{Re}\, m(0) \neq 0$, cela résulte de 8.1; si $k \geq 1$, et $m(0) = i\,k\,\lambda$, $\lambda \neq 0$, la transformation $f = \exp(-i\lambda x^{-k})f_1$ nous ramène à $m(0) = 0$, donc on est ramené de k à k - 1; par récurrence, on est ramené à k = 0, i.e. au cas d'un point singulier régulier.

Dans la suite, nous procéderons par récurrence sur m, et supposerons donc le résultat établi pour 1,...,m - 1.

B. Si k = 0, le résultat est établi par la proposition 7.3. Supposons donc $k \geq 1$, et soient $\lambda_1,\dots,\lambda_q$ les valeurs propres distinctes de $M(0)$; supposons qu'on ait, pour un i au moins $\mathrm{Re}(\lambda_i) \neq 0$; alors le lemme fondamental résulte de l'hypothèse de récurrence; en effet, si pour tout i on a $\mathrm{Re}\, \lambda_i \neq 0$, on est dans le cas favorable 8.1; si, pour un j, on a $\mathrm{Re}\, \lambda_j \neq 0$, on peut décomposer $M(0)$ par une transformation linéaire en deux blocs $\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$, les valeurs propres de P(resp de Q) étant toutes de partie réelle $\neq 0$ (resp $= 0$); le lemme fondamental résulte alors de 8.4 et de l'hypothèse de récurrence.

C. Supposons maintenant $k \geq 1$, et supposons que les valeurs propres de $M(0)$ vérifient toutes $\mathrm{Re}\, \lambda_j = 0$. On appelera "système standard" un tel système, muni d'une décomposition du type suivant : on suppose donnée une partition de $\{1,..,m\}$ en sous-ensembles $\{1,..,m_1\}$, $\{m_1+1,..,m_1+m_2\},..,\{m_1+...+m_{p-1},..,m_1+..+m_p = m\}$ avec $m_1,..,m_p \neq 0$, tel que, dans cette décomposition, les termes non diagonaux de $\hat{M}$ soient nuls ("les termes de couplage entre les différents blocs sont plats"). A un tel "système standard ", on associe les deux entiers $C(D) = m - p$ (son"couplage") et $i(D)$, son irrégularité; on a $0 \leq C(D) \leq m-1$, et $C(D) = 0$ signifie que tous les m_i sont égaux à 1; d'autre part, en posant

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} \hat{M}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \hat{M}_p \end{pmatrix} \quad , \hat{D}_j = x^{k+1}\frac{d}{dx} - \hat{M}_j ,$$

on a facilement $i(D) = \Sigma\, i(\hat{D}_j)$.

On ordonne les couples (C,i) lexicographiquement, i.e. on pose $(C,i) \leq (C',i')$ si $C < C'$ ou $C = C'$, $i \leq i'$. Pour démontrer le lemme fondamental, nous allons faire une seconde récurrence sur (C,i), et plus précisément démontrer le résultat suivant.

<u>Lemme</u> (C,i) : (<u>On suppose toujours</u> m <u>fixé</u>, <u>et le résultat démontré pour</u> $m' < m$).

<u>Soit</u> $i > 0$, <u>et supposons le résultat démontré pour les systèmes standard</u> D <u>avec</u> $(C(D), i(D)) < (C,i)$. <u>Alors, le résultat est vrai pour les</u>

<u>systèmes standard</u> D <u>vérifiant</u> $(C(D),\ i(D)) = (C,i)$.

Par récurrence, on sera ramené au cas où $i(D) = 0$, c'est-à-dire au cas des points singuliers réguliers, cas réglé par la proposition 7.3.

D. Restons dans la situation précédente, et supposons qu'une des valeurs propres λ_1 d'un des $M_j(0)$ (disons de $M_1(0)$ soit $\neq 0$). Deux cas sont alors possibles. 1) Si $M_1(0)$ a deux valeurs propres distinctes d'après la remarque (8.5) on peut décomposer le système $\hat{D}_1$; par ce procédé, on a diminué $C(D)$.

2) Si toutes les valeurs propres de $M_1(0)$ sont égales à $\lambda_1 = ik\mu$ ($\mu \in \mathbf{R} - \{0\}$), on fait la transformation $F_1 = \exp(-i\ \mu x^{-k})F_1'$, $F_2 = F_2', \ldots, F_p = F_p'$ (en posant $F_1 = (f_1, \ldots, f_{m_1})$ etc...); alors on ne change pas $\hat{D}_2, \ldots, \hat{D}_p$, et on a remplacé $\hat{D}_1$ par $\hat{D}_1' = x^{k+1}\frac{d}{dx} - (\hat{M}_1 - \lambda_1 1)$; on n'a donc pas changé $C(D)$ et, d'après la proposition (5.6), on a diminué $i(\hat{D}_1)$, donc $i(D) = \Sigma\, i(\hat{D}_j)$. Dans les deux cas, on a démontré (C,i).

Notons que ce procédé permet, en particulier en raisonnant comme en A et B de démontrer $(0,i)$ par récurrence descendante sur i (formellement, cette remarque n'est pas indispensable pour la suite).

E. Reste à régler le cas où les $M_j(0)$ sont tous nilpotents. Nous allons faire une transformation ("transformation de Turrittin-Katz", voir Deligne [1] ou Katz [1]) qui élimine ce cas. Pour plus de clarté, expliquons d'abord en quoi consiste cette transformation lorsqu'on a $p = 1$. Comme on l'a déjà observé en démontrant la proposition 7.3 on peut multiplier D par une puissance de x, et faire sur D une transformation du type $F = AF_1$, avec $A \in Gl(m, K\,\mathcal{E})$; en particulier, en utilisant le théorème (3.1) (avec $\hat{K}$ au lieu de K), on peut supposer que l'on a $D = x\frac{d}{dx} - M$, $\hat{M}$ ayant la forme suivante

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ \hat{\lambda}_1 & \cdots & \hat{\lambda}_{m-1} & \hat{\lambda}_m \end{pmatrix} \quad \text{avec } \lambda_j \in K\,\mathcal{E}$$

Faisons alors la transformation suivante

$$f_1 = x^{-r} g_1,\ f_2 = x^{-2r} g_2, \ldots, f_m = x^{-mr} g_m\ ,\ r \geq 0 \text{ à déterminer;}$$

le système devient $G \mapsto x^{r+1} \frac{dG}{dx} - NG$, avec $\hat{N}$ donné par la formule suivante

$$\hat{N} = \begin{pmatrix} r\,x^r & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & (m-1)r x^r & 1 \\ \hat{\lambda}_1 x^{mr} & \cdots & \hat{\lambda}_{m-1} x^{2r} & (\hat{\lambda}_m + m\,r) x^r \end{pmatrix}$$

Si les λ_i n'ont pas de pôle, on est dans le cas régulier et l'on prend $r = 0$; sinon, en choisissant r satisfaisant aux inégalités qui suivent, on élimine les pôles :

$$-v(\lambda_1) \leq mr, \ldots, -v(\lambda_m) \leq r.$$

Pour obtenir une partie principale d'ordre 0 non nilpotente, il faudra alors choisir $r = \sup\left(- \dfrac{v(\lambda_j)}{m-j+1} \right)$; si r est entier, cela va bien, sinon, on pose $r = \frac{1}{q}$, et on fait le changement de variable $x = y^q$ (ce qui ne gêne pas pour démontrer le lemme fondamental); combiné avec la transformation précédente, on arrive finalement à une équation $G \mapsto y^{l+1} \dfrac{dG}{dy} - qP$, avec $P \in \mathrm{End}\,(\mathcal{E}^m)$, et $P(0)$ ayant la forme suivante

$$P(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ d_1 & \cdots & d_{m-1} & d_m \end{pmatrix}$$

avec $d_j = \lim_{r \to 0} \lambda_j(x) x^{jr}$; donc certains d_j sont $\neq 0$; comme l'équation caractéristique de $P(0)$ est $\lambda^m - d_m \lambda^{m-1} + \dots + a_1$, $P(0)$ est non nilpotente.

Observons enfin ceci : si toutes les valeurs propres de $P(0)$ sont confondues, leur somme d_m est $\neq 0$; par suite on a $r = -v(\lambda_m)$, donc r est entier et l'on peut prendre $q = 1$.

Revenons maintenant à la situation générale : à $\hat{D}_1, \dots, \hat{D}_p$ correspondent respectivement des rationnels $r_1, \dots, r_p$, l'un au moins étant > 0, (sinon on est dans le cas régulier); on prend alors $r = \sup(r_1, \dots, r_p)$, et on fait simultanément la transformation de Turrittin-Katz avec cette valeur de r sur $\hat{D}_1, \dots, \hat{D}_p$, joint au changement de variable $y = x^q$ $(r = \frac{1}{q})$; on a alors remplacé D par $D' = y^{l+1} \dfrac{d}{dy} - N$, avec $\hat{N} = \begin{pmatrix} \hat{N}_1 & 0 \\ 0 & \hat{N}_p \end{pmatrix}$, l'une au moins des matrices $\hat{N}_j(0)$ étant non nilpotente.

On est alors dans le cas B, le cas D_1 ou le cas D_2; dans le cas B, le résultat suit par récurrence sur m; dans le cas D_1, on diminue $C(D)$; dans le cas D_2, d'après la remarque précédente, r est entier, donc le procédé donné en D_2 diminue $i(D)$.

Le lemme (C,i) et donc aussi le lemme fondamental, est ainsi complètement établi.

<u>Remarque</u> : Au lieu de faire une récurrence sur l'irrégularité $i(D)$, il aurait été tout aussi naturel (et même encore plus) d'utiliser a priori "l'irrégularité de Katz", i.e. le nombre r qui vient d'être introduit et qui mesure l'ordre minimum des pôles à considérer.
(Voir à ce sujet Gérard-Levelt [1], et un article à paraître de Levelt).

§ 10. <u>APPLICATIONS</u>

A) Le théorème 7.1 entraîne le théorème suivant, en apparence plus général :

<u>Théorème 10.1</u> : <u>Soit Φ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ des $2m+1$ variables $x, Y = (y_1,\ldots,y_m)$, et $Z = (z_1,\ldots,z_m)$ au voisinage de $0, Y^o, Z^o$, à valeurs dans $\mathbb{R}^m$; supposons qu'il existe une série formelle $H \in \hat{\mathcal{C}}^m$ (à coefficients réels) vérifiant $H(0) = Y^o$, $\frac{dH}{dx}(0) = Z^o$, et $\hat{\Phi}(x,H,\frac{dH}{dx}) = 0$; supposons enfin que la matrice $\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial Z}(x,H(x),\frac{dH}{dx})$ soit inversible sur $\hat{K}$ (i.e appartienne à $Gl(m,\hat{K})$); alors, il existe $F \in \mathcal{E}^m$, à valeurs réelles vérifiant $\hat{F} = H$, $\Phi(x,H,\frac{dH}{dx}) = 0$.</u>

La réduction de ce résultat au cas (7.1) se fait suivant une méthode habituelle dans des questions voisines.
a) On traite d'abord le cas où l'on a $\Phi(x,Y,Z) = \Psi(x,Y)Z - \chi(x,Y)$, Ψ une matrice d'ordre m à coefficients $\mathcal{C}^\infty$; pour cela, on se ramène au cas où $H = 0$, donc $Y^o = Z^o = 0$; on a alors la situation suivante : $\chi(x,o)$ est plat, et $\Psi(x,0)$ est inversible dans $K\mathcal{E}$; il existe donc $M \in End(\mathcal{E}^m)$ et $k \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $M\,\Psi(x,0) = x^k I$; posons alors $F = x^k G$; on a $M\Psi(x,x^k G) = x^k\Psi_1(x,G)$, avec $\Psi_1(x,0) = I$, donc $\Psi_1(x,Y)$ est

inversible au voisinage de $(0,0)$ dans les matrices à coefficients $\mathcal{C}^\infty$; on a aussi $M\,\chi(x,x^kG) = x^k\chi_1(x,G)$, avec χ_1 de classe $\mathcal{C}^\infty$; on est alors ramené à l'équation

$$x^k \frac{dG}{dx} = -kx^{k-1}\,G + \Psi_1^{-1}(x,G)\chi_1(x,G)$$

b) On ramène le cas général au précédent, par dérivation, en remplaçant l'équation initiale par le système

$$\begin{cases} \dfrac{dF}{dx} - G = 0 \\ \dfrac{\partial\Psi}{\partial x}(x,F,G) + \dfrac{\partial\Psi}{\partial Y}(x,F,G)\,G + \dfrac{\partial\Psi}{\partial Z}\,(x,F,G)\,\dfrac{dG}{dx} = 0 \end{cases}$$

B) Dans le cas linéaire, on a le théorème suivant

<u>Théorème 10.2</u> : <u>Soit</u> $D = x^k \frac{dF}{dx} - MF$, <u>avec</u> $k \in \mathbb{N}$, $M \in \mathrm{End}(\mathcal{E}^m)$; <u>soit</u> $\mathcal{D}'$ <u>l'espace des germes de distributions en</u> 0 <u>dans</u> $\mathbb{R}$; <u>alors</u>, <u>on a</u> $D\mathcal{D}'=\mathcal{D}'$

Soit $a > 0$, assez petit, et soit I l'intervalle $[-a,a]$; par dualité, il suffit de démontrer que l'application $D' : \mathcal{D}_I^m \to \mathcal{D}_I^m$ est d'image fermée ($\mathcal{D}_I$ désignant l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support dans I) ; d'après un lemme classique puisque $\mathcal{D}_I$ est un espace de Fréchet, il suffit de démontrer que $D'\mathcal{D}_I^m$ est de codimension finie dans $\mathcal{D}_I^m$; soit E l'espace des $F \in \mathcal{C}^\infty(I)^m$ telles qu'on ait $D'F \subset \mathcal{D}_I^m$; d'après le théorème d'existence et d'unicité usuel, $\mathcal{D}_I^m$ est le sous-espace de E formé des F telles qu'on ait $F(-a) = F(a) = 0$, donc $\mathcal{D}_I^m$ est de codimension finie dans E, et il suffit de démontrer que $D'E$ est de codimension finie dans $\mathcal{D}_I$; or, le théorème 7.1, joint au théorème usuel de prolongement des solutions d'une équation différentielle montre que $D'E$ est l'ensemble des $F \in \mathcal{D}_I^m$ tels qu'on ait $\hat{F} \in \widehat{D'}\hat{\mathcal{O}}^m$; ceci joint au fait que $D' : \hat{\mathcal{O}}^m \to \hat{\mathcal{O}}^m$ est à indice (proposition 3.6) et à la surjectivité de l'application $\wedge : \mathcal{D}_I \to \hat{\mathcal{O}}$, entraîne le résultat cherché.

C) Une application importante du théorème 7.1 est due à Kouznetsov, qui a lui-même démontré indépendamment 7.1 (communication personnelle, cf. article à paraître à Funktsional'nyi Analyz). Disons qu'un système différentiel $D = x\frac{d}{dx} - M$, $M \in \mathrm{End}\,(K\,\mathcal{E}^m)$ est "élémentaire" si l'on a $M = \sum_{-k}^{-1} \lambda_p\, x^{-p}\, I + M_o$, $M_o \in \mathrm{End}\,(\mathbb{C}^m)$ et $\lambda_p \in \mathbb{C}$. On a alors le résultat suivant

<u>Théorème 10.3</u> : (Kouznetsov). <u>Soit</u> $D = x\frac{d}{dx} - M$, $M \in \mathrm{End}\,(K\mathcal{E}^m)$, <u>un système différentiel. Par un changement de variables</u> $x = y^q$ (q entier ≥ 0), <u>suivi d'une transformation</u> $F = AF_1$, $A \in Gl(m,K\mathcal{E})$, <u>on peut réduire</u> D <u>à la forme "diagonale"</u> $D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & \ddots D_p \end{pmatrix}$, <u>les</u> D_j <u>étant élémentaires.</u>

Donnons quelques indications très rapides sur la démonstration; tout d'abord, le théorème 7.1 permet de se réduire à démontrer le résultat analogue dans le cas formel, i.e. $M \in \mathrm{End}(\hat{K}^m)$, etc... Dans ce cas, le résultat se démontre essentiellement de la même manière que celle employée au § 9; mais ici les choses se simplifient, il suffit d'une double récurrence sur m d'une part, $i(D)$ (ou mieux encore, l'irrégularité de Katz) d'autre part. Nous n'entrerons pas dans les détails. Notons que cela précise des résultats classiques sur les développements asymptotiques des solutions d'une équation différentielle au voisinage d'un point singulier (cf. Wasow [1]).

BIBLIOGRAPHIE

I. M. Bernstein [1] : Modules sur des anneaux d'opérateurs différentiels. Solutions fondamentales des équations à coefficients constants [en russe], Funktsional'nyi Analyz, 5-2 (1971), p.1-16.

P. Deligne [1] : Equations différentielles à points singuliers réguliers, Lecture Notes in Math., 163, Springer-Verlag 1970.

A. Douady [1] : Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné, Ann. Inst. Fourier, 16-1 (1966) p.1-95.

R. Gérard et A. Levelt [1] : Mesure de l'irrégularité en un point singulier d'un systeme d'équations différentielles linéaires, C. R. Acad. Sc., Paris 274-9 (1972) p.774-776

N. Katz [1] : Nilpotent connections and the monodromy theorem; Application of a result of Turrittin, Publ. Math. I.H.E.S. 39 (1970)p.176-232

B. Malgrange [1] : Remarques sur les points singuliers des équations différentielles, C. R. Acad. Sc., Paris 273-23 (1971) p.1136-1137.

J. Moser [1] : The order of a singularity in Fuchs' theory, Math. Zeitschrift 72 (1960) p. 379-398.

W. Wasow [1] : Asymptotic expansions for ordinary differential equations, Interscience Publ. 1965.